ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНФОРМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1993 год Выпуск 148

УДК 681.3

УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ CWA-ПРАВИЛА ДЛЯ ИНДУКТИВНЫХ БАЗ ДАННЫХ

В.Н.Желябин

Одной из наиболее известных проблем, обсуждаемых в теории логического программирования, является проблема обработки отрицательных запросов. Как хорошо известно, для любой логической программы P и запроса A, где A - атомная замкнутая формула, множество P ∪ {A} всегда совместно. Поэтому мы не можем показать, что $\sim A$ (отрицание A) является логическим следствием программы P. В силу этого факта возникает естественный вопрос обработки отрицательных запросов к логическим программам. Одним из методов обработки отрицательных запросов является правило "предположение замкнутости мира", которое мы будем в дальнейшем называть CWA-правилом. Использование этого правила восходит к реляционным базам данных, и его неформальная суть заключается в том, что реляционная база данных знает все о том реальном мире, который описывается этой базой данных. Поэтому если на запрос A к реляционной базе данных получен отрицательный ответ, то предполагают, что имеет место $\sim A$. Впервые CWA-правило было рассмотрено Рейтером в [1]. В контексте логического программирования CWA-правило можно описать следующим образом. Пусть P - логическая программа и A - атомная замкнутая формула. Тогда будем говорить, что $\sim A$ выводима по CWA-правилу, если F ∪ ($\sim A$) не имеет SLD-опровержения. Так как отсут -

ствие SLD-определения для $F \cup \{\sim A\}$ эквивалентно тому, что A не является логическим следствием P, то $\sim A$ выводима по CWA-правилу, если A не является логическим следствием P. Нетрудно видеть, что CWA-правило является не монотонным правилом, т.е. при добавлении новых аксиом множество выводимых с помощью CWA-правила формул может уменьшиться. Естественно возникает вопрос о совместности CWA-правила. А именно будет ли объединение логической программы P с множеством выводимых по CWA-правилу формул, совместным множеством? Если P является классической логической программой, т.е. конечным множеством универсальных хорновских предложений, то ответ на этот вопрос положительный.

Пусть теперь T - теория в некотором языке логики первого порядка и A - замкнутая формула этого языка. Тогда по аналогии с вышеизложенным будем говорить, что $\sim A$ выводима по CWA-правилу, если A не является логическим следствием теории T. Нетрудно привести пример теории,для которой CWA-правило не является совместным.Поэтому поиск разумных ограничений на теорию T, при которых CWA-правило будем совместным, представляет интерес для различных его применений в теории баз данных и в логическом программировании. Так,Джагер [2] показал, что если теория T слабо счетно категорична по модулю некоторого множества предикатных символов и обладает свойством пересечения, то CWA-правило для T будет совместным. Отсюда как следствие им получен следующий результат: CWA-правило для слабо счетно категоричных индуктивных баз данных является совместным. В той же работе Джагером был поставлен вопрос: будут ли вышеуказанные результаты оставаться истинными,если условие слабо счетной категоричности заменить на условие полноты теории? Данная статья посвящена решению этого вопроса.

Пусть Σ - конечная или счетная сигнатура, содержащая по крайней мере одну константу. Пусть T - теория и F - формула логики первого порядка сигнатуры Σ. Тогда выражение $T \vdash F$ обозначает тот факт, что F выводима из T с помощью обычных аксиом и правил вывода логики первого порядка с равенством. Теория T называется несовместной (противоречивой), если каждая формула сигнатуры Σ выводима из T, в противном случае теория T называется совместной (непротиворечивой). Как хорошо известно, теория T совместна тогда и только тогда, когда T имеет модель, т.е. когда существует модель сигнатуры Σ, в которой истинны все формулы из T.

Под логической программой сигнатуры Σ мы будем понимать конечное множество выражений вида $A \leftarrow B_1,\dots,B_n$, где $A, B_1, \dots, B_n$ – атомные формулы сигнатуры Σ и $n \geq 0$. Выражение $A \leftarrow B_1,\dots,B_n$ можно понимать как логическую формулу вида $\forall x_1 \dots x_m (B_1 \ \& \ \dots \ \& \ B_n \rightarrow A)$, где $x_1,\dots,x_m$ – переменные, входящие в выражение $A \leftarrow B_1,\dots,B_n$.

Пусть P - логическая программа. Тогда положим $CWA(P) = \{\sim A$: A – основной атом и A не является логическим следствием $P\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (Рейтер [1]). *Для любой логической программы* P *множество формул* $P \cup CWA(P)$ *совместно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы компактности достаточно показать, что для любого конечного множества S из CWA(P) множество $P \cup S$ совместно. Предположим противное. Пусть $S \subseteq CWA(P)$, $S = \{\sim A_1, \dots, \sim A_n\}$ и множество $P \cup S$ несовместно. Тогда формула $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$ является логическим следствием P. В силу свойств логических программ получаем, что тогда некоторое A_i является логическим следствием программы P. Но это противоречит тому, что $\sim A \in CWA(P)$. Таким образом, множество формул $P \cup CWA(P)$ совместно.

Далее, если не оговорено противное, то под теорией и формулами мы будем понимать теорию и формулы сигнатуры Σ. Конечную последовательность $t_1,\dots t_n$ термов сигнатуры Σ будем обозначать через $\bar{t}$, и выражение $F[\bar{x}]$ означает, что все свободные переменные формулы F содержатся в $\bar{x}$. Обозначим через QF множество бескванторных формул. Терм (формулу) сигнатуры Σ без свободных переменных будем называть основным термом (основной или замкнутой формулой).

