ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИНФОРМАТИКЕ
Вычислительные системы
1993 год Выпуск 148

УДК 518.3

ОПЕРАТОРЫ ПЕРЕЧИСЛИМОСТИ И КОНЕЧНЫЕ НЕУДАЧИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

А.А.Усманов, В.Н.Желябин

Фиттинг [1], обсуждая теоретические основы модульности логического программирования, предложил рассматривать логическую программу (хорновскую программу) как оператор перечислимости. Это позволило строить сложные логические программы из более простых логических программ (модулей) путем применения к последним операций композиции, минимизации, пересечения и объединения (см. [1]). Аналогичный подход был рассмотрен в работе [2], в которой логическая программа рассматривалась как функция, заданная на множестве эрбрановских интерпретаций со значениями в множестве эрбрановских интерпретаций.

Сначала напомним некоторые необходимые понятия. Пусть T, S - произвольные множества и Φ - оператор из 2^T в 2^S, т.е. Φ - некоторое отображение, заданное на множестве подмножеств множества T со значениями в множестве подмножеств множества S. Оператор Φ называется монотонным, если из $I \subseteq J \subseteq T$ следует, что $\Phi(I) \subseteq \Phi(J)$. Оператор Φ называется компактным, если из $n \in \Phi(I)$ следует $n \in \Phi(F)$ для некоторого конечного множества F из I. Хорошо известно, что для монотонного оператора $\Phi: 2^T \to 2^T$ существует наименьшая неподвижная точка $\mathrm{lfp}(\Phi)$, и если Φ компактный, то $\mathrm{lfp}(\Phi) = \bigcup_{n=1} \Phi^n(\emptyset)$. Очевидно, что понятие монотонного и компактного оператора можно распространить на операторы от большего числа аргументов.

Рассмотрим монотонный, компактный оператор $\Phi: 2^T \times 2^T \to 2^T$. Зафиксируем множество P из T и определим оператор $\Phi_P(I) = \Phi(I,P)$. Так как Φ монотонный и компактный, то Φ_P имеет наименьшую неподвижную точку $\mathrm{lfp}(\Phi_P)$. Теперь рассмотрим оператор $\Psi : 2^T \to 2^T$, заданный по правилу $\Psi(P) = \mathrm{lfp}(\Phi_P)$. Нетрудно показать, что Ψ - монотонный, компактный оператор. Также говорят, что Ψ получен из Φ применением к последнему операции минимизации по первому аргументу, и обозначают $\Psi = \mu_1\Phi$.

Пусть теперь ω - множество натуральных чисел, $c(x,y) = \frac{1}{2}[(x+y)^2 + 3x + y]$ - функция спаривания, отображающая $\omega \times \omega$ на ω. Пусть D - функция, кодирующая конечные множества из ω, т.е. если F - конечное множество из ω, то $D(F) = \sum_{n \in F} 2^n$. Для подмножества R из ω определим оператор Φ_R из 2^ω в 2^ω, полагая

$$\Phi_R(S) = \{n: \text{существует конечное множество } F \subseteq S \text{ такое, что } c(D(F),n) \in R\}$$

для любого подмножества $S \subseteq \omega$. Ясно, что Φ_R - монотонный, компактный оператор. Нетрудно показать, что любой монотонный, компактный оператор из 2^ω в 2^ω можно задать вышеуказанным способом. Оператор Φ_R называется оператором перечисления (или перечислимости), если R является рекурсивно перечислимым множеством.

Пусть Σ - конечная сигнатура, содержащая по крайней мере одну константу. Обозначим через U эрбрановский универсум над Σ. В этой статье под логической программой понимается множество хорновских предложений сигнатуры Σ, которые не содержат символа равенства. Под целевым утверждением (целью)

G понимается выражение вида $\leftarrow A_1,\ldots,A_n$, где $A_1,\ldots$ $\ldots, A_n$ - атомные формулы. Под множеством конечных F_P неудач логической программы P будем понимать множество таких атомов A, что $P \cup \{\leftarrow A\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево.

Пусть P - логическая программа, B_P - ее эрбрановский базис. Обозначим через P^* множество основных примеров логических предложений из P и определим оператор T_P: $2^{B_P} \to$ $\to 2^{B_P}$ для множества I из B_P, полагая $T_P(I) =$ $= \{A \in B_P : A \leftarrow A_1,\ldots,A_n \in P^*$ и $\{A_1,\ldots, A_n\} \subseteq I\}$.

Пусть P - логическая программа. Заменим каждую атомную формулу $p(t_1,\ldots, t_n)$, входящую в P, формулой вида $p'(f_p(t_1,\ldots, t_n))$, где p' и f_p - новые предикат - ный и функциональный символы. Полученную таким образом про - грамму обозначим через P'. Нетрудно показать, что $p(t_1,\ldots, t_n) \in M_P$ тогда и только тогда, когда $p'(f_p(t_1,\ldots, t_n)) \in M_{P'}$, где M_P $(M_{P'})$ - наименьшая эрбрановская модель программы P (P'). Аналогичное утверждение верно и для множеств конечных неудач программ P и P'. Поэтому не теряя общности будем считать, что все рассматриваемые здесь логические программы содержат только одноместные предикатные символы.

Пусть P - логическая программа и

$$
\begin{array}{l}
p(t_1) \leftarrow A_{11},\ldots, A_{n_1 1} \\
p(t_2) \leftarrow A_{12},\ldots, A_{n_2 2} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
p(t_k) \leftarrow A_{1k},\ldots, A_{n_k k}
\end{array}
$$

- определение предиката p в программе P. Тогда преобразуем это определение в следующую формулу: $\forall x(p(x) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{k} E_i)$, где каждое $E_i = \exists \bar{y}(x=t_i \;\&\; (\mathop{\&}_{j=1}^{n_k} A_{ij}))$, x - новая переменная, не входящая в программу P, и $\bar{y}$ - набор переменных, входящих в i-е определение предиката p. Обозначим полученную формулу через $\bar{p}$. Для логической программы P определим $\mathrm{Comp}(P)$ как совокупность формул $\bar{p}$ и формул $\forall x(\sim r(x))$, если предикат r входит только в правую часть определения предикатов в программе P. Как известно (см., например, [2]), $A \in F_P$ тогда и только тогда, когда $\sim A$ логически следует из $\mathrm{Comp}(P)$.

Пусть P - логическая программа сигнатуры Σ. Пусть $I_1, \ldots, I_n$ - одноместные предикатные символы, не входящие в заголовки логических процедур из P. Будем называть $I_1, \ldots, I_n$ входами программы P. Пусть 0 - другой одноместный предикатный символ, называемый выходом программы P. Рассмотрим оператор $[P_0^{I_1,\ldots,I_n}]: (2^U)^n \to 2^U$, заданный по правилу:

$$[P_0^{I_1,\ldots,I_n}](S_1,\ldots,S_n) =$$

$$= \{t \in U:\ P \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \{I_i(s):\ s \in S_i\}) \to O(t)\}$$

для любых подмножеств $S_1, \ldots, S_n$ из U. Ясно, что $[P_0^{I_1,\ldots,I_n}]$ - монотонный компактный оператор. Пусть γ - гёделевская нумерация эрбрановского универсума U. Тогда, используя γ, по оператору $[P_0^I]$, где P - логическая программа с входом I и выходом 0, можно определить оператор $\Phi: 2^{\omega} \to 2^{\omega}$, который, как нетрудно видеть, будет оператором перечисления. Такая интерпретация логической программы как оператора перечисления была дана Фиттингом [1]. Им также было доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Класс операторов вида Φ_R для рекурсивно перечислимых множеств R совпадает с классом операторов вида $[P_0^I]$ для логических программ P.*

Представление логической программы в виде оператора позволяет производить над программами операции суперпозиции ($\circ$), минимизации (μ), пересечения ($\cup$), объединения ($\cap$) и декартова произведения.

Пусть P, Q - логические программы с входами I, J и выходами O_1, O_2 соответственно. Тогда программа $P \circ Q$ состоит из следующих аксиом P, Q, $I(x) \leftarrow O_2(x)$ и имеет вход J и выход O_1.

Пусть P - логическая программа с входами I, J и выходом 0. Тогда операция минимизации μ_I программы P по входу I определяется следующим образом: $\mu_I P = \mu_1[P_0^{I,J}]$. Полученная таким образом программа состоит из аксиом P и $I(x) \leftarrow O(x)$.