В [1] Рейтер ввел понятие CWA-правила, которое в этой статье мы будем использовать в следующем виде. Пусть T - теория и Г - некоторое множество замкнутых формул. Определим множество $NEG_\Gamma(T)$, полагая

$$NEG_\Gamma(T) = \{\sim A\colon A \in \Gamma \text{ и } A \text{ не выводима из } T\}.$$

Пусть теперь $CWA_\Gamma(T) = T \cup NEG_\Gamma(T)$. Зафиксируем $\underline{P}=\{P_1,\ldots,P_n\}$ - множество предикатных символов сигнатуры Σ, и пусть $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \underline{P}$. Тогда если $\Gamma = \{P(\bar{t})\colon \bar{t}$ - набор основных термов и $P \in \underline{P}\}$, то положим $CWA_{\underline{P}}(T) \rightleftharpoons CWA_\Gamma(T)$. Аналогичные формы определения $CWA_{\underline{P}}(T)$ рассматривались Джагером [2], а также Генесерезом и Нильсоном [3].

Рассмотрим теперь следующий пример. Пусть сигнатура Σ содержит константы a,b и одноместный предикатный символ P и пусть $T = \{\sim(a=b),\ P(a) \vee P(b)\}$. Ясно, что $P(a)$, $P(b)$ не выводимы из T. Поэтому $CWA_{\underline{P}}(T) = T \cup \{\sim P(a), \sim P(b)\}$, здесь $\underline{P} = \{P\}$. Следовательно, $CWA_{\underline{P}}(T) \vdash \sim P(a)\ \&\ \&\sim P(b)$. С другой стороны, $CWA_{\underline{P}}(T) \vdash P(a) \vee P(b)$. Таким образом, теория $CWA_{\underline{P}}(T)$ противоречива, хотя очевидно, что теория T непротиворечива. В связи с этим возникает вопрос. Для каких теорий T и множества формул Г теория $CWA_\Gamma(T)$ непротиворечива? Ответу на этот вопрос и посвящена данная статья.

Пусть M - модель сигнатуры Σ и R - некоторый сигнатурный символ. Тогда через R^M будем обозначать интерпретацию символа R в модели M. Если $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, то через $M\downarrow\Sigma_1$ обозначим обеднение модели M до модели сигнатуры Σ_1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть M и N - модели сигнатуры Σ. Говорят, что модели M и N равны по модулю $\underline{P}$ ($M = N \bmod \underline{P}$), если $M\downarrow\Sigma_0 = N\downarrow\Sigma_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Модели M и N сигнатуры Σ называют изоморфными, если существует такое взаимно-однозначное отображение Φ между M и N, что

1) $\Phi(f^M(m_1,\dots,m_n)) = f^M(\Phi(m_1),\dots,\Phi(m_n))$;

2) $\langle m_1,\dots,m_n\rangle \in R^M \iff \langle \Phi(m_1),\dots,\Phi(m_n)\rangle \in R^N$

для любых элементов $m_1,\dots,m_n$ из M, функциональных и предикатных символов f и R из Σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Модели M и N сигнатуры Σ называют изоморфными по модулю $\underline{P}$ ($M \cong N \bmod \underline{P}$), если модели $M\downarrow\Sigma_0$ и $N\downarrow\Sigma_0$ изоморфны как модели сигнатуры Σ_0.

Нетрудно видеть, что модели M и N изоморфны по модулю $\underline{P}$ тогда и только тогда, когда существует такая модель M' сигнатуры Σ, что M' равна M по модулю $\underline{P}$ и изоморфна N.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Модели сигнатуры Σ называются элементарно эквивалентными, $M \equiv N$, если на них выполняется одно и то же множество замкнутых формул.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Модели сигнатуры Σ называются элементарно эквивалентными по модулю $\underline{P}$ ($M \equiv N \bmod \underline{P}$), если модели $M\downarrow\Sigma_0$ и $N\downarrow\Sigma_0$ элементарно эквивалентны как модели сигнатуры Σ_0.

Введем понятие пересечения моделей по отношению к множеству предикатных символов $\underline{P}$. Пусть M и N - модели сигнатуры Σ и $M = N \bmod \underline{P}$. Тогда пересечение $M \cap N$ моделей M и N определяется следующим образом:

1) носитель $M \cap N$ равен носителю M;

2) $f^{M\cap N} = f^M = f^N$;

3) $R^{M\cap N} = R^M \cap R^N$

для любого функционального и предикатного символов f и R из Σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть T - теория. Будем говорить, что T обладает свойством $\underline{P}$-пересечения, если для любых двух моделей M и N теории T таких, что $M = N \bmod \underline{P}$, пересечение $M \cap N$ - модель теории T.

Класс теорий, обладающих свойством $\underline{P}$-пересечения, весьма широк. Например, любая логическая программа обладает свойством $\underline{P}$-пересечения относительно эрбрановских моделей, если $\underline{P}$ совпадает с множеством всех предикатных символов, входящих в эту логическую программу.

Теперь приведем пример теории T, которая обладает свойством $\underline{P}$-пересечения, но для которой теория $CWA_{\underline{P}}(T)$ несовместна. Для этого нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Говорят, что теория T полна по модулю $\underline{P}$ (или Σ_0-полна), если для любой замкнутой формулы F сигнатуры Σ_0 справедливо в точности одно из двух: либо $T \vdash F$, либо $T \vdash \sim F$. Теория T неполна по модулю $\underline{P}$ (или Σ_0-неполна), если существует замкнутая формула F сигнатуры Σ_0 такая, что F и $\sim F$ не выводимы из T.

Легко видеть, что если M и N - произвольные модели полной по модулю $\underline{P}$ теории, то $M \equiv N \bmod \underline{P}$.