Пусть P, Q - логические программы, $I_1, \ldots, I_n$ и $J_1, \ldots, J_n$ - входы программ P и Q соответственно, а O_1, O_2 - их выходы. Тогда программа $P \cap Q$ состоит из следующих аксиом:

$$
\begin{array}{l}
P \\
Q \\
I_1(x) \leftarrow K_1(x) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
I_n(x) \leftarrow K_n(x)
\end{array}
$$

$$J_1(x) \leftarrow K_1(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$J_n(x) \leftarrow K_n(x)$$
$$O(x) \leftarrow O_1(x), O_2(x),$$

где $K_1, \ldots, K_n$ и 0 - новые предикатные символы, а программа $P \cup Q$ имеет те же аксиомы, что и $P \cap Q$ за исключением последней, которая заменяется на аксиомы $O(y) \leftarrow O_1(y)$ и $O(y) \leftarrow O_2(y)$.

В настоящей работе обсуждаются вопросы представления конечных неудач логических программ операторами перечисления. Показывается, что множество таких операторов замкнуто относительно операции суперпозиции ($\circ$), минимизации (μ), пересечения ($\cap$), объединения ($\cup$). По всей видимости, подобный подход к описанию конечных неудач логических программ является другой версией трансформационного подхода к отрицанию в логическом программировании, предложенного в [4].

В данной статье авторы придерживаются терминологии из работ [1,3]. Напомним некоторые определения. Терм t сигнатуры Σ является примером терма s, если $t = s\theta$ для некоторой подстановки θ. Если терм t - основной, т.е. не содержит переменных, то t называется основным примером s.

Пусть T - множество термов сигнатуры Σ. Тогда через $[T]$ обозначим множество основных примеров термов из T.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть F - подмножество из U. Если $F = [T]$ для некоторого множества термов T, то будем говорить, что T порождает множество F.

Пусть t - терм сигнатуры Σ. Тогда глубину $\Gamma(t)$ терма t определим следующим образом:

$\Gamma(t) = 0$, если t - переменная или константа;

$\Gamma(t) = \max\{\Gamma(t_1), \ldots, \Gamma(t_n)\} + 1$, если $t = f(t_1, \ldots, t_n)$.

ЛЕММА 1. *Пусть* F *- конечное подмножество из* U. *Тогда существует конечное множество термов* T *такое, что* $U \setminus F = [T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $F = \{t\}$. Тогда справедливость леммы будем доказывать индукцией по глубине $\Gamma(t)$ терма t. Если $\Gamma(t) = 0$, то t - константа. Поэтому в качестве множества T можно взять все константы,отличные от t, и все термы вида $f(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что $\Gamma(t) > 0$ и для всех термов, глубины меньше чем $\Gamma(t)$, лемма верна. Тогда $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ и для каждого t_i существует множество $T_i = \{s_{1i}, \ldots, s_{1n_i}\}$ такое, что

$[T_i] = U \setminus \{t_i\}$. Пусть $T_i' = \bigcup_{j=1}^{n_i} \{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, s_{ji}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\}$. В качестве T можно взять объединение всех множеств T_i', все константы и все термы вида $g(x_1, \ldots, x_n)$, где g отличен от f.

Покажем, что T - искомое множество. Включение $[T] \subseteq U \setminus F$ очевидно. Пусть r - терм из $U \setminus F$. Если r - константа или терм вида $g(x_1, \ldots, x_k)$, то $r \in [T]$. Предположим, что $r = f(r_1, \ldots, r_n)$. Тогда для некоторого i, $1 \le i \le n$, $r_i \in U \setminus \{t_i\}$. Следовательно, терм $r_i \in [T_i]$. Поэтому $r \in [T_i']$. Таким образом, $U \setminus F = [T_i]$.

Пусть теперь $F = \{t_1, \ldots, t_n\}$ и для всех подмножеств из U с числом элементов меньше чем n лемма верна. Рассмотрим множество $F_1 = F \setminus \{t_n\}$. По предположению индукции $U \setminus F_1 = [T_1]$ для некоторого конечного множества термов T_1. Пусть $S = \{s \in T_1 \setminus \{t_n\} \colon s\theta_s = t_n\}$, где θ_s - наиболее общий унификатор. Пусть теперь $s \in S$. Тогда $t_n = s\theta_s$, где $\theta_s = \{x_1/r_1, \ldots, x_i/r_i\}$. Поскольку все r_i - основные термы, то для каждо -

го r_i существует множество термов $\{s_{i1},\dots,s_{ik_i}\}$, порождающее $U\setminus\{r_i\}$. Обозначим это множество через N_s. Положим $p_{ij}= s\{x_i/s_{ij}\}$, где $i=1,\dots,l$, $j = 1,\dots,k_i$, и пусть M_s - множество всех термов p_{ij}. Покажем, что термы p_{ij} и t_n неунифицируемы. Действительно, пусть $p_{ij}\tau = t_n\tau$ для некоторой подстановки τ. Так как $p_{ij}= s\{x_i/s_{ij}\}$, то $t_n\tau = s\{x_i/s_{ij}\}\tau$. Поэтому $\{x_i/s_{ij}\}\tau = \theta_s\tau_1$ для некоторой подстановки τ_1. Следовательно, $r_i = s_{ij}\tau$. Получили противоречие. Таким образом, термы t_n и p_{ij} неунифицируемы.