Пусть T_0 - Σ_0 - неполная теория. Тогда существует замкнутая формула F сигнатуры Σ_0 такая, что F и $\sim F$ не выводимы из T. Предположим, что T_0 имеет модель мощности больше единицы. Пусть a, b - новые константные символы и P - унарный предикатный символ, не входящие в Σ_0. Тогда положим

$$T = T_0 \cup \{a \neq b\} \cup \{\forall x[(F \ \& \ x=a) \vee (\sim F \ \& \ x = b) \rightarrow P(x)]\}.$$

Очевидно, что T обладает свойством $\underline{P}$-пересечения, где $\underline{P} = \{P\}$. Нетрудно видеть, что из T выводима формула $P(a) \vee P(b)$, но не выводимы $P(a)$ и $P(b)$. Следовательно, формулы $P(a) \vee P(b)$ и

$\sim P(a)$ & $\sim P(b)$ выводимы из $CWA_{\underline{P}}(T)$. Таким образом, $CWA_{\underline{P}}(T)$ - противоречивая теория, а, как легко видеть, теория T непротиворечива. Пусть теперь все модели теории T_0 одноэлементные и P_1, P_2 - новые предикатные символы, не входящие в Σ_0. Тогда положим

$$T = T_0 \cup \{\forall x(F \,\&\, x = a \rightarrow P_1(x))\} \cup \{\forall x(\sim F \,\&\, x = a \rightarrow P_2(x))\}.$$

Тогда аналогично предыдущему теория T непротиворечива и обладает свойством $\underline{P}$-пересечения, а теория $CWA_{\underline{P}}(T)$ противоречива.

Далее под счетной моделью будем понимать модель, мощность которой не больше чем ω, где ω - первый бесконечный ординал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (Джагер [2]). Теория T называется слабо счетно категоричной по модулю $\underline{P}$, если T имеет счетную модель и любые две счетные модели теории T изоморфны по модулю $\underline{P}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что слабо категоричная по модулю $\underline{P}$ теория полна по модулю $\underline{P}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Теория T обладает свойством замкнутости области (DCP-свойством), если существуют такие основные термы $t_1,\ldots,t_n$, что $T \vdash \forall x(x = t_1 \vee \ldots \vee x = t_n)$.

Нетрудно видеть, что если теория T обладает DCP-свойством, то T слабо счетно категорична по модулю $\underline{P}$ тогда и только тогда, когда T полна по модулю $\underline{P}$.

Для дальнейшего нам потребуется определение $\underline{P}$-позитивной и $\underline{P}$-негативной формулы. Введем это понятие индукцией по сложности формулы.

1. Все формулы сигнатуры Σ_0 являются $\underline{P}$-позитивными и $\underline{P}$-негативными. Каждая формула вида $P(\bar{t})$, где $\bar{t}$ - набор термов и $P \in \underline{P}$, является $\underline{P}$-позитивной формулой.

2. Если F - $\underline{P}$-позитивная ($\underline{P}$-негативная) формула, то $\sim F$ - $\underline{P}$-негативная ($\underline{P}$-позитивная) формула.

3. Если F, G, $H(x)$ - $\underline{P}$-позитивные ($\underline{P}$-негативные) формулы, то формулы $F \& G$, $F \vee G$, $\forall x\, H(x)$ и $\exists x\, H(x)$ являются $\underline{P}$-позитивными ($\underline{P}$-негативными) формулами.

4. Если F - $\underline{P}$-позитивная ($\underline{P}$-негативная) и G - $\underline{P}$-негативная ($\underline{P}$-позитивная) формулы, то формула $F \to G$ является $\underline{P}$-негативной ($\underline{P}$-позитивной).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть M и N - модели сигнатуры Σ. Модель N называется P-расширением модели M, $M \leq_{\underline{P}} N$, если $M = N \bmod \underline{P}$ и $P^M \subseteq P^N$ для любого P из $\underline{P}$. Модель N называется собственным $\underline{P}$-расширением модели M, $M <_{\underline{P}} N$, если $M \leq_{\underline{P}} N$ и $P^M \subset P^N$ для некоторого P из $\underline{P}$.

Класс $\underline{P}$-позитивных формул примечателен тем, что $\underline{P}$-позитивные формулы устойчивы относительно $\underline{P}$-расширений, а именно справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть* M *и* N *- модели сигнатуры* Σ *и* $M \leq_{\underline{P}} N$. *Предположим, что* $F[\bar{x}]$ *-* $\underline{P}$*-позитивная и* $G[\bar{x}]$ *-* $\underline{P}$*-негативная формулы. Тогда для любого набора* $\bar{m}$ *элементов из* M *справедливы следующие утверждения:*

а) из истинности $F[\bar{m}]$ *на модели* M *следует истинность* $F[\bar{m}]$ *на* N,

б) из истинности $G[\bar{m}]$ *на модели* N *следует истинность* $G[\bar{m}]$ *на* M.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения очевидно и проводится индукцией по сложности формул $F[\bar{x}]$ и $G[\bar{x}]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть T_1 и T_2 - теории сигнатуры Σ и Γ - некоторое множество замкнутых формул. Тогда T_2 называется расширением T_1, если для любой замкнутой формулы F выполнимо следующее: из $T_1 \vdash F$ следует $T_2 \vdash F$. Теория T_2 называется консервативным расширением T_1 относительно множества замкнутых формул Γ, если T_2 является расширением T_1 и из $T_2 \vdash F$ следует $T_1 \vdash F$ для любой формулы F из Γ.

ТЕОРЕМА А (Джагер [2]). *Пусть* T *- такая теория сигнатуры* Σ, *что*

1) теория T *слабо счетно категорична по модулю* $\underline{P}$,

2) теория T *обладает свойством* $\underline{P}$*-пересечения.*

Тогда теория $CWA_{\underline{P}}(T)$ *является консервативным расширением теории* T *для класса* $\underline{P}$*-позитивных, основных формул.*

СЛЕДСТВИЕ А (Джагер [2]). *Пусть* T *- теория сигнатуры* Σ. *Предположим, что* T *слабо счетно категорична по модулю* $\underline{P}$ *и обладает свойством* $\underline{P}$*-пересечения. Тогда теория* $CWA_{\underline{P}}(T)$ *непротиворечива.*

Теперь покажем, что теорема А и следствие А остаются справедливыми, если в теореме А условие слабо счетной категоричности по модулю $\underline{P}$ заменить условием полноты теории T по модулю $\underline{P}$. Для доказательства этого факта напомним некоторые определения.

Пусть I - некоторое непустое множество. Тогда семейство D подмножеств множества I называется фильтром над I, если выполняются следующие условия:

1) $\emptyset \notin D$, $I \in D$,

2) если $X,Y \in D$, то $X \cap Y \in D$,

3) если $X \in D$ и $X \subset Y \subset I$, то $Y \in D$.

Фильтр D над I называется главным, если $D = \{X \subset I | Y \subset X$ для некоторого непустого подмножества Y из $I\}$. Фильтр D над I называется счетно неполным (ω_1-неполным), если существует такое счетное множество $E \subset D$, что $\bigcap_{X \in E} X \notin D$. Очевидно, что счетно неполный фильтр не является главным. Фильтр D над I называется ультрафильтром, если для любого $X \subset I$ либо $X \in D$, либо $I \setminus X \in D$. Хорошо известно, что для любого бесконечного множества I существует счетно неполный ультрафильтр над I. Пусть $\{U_i : i \in I\}$ - семейство моделей сигнатуры Σ и пусть D - фильтр над I. Тогда через $\Pi_D U_i$ обозначим фильтрованное произведение $\{U_i : i \in I\}$ по модулю D. Для фильтрованных произведений справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Пусть* $\{U_i : i \in I\}$ *- семейство моделей сигнатуры* Σ, $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ *и* D *- фильтр над* I. *Тогда имеет место равенство* $\Pi_D(U_i \downarrow \Sigma_1) = (\Pi_D U_i)\downarrow \Sigma_1$.

Пусть M - модель сигнатуры Σ, A - носитель M и $X \subseteq A$. Тогда через M_X обозначим простое обогащение модели M. Модель M называется ω_1-насыщенной, если для каждого счетного подмножества X множества A всякое совместное с теорией $Th(M_X)$ множество формул $\Gamma(x)$ (обогащенной сигнатуры Σ_X) от одной свободной переменной реализуется в модели M_X, т.е. существует такой элемент a из A, что для любой формулы $F[x] \in \Gamma(x)$ в M_X истинна $F[a]$.

ТЕОРЕМА (Ершова, Кейслера). *Пусть* $\{U_i : i \in I\}$ *- семейство моделей сигнатуры* Σ *и* D *- счетно неполный ультрафильтр над* I. *Тогда ультрапроизведение* $\Pi_D U_i$ *является* ω_1*-насыщенным.*

Теперь сформулируем основную теорему данной работы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* T *- теория сигнатуры* Σ *и* Γ *- некоторое множество замкнутых* $\underline{P}$*-позитивных формул. Предположим, что теория* T *удовлетворяет следующим условиям:*

1) теория T *полна по модулю* $\underline{P}$,

2) теория T *обладает свойством* $\underline{P}$*-пересечения.*

Тогда теория $CWA_\Gamma(T)$ *является консервативным расширением* T *для класса* $\underline{P}$*-позитивных, замкнутых формул.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что существует такая $\underline{P}$-позитивная замкнутая формула F, что $CWA_{\Gamma}(T) \vdash F$, но F не выводима из Т. Тогда найдется конечное множество $S = \{\sim F_1, \ldots, \sim F_n\}$ отрицаний формул из множества Г такое, что

$$T \cup S \vdash F. \qquad (*)$$

По определению $CWA_{\Gamma}(T)$ формула F_i не выводима из Т для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть М - такая модель теории Т, что формула $\sim F$ истинна в М. По теореме Левенгейма-Скулема можно считать, что М - счетная модель. Аналогично для каждой формулы $\sim F_i$ из S существует такая счетная модель N_{F_i} теории Т, что формула $\sim F_i$ истинна в N_{F_i}. Предположим, что конечна одна из моделей М, N_{F_i}, $i = 1, \ldots, n$. Тогда в силу полноты теории Т по модулю $\underline{P}$ все эти модели конечны. Так как конечные элементарно эквивалентные модели изоморфны (см. [4, с. 48]), то модели М и N_{F_i}, где $i = 1, \ldots, n$, изоморфны по модулю $\underline{P}$. Следовательно, для каждого i, $1 \leq i \leq n$, существует такая модель M_{F_i} сигнатуры Σ, что $M = M_{F_i} \bmod \underline{P}$ и модели N_{F_i} и M_{F_i} изоморфны. Пусть $M' = M \cap (\bigcap_{i=1}^{n} M_{F_i})$. Тогда в силу условия 2 M' является моделью теории T. Так как модели M и M_{F_i} являются $\underline{P}$-расширениями модели M', а $\sim F$ и $\sim F_i$ являются $\underline{P}$-негативными формулами, то по предложению 1 формулы $\sim F$ и $\sim F_i$ истинна в M' для всех $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, M' - модель для $T \cup S$, но ввиду (*) формула F истинна в M'. Получили противоречие с тем, что F не выводима из Т. Таким образом, $T \vdash F$.