Пусть $M = \bigcup\limits_{s\in S} M_s$ и $T = (T_1\setminus(S\cup\{t_n\}))\cup M$.

Покажем, что T - искомое множество. Пусть $t\in[T]$ и $t\in F$. Так как $[T]\subseteq[T_1]$, то $t = t_n$. В силу вышедоказанного $t_n = r\tau$, где $r\in T_1\setminus(S\cup\{t_n\})$. С другой стороны, по определению множества S имеем $r\in S$. Полученное противоречие показывает, что $[T]\subseteq U\setminus F$. Пусть теперь $t\in U\setminus F$. Так как $U\setminus F\subseteq U\setminus F_1$, то существуют терм s из T_1 и подстановка $\theta=\{x_1/r_1',\dots,x_l/r_l'\}$ такие, что $t= s\theta$. Если $s\notin S$, то $s\in T$, и поэтому $t\in[T]$. Предположим $s\in S$. Тогда $s\theta_s = t_n$. Так как $t\neq t_n$, то $r_i'\in U\setminus\{r_i\}$ для некоторого i. Следовательно, $r_i' = s_{ij}\tau$ для некоторых s_{ij} и подстановки τ. Не уменьшая общности, можно считать, что термы s_{ij} и s имеют различные переменные и τ содержит связи только для переменных из s_{ij}. Поэтому

$$
\begin{aligned}
t = s\theta &= s\{x_i/r_i'\}\{x_2/r_2',\dots, x_l/r_l'\} = \\
&= s\{x_i/s_{ij}\tau\}\{x_2/r_2',\dots, x_l/r_l'\} = \\
&= p_{ij}\tau\{x_2/r_2',\dots, x_l/r_l'\}.
\end{aligned}
$$

Так как $p_{ij}\in T$, то $t\in[T]$. Таким образом, $[T] = U\setminus F$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве леммы был установлен следующий факт. Пусть F - конечное множество термов из U и $F = F_1 \cup \{t\}$. Тогда, если T_1 - конечное множество термов, порождающее $U \setminus F_1$, то множество термов T, порождающее $U \setminus F$, можно выбрать таким образом, что каждый терм из T является примером некоторого терма из T_1.

ЛЕММА 2. *Пусть F - конечное подмножество из U и $F_1 \subseteq F$. Предположим, что множество термов T_1 порождает $U \setminus F_1$. Тогда существует множество термов T, порождающее $U \setminus F$, каждый терм которого является примером терма из T_1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу элементов множества $F \setminus F_1$. Если это число равно нулю, то все доказано. Пусть $F = F_0 \cup \{t\}$ и $F_1 \subseteq F_0$. Тогда по индукционному предположению существует конечное множество термов T_0 такое, что $[T_0] = U \setminus F_0$ и каждый терм из T_0 является примером терма из T_1. В силу сделанного после леммы 1 замечания можно найти конечное множество термов T, порождающее $U \setminus F$, причем термы из T являются примерами термов из T_0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть F - конечное множество из U и множество термов T порождает $U \setminus F$. Предположим, что терм t не унифицируется с термами из T и не содержит переменных, входящих в T. Тогда $t \in F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что сигнатура Σ не содержит функциональных символов. Тогда нетрудно понять, что t является основным термом, и поэтому $t \in F$.

Рассмотрим случай, когда Σ содержит функциональные символы. Пусть t' - основной пример терма t. Тогда $t' = t\theta$, где θ - некоторая подстановка. Если $t' \in U \setminus F$, то $t' = s\tau$ для некоторой подстановки τ и терма s из T. В силу ограничения на переменные, входящие в терм t, имеем

$t\tau\theta = t\theta = t' = s\tau\theta$, т.е. t унифицируется с термом из T. Следовательно, $t' \in F$. Если терм t содержит переменные, то множество основных примеров терма t бесконечно, а в силу конечности множества F этого быть не может. Поэтому терм t основной и $t \in F$.

Далее будем предполагать