Пусть теперь $M, N_{F_1}, \ldots, N_{F_n}$ - счетные бесконечные модели и пусть I - счетное множество. Обозначим через D счетно неполный ультрафильтр над I и положим $\overline{M} = \Pi_D M$, $\overline{N}_{F_i} = \Pi_D N_{F_i}$ – ультрастепени моделей M и N_{F_i} соответственно. В силу теоремы Ершова, Кейслера $\overline{M}$, $\overline{N}_{F_i}$ – ω_1-насыщенные модели. По теореме о мощности ультрапроизведения (см., например, [5, теорема 8.9, с. 135]) получаем, что мощность моделей равна ω_1. Поскольку любая модель элементарно эквивалентна своей ультрастепени и модели M и N_{F_i} элементарно эквивалентны по модулю $\underline{P}$, то в силу сделанного выше утверждения получаем, что модели $\overline{M}$ и $\overline{N}_{F_i}$ элементарно эквивалентны по модулю $\underline{P}$. Очевидно, что модели $\overline{M}\!\downarrow\!\Sigma_0$ и $\overline{N}_{F_i}\!\downarrow\!\Sigma_0$ являются ω_1-насыщенными. Поэтому модели $\overline{M}\!\downarrow\!\Sigma_0$ и $\overline{N}_{F_i}\!\downarrow\!\Sigma_0$ изоморфны (см. [5, с.138]), т.е. модели $\overline{M}$ и $\overline{N}_{F_i}$ изоморфны по модулю $\underline{P}$. Но тогда для любого i, $1 \le i \le n$, существует модель $\overline{M}_{F_i}$, равная M по модулю $\underline{P}$ и изоморфная $\overline{N}_{F_i}$. Пусть $M' = \overline{M} \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \overline{M}_{F_i})$. Тогда, повторяя рассуждения, приведенные выше, получим, что на M' истинны формулы F и $\sim F$. Полученное противоречие показывает, что формула F выводима из T. Таким образом, теория $CWA_\Gamma(T)$ является консервативным расширением теории T.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть* T – *теория сигнатуры* Σ *и* Γ – *некоторое множество* $\underline{P}$-*позитивных, замкнутых формул. Предположим, что теория* T *полна по модулю* $\underline{P}$ *и обладает свойством* $\underline{P}$-*пересечения. Тогда теория* $CWA_\Gamma(T)$ *непротиворечива.*

Так как слабо счетно категоричная по модулю $\underline{P}$ теория является полной по модулю $\underline{P}$, то теорема А и следствие А вытекают из теоремы 1 и следствия 1.

Используя результаты, полученные выше, исследуем вопрос совместности CWA-правила для индуктивных баз данных. Для этого сначала напомним определение П-формулы и Σ-формулы. Индукцией по сложности формулы полагаем, что

1) всякая QF-формула является одновременно и П-формулой, и Σ-формулой;

2) если F является П-формулой (Σ-формулой), то $\sim F$ является Σ-формулой (П-формулой);

3) если F и G являются П-формулами (Σ-формулами), то $F \& G$, $F \vee G$ – П-формулы (Σ-формулы);

4) если F - П-формула (Σ-формула) и G - Σ-формула (П-формула), то $F \rightarrow G$ - Σ-формула (П-формула);

5) если F - П-формула, то $\forall x\, F$ является П-формулой;

6) если F - Σ-формула, то $\exists x\, F$ является Σ-формулой.

Хорошо известно, что для П-формул и Σ-формул справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть* M *- подмодель модели* N *и* $F[\bar{x}]$ *- П-формула, а* $G[\bar{x}]$ *-* Σ*-формула. Тогда для любого набора элементов* $\bar{m}$ *из* M

1) если $F[\bar{m}]$ *истинна в* M*, то* $F[\bar{m}]$ *истинна в* N*;*

2) если $G[\bar{m}]$ *истинна в* N*, то* $G[\bar{m}]$ *истинна в* M.

Пусть T - теория. Тогда через $T^-(\underline{P})$ обозначим множество формул из T, не содержащих предикатных символов из $\underline{P}$, и положим $T^+(\underline{P}) = T \setminus T^-(\underline{P})$. Ясно, что $T = T^+(\underline{P}) \cup T^-(\underline{P})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Непустая совокупность T замкнутых формул сигнатуры Σ называется индуктивной базой данных для $P=\{P_1,\dots$ $\dots,P_n\}$, если каждая формула из $T^+(\underline{P})$ имеет один из следующих видов:

(i) $\forall \bar{x}(F[\bar{x}] \rightarrow P_i(\bar{x}))$;

(ii) $B(\underline{P})$.

где $F[\bar{x}]$ - $\underline{P}$-позитивная формула, а формула $B(\underline{P})$ содержит только предикатные символы из $\underline{P}$ и является $\underline{P}$-негативной. Индуктивная база данных для $\underline{P}$ называется Σ-индуктивной, если формулы $F[\bar{x}]$ в (i) являются Σ-формулами и формулы $B(P)$ в (ii) являются П-формулами.

ЛЕММА 1. *Всякая индуктивная база данных* T *для* $\underline{P}$ *обладает свойством* $\underline{P}$*-пересечения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M и N - такие модели теории T, что $M \equiv N \bmod \underline{P}$. Рассмотрим модель $M \cap N$.Очевидно,что $M \cap N \leq_{\underline{P}} M$, $M \cap N \leq_{\underline{P}} N$ и формулы из $T^-(\underline{P})$ истины в $M \cap N$. В силу предложения 1 любая формула вида $B(P)$ из $T^+(\underline{P})$ истинна в $M \cap N$. Пусть формула из $T^+(\underline{P})$ имеет следующий вид:$\forall\bar{x}(F[\bar{x}] \to P_i(\bar{x}))$ и пусть $\bar{m}$ - набор элементов из $M \cap N$. Предположим, что $F[\bar{m}]$ истинна в $M \cap N$. Так как $F[\bar{x}]$ - $\underline{P}$-позитивная формула,то $F[\bar{m}]$ истинна в M и N. Следовательно, $P_i(\bar{m})$ истинна в M и N и поэтому в $M \cap N$. Таким образом, формула $\forall\bar{x}(F[\bar{x}] \to P_i(\bar{x}))$ истинна в модели $M \cap N$. Поэтому $M \cap N$ - модель для T.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* T *- теория сигнатуры* Σ *и* Γ *- некоторое множество замкнутых* $\underline{P}$*-позитивных формул. Предположим, что теория* T *удовлетворяет следующим условиям:*

1) теория T *полна по модулю* $\underline{P}$*;*

2) теория T *является индуктивной базой данных для* $\underline{P}$*.*

Тогда теория $CWA_\Gamma(T)$ *является консервативным расширением* T *для класса* $\underline{P}$*-позитивных,замкнутых формул.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 1 и теоремы 1.

Из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* T *- теория сигнатуры* Σ *и* Γ *- некоторое множество замкнутых* $\underline{P}$*-позитивных формул.Предположим,что теория* T *удовлетворяет следующим условиям:*

1) теория T *слабо счетно категорична по модулю* $\underline{P}$;

2) теория T *является индуктивной базой данных для* $\underline{P}$.

Тогда теория $CWA_\Gamma(T)$ *является консервативным расширением* T *для класса* $\underline{P}$*-позитивных, замкнутых формул.*

Из теоремы 2 и теоремы 3 получаем следующие два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть* T *– теория сигнатуры* Σ *и* Γ*– некоторое множество замкнутых* $\underline{P}$*-позитивных формул. Предположим, что теория* T *полна по модулю* $\underline{P}$ *и является индуктивной базой данных для* $\underline{P}$*. Тогда теория* $CWA_\Gamma(T)$ *непротиворечива.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть* T *– теория сигнатуры* Σ*. Предположим, что* T *слабо счетно категорична по модулю* $\underline{P}$ *и является индуктивной базой данных для* $\underline{P}$*. Тогда теория* $CWA_{\underline{P}}(T)$ *непротиворечива.*

Пусть T – индуктивная база данных для $\underline{P}$. Тогда для каждого предиката P_i из $\underline{P}$ обозначим через K_i множество таких формул $F[\bar{x}]$, что формула $\forall\bar{x}(F[\bar{x}] \to P_i(\bar{x}))$ принадлежит T, и положим $G_i[\bar{x}] = \bigvee_{F\in K_i} F[\bar{x}]$. Пусть M - модель сигнатуры Σ. Тогда для каждого ординала α построим такую модель M_α, что $M = M_\alpha \bmod P$, и если $\alpha < \beta$, то $M_\alpha \leq_{\underline{P}} M_\beta$. Если $\alpha = 0$, то положим $M_0 = M \bmod \underline{P}$ и $P_i^M = \emptyset$ для любого $P_i \in P$. Если теперь ординал α предельный, то положим $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$. Пусть теперь ординал α непредельный. Тогда модель M_α определяется следующим образом. Носитель M_α равен носителю M, $R^{M_\alpha} = R^M$ для всех $R \in \Sigma_0$ и для предикатного символа P_i из $\underline{P}$ арности n полагаем

$$P_i^M\alpha = \begin{cases} \{\langle m_1,\dots,m_n\rangle\} \mid G[m_1,\dots,m_n] \text{ истинна в } M_{\alpha-1}, \\ \text{если } K_i \neq \emptyset, \\ M^n, \text{ если } K_i = \emptyset. \end{cases}$$

Покажем, что $M_\alpha \leq_{\underline{P}} M_\beta$ для любого ординала $\beta > \alpha$. Можно считать, что β - непредельный ординал. Если $\alpha = 0$, то все ясно. Пусть $\alpha > 0$ и для всех ординалов $\gamma < \alpha$ имеем $M_\gamma \leq_{\underline{P}} M_\beta$ для любого ординала $\beta > \gamma$. Если α - предельный ординал, то $M_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} M_\gamma$. В силу сделанного предположения $M_\gamma \leq_P M_\beta$. Поэтому $M_\alpha \leq_{\underline{P}} M_\beta$. Предположим, что ординал α не предельный и $\overline{m} \in P_i^M\alpha$, где $\overline{m}$ - некоторый набор элементов из M. Тогда по определению M_α получаем, что $G_i[\overline{m}]$ истинна в $M_{\alpha-1}$. Так как ординал β непредельный, то $\alpha-1 < \beta-1$. В силу сделанного предположения $M_{\alpha-1} \leq_{\underline{P}} M_{\beta-1}$ и ввиду $\underline{P}$-позитивности формулы $G_i[\overline{x}]$ по предложению 1 получаем, что $G_i[\overline{m}]$ истинна в $M_{\beta-1}$. Следовательно, $\overline{m} \in P_i^M\beta$. Таким образом, показано, что $M_\alpha \leq_{\underline{P}} M_\beta$. Поэтому существует такой ординал γ, на котором цепочка моделей M_α стабилизируется. Обозначим модель M_γ через $IND_{\underline{P}}(M,T)$.

Пусть теперь M и N - модели теории T, причем $M = N \bmod \underline{P}$. Тогда трансфинитной индукцией по ординалу α нетрудно показать, что для любого P_i из $\underline{P}$ имеет место включение $P_i^M\alpha \subseteq P_i^N$. Поэтому $IND_{\underline{P}}(M,T) \leq_{\underline{P}} N$. Ясно, что формулы из T вида $B(\underline{P})$ истинны в M и поэтому по предложению 1 истинны в $IND_{\underline{P}}(M,T)$. Очевидно, что формулы из T вида $\forall\overline{x}(F[\overline{x}] \to P_i(\overline{x}))$ истинны в $IND_{\underline{P}}(M,T)$. Следовательно, $IND_{\underline{P}}(M,T)$ - модель теории T. Таким образом (см. также [2]), справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть* T *- индуктивная база данных для* $\underline{P}$ *и* M *- модель теории* T. *Тогда существует модель* $IND_{\underline{P}}(M,T)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) $M = IND_{\underline{P}}(M,T) \bmod \underline{P}$;

2) $IND_{\underline{P}}(M,T)$ – модель теории T;

3) если N - модель теории T и $M = N \bmod \underline{P}$, то $IND_{\underline{P}}(M,T) \leq_{\underline{P}} N$.

ЛЕММА 2. *Пусть* M *- модель сигнатуры* Σ *и* T *- индуктивная база данных для* $\underline{P}$. *Предположим, что* D *- ультрафильтр над* I. *Тогда* $IND_{\underline{P}}(\Pi_D M,T) = \Pi_D IND_{\underline{P}}(M,T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для модели M и построенной из M модели M_α выполнимо равенство $(\Pi_D M)_\alpha = \Pi_D M_\alpha$, где $(\Pi_D M)_\alpha$ - модель, построенная из $\Pi_D M$. Действительно, пусть $\alpha = 1$ и $P_i \in \underline{P}$. Предположим $\overline{f}_D \in P_i^{(\Pi_D M)_\alpha}$ для некоторого набора элементов из $(\Pi_D M)_\alpha$. Тогда в силу определения интерпретации предиката P_i в модели $(\Pi_D M)_\alpha$ получаем, что $G_i[\overline{f}_D]$ истинна в $(\Pi_D M)_o$. Следовательно, $\{j | G_i[\overline{f}(j)]$ истинна в $M_o\} \in D$. Но тогда $\{j | P_i[\overline{f}(j)]$ истинна в $M_\alpha\} \in D$. Поэтому $P_i(\overline{f}_D)$ истинна в $\Pi_D M_\alpha$.

Пусть теперь $\alpha > 1$, $\overline{f}_D \in P_i^{(\Pi_D M)_\alpha}$ и для всех $\beta < \alpha$ выполнимо равенство $(\Pi_D M)_\beta = \Pi_D M_\beta$. Тогда если α - предельный ординал, то $\overline{f}_D \in P_i^{(\Pi_D M_\beta)}$ для некоторого ординала $\beta < \alpha$. Следовательно, $\overline{f}_D \in P_i^{(\Pi_D M)_\beta}$, и поэтому $\{j | P_i[\overline{f}(j)]$ истинна в $M_\beta\} \in D$. Так как модель M_α является $\underline{P}$-расширением M_β, то $\{j | P_i[\overline{f}(j)]$ истинна в $M_\alpha\} \in D$. Отсюда получаем, что

$\overline{f}_D \in P_i^{(\Pi_D M_\alpha)}$. Если ординал α непредельный, то $G_i[\overline{f}_D]$ истинна в $(\Pi_D M)_{\alpha-1}$. В силу предположения, сделанного выше, получаем, что $G_i[\overline{f}_D]$ истинна в $\Pi_D M_{\alpha-1}$. Поэтому $\{j \mid G_i[\overline{f}(j)]$ истинна в $M_{\alpha-1}\} \in D$. Но тогда $\{j \mid P_i[\overline{f}(j)]$ истинна в $M_\alpha\} \in$ $\in D$, т.е. $\overline{f}_D \in P_i^{(\Pi_D M_\alpha)}$. Таким образом, получаем, что $(\Pi_D M)_\alpha \subseteq \Pi_D M_\alpha$. Обратное включение доказывается аналогично.

ЛЕММА 3. *Пусть* T *- индуктивная база данных для* $\underline{P}$ *и пусть* M, N *- счетные модели теории* T. *Тогда если* $M \equiv N \bmod \underline{P}$, *то* $IND_{\underline{P}}(M,T) \equiv IND_{\underline{P}}(N,T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что одна из моделей M или N конечна. Тогда в силу $M \equiv N \bmod \underline{P}$ обе эти модели конечны. Так как конечные элементарно эквивалентные модели изоморфны (см. [4, с. 48]), то модели M и N изоморфны по модулю $\underline{P}$. Поэтому нетрудно заметить, что модели $IND_{\underline{P}}(M,T)$ и $IND_{\underline{P}}(N,T)$ изоморфны (см. также [2]). Следовательно, $IND_{\underline{P}}(M,T) \equiv IND_{\underline{P}}(N,T)$.

Пусть теперь модели M и N бесконечны. Предположим, что I - счетное множество и D - счетно неполный ультрафильтр над I. Тогда положим $\overline{M} = \Pi_D M$ и $\overline{N} = \Pi_D N$ - ультрастепени моделей M и N.

По теореме Ершова, Кейслера $\overline{M}$ и $\overline{N}$ являются ω_1-насыщенными моделями. Следовательно, модели $\overline{M}{\downarrow}\Sigma_0$ и $\overline{N}{\downarrow}\Sigma_0$ также ω_1-насыщенны. Поскольку $\overline{M} \equiv \overline{N} \bmod \underline{P}$ и мощность моделей $\overline{M}{\downarrow}\Sigma_0$, $\overline{N}{\downarrow}\Sigma_0$ равна ω_1, то модели $\overline{M}$ и $\overline{N}$ изоморфны по модулю $\underline{P}$. Поэтому опять модели $IND_{\underline{P}}(\overline{M},T)$ и $IND_{\underline{P}}(\overline{N},T)$ изоморфны. Следовательно, $IND_{\underline{P}}(\overline{M},T) \equiv$

$\equiv IND_{\underline{P}}(\bar{N},T)$. Но тогда, по лемме 2, $\Pi_D IND_{\underline{P}}(M,T) \equiv \Pi_D IND_{\underline{P}}(N,T)$. Так как всякая модель элементарно эквивалентна своей ультрастепени, то получаем, что $IND_{\underline{P}}(M,T) \equiv IND_{\underline{P}}(N,T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Модель М теории Т называется $\underline{P}$-минимальной, если не существует модели N теории Т такой, что $N <_{\underline{P}} M$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* T *- индуктивная база данных для* $\underline{P}$ *и* Г *- множество* $\underline{P}$*-позитивных, замкнутых формул. Предположим, что* T *полна по модулю* $\underline{P}$ *и* M *- счетная модель теории* T. *Тогда* $IND_{\underline{P}}(M,T)$ *является* $\underline{P}$*-минимальной моделью теории* $CWA_Г(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3, $IND_{\underline{P}}(M,T)$ является моделью теории T. Пусть теперь $\sim A$ - формула из $CWA_Г(T) \setminus T$. Тогда по определению $CWA_Г(T)$ формула A не выводима из T. Следовательно, существует такая модель N теории T, что в N истинна $\sim A$. Так как T полна по модулю $\underline{P}$, то по лемме 3 получаем, что $IND_{\underline{P}}(M,T) \equiv IND_{\underline{P}}(N,T)$. Поскольку $\sim A$ - $\underline{P}$-негативная формула, то в силу предложения 3 и предложения 1 получаем, что $\sim A$ истинна в $IND_{\underline{P}}(M,T)$. Следовательно, $IND_{\underline{P}}(M,T)$ - модель теории $CWA_Г(T)$, а, по предложению 3, $IND_{\underline{P}}(M,T)$ является моделью теории $CWA_Г(T)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть* T *- индуктивная база данных для* $\underline{P}$. *Предположим, что* T *слабо счетно категорична* $\underline{P}$ *по модулю* $\underline{P}$ *и* M *- счетная модель теории* T. *Тогда* $IND_{\underline{P}}(M,T)$ *является* $\underline{P}$*-минимальной моделью теории* $CWA_{\underline{P}}(T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть T - теория сигнатуры Σ и M - счетная модель теории T. Тогда M называется слабо счетно простой по модулю $\underline{P}$, если для любой модели N теории T существует подмодель N' модели N такая, что $M \equiv N \bmod \underline{P}$.

ЛЕММА 4. *Пусть* T *- Σ-индуктивная база данных для* $\underline{P}$, Γ *- некоторое множество* P*-позитивных Σ-формул и* M *- слабо счетно простая по модулю* $\underline{P}$ *модель теории* T. *Тогда* $IND_{\underline{P}}(M,T)$ *- модель теории* $CWA_{\Gamma}(T)$. *В частности,* $IND_{\underline{P}}(M,T)$ *- модель теории* $CWA_{\underline{P}}(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sim A$ - формула из $CWA_{\Gamma}(T) \setminus T$. Тогда в силу определения $CWA_{\Gamma}(T)$ формула $\sim A$ не выводима из T. Следовательно, существует модель N теории T такая, что $\sim A$ истинна в N. Так как M - слабо счетно простая по модулю $\underline{P}$-модель, то $M \equiv N' \bmod \underline{P}$ для некоторой подмодели N' модели N. Поэтому множество формул $T^{-}(\underline{P})$ истинно в N'. Так как $T_{+}(\underline{P}) \cup \{\sim A\}$ - множество П-формул, то, по предложению 2, N' - модель теории $T_{+}(P) \cup \{\sim A\}$. Таким образом, N' - модель для $T \cup \{\sim A\}$. Тогда, в силу предложения 3 и леммы 3, получаем, что $IND_{\underline{P}}(M,T)$ - модель теории $T \cup \{\sim A\}$. Поэтому $IND_{\underline{P}}(M,T)$ - модель теории $CWA_{\Gamma}(T)$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* T *- Σ-индуктивная база данных для* $\underline{P}$ *и* Γ *- некоторое множество* $\underline{P}$*-позитивных замкнутых Σ-формул. Предположим, что* T *имеет слабо счетно простую по модулю* $\underline{P}$*-модель. Тогда теория* $CWA_{\Gamma}(T)$ *является консервативным расширением* T *для множества всех* $\underline{P}$*-позитивных, замкнутых Σ-формул. В частности,* $CWA_{\underline{P}}(T)$ *- совместная теория.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - P-позитивная замкнутая Σ-формула, выводимая из $CWA_{\Gamma}(T)$, но не выводимая из T. Тогда существует модель N теории T такая, что $\sim F$ истинна в N. Предположим, что M - слабо счетно простая по модулю $\underline{P}$-модель теории T. Тогда существует такая подмодель N' модели N, что $M \equiv N' \bmod \underline{P}$. Поэтому, в силу леммы 3, получаем, что

$IND_{\underline{P}}(M,T) \equiv IND_{\underline{P}}(N',T)$. Так как формула $\sim F$ является П-формулой, то, по предложению 2, $\sim F$ истинна в N', а, ввиду предложения 3, $\sim F$ истинна на $IND_{\underline{P}}(N',T)$. Следовательно, формула $\sim F$ истинна на $IND_{\underline{P}}(M,T)$. Но, по лемме 4, $IND_{\underline{P}}(M,T)$ – модель для $CWA_{\Gamma}(T)$, поэтому F истинна на $IND_{\underline{P}}(M\ T)$. Полученное противоречие говорит о том, что формула F выводима из T.

Литература

1. REITER R. On Closed World Data Base //Logic and Databases, Plenum. - New York, 1978.

2. JAGER G. Annotation on the Consistesy of the Closed World Assumption //J.Logic Programming. - 1990. - N 8.-P.201-228.

3. GENESERETH M.R. and NILSON N.J. Logical Foundations of Artificial Intelegence. - Calif., 1987.

Поступила в ред.-изд.отд.
8 августа 1993 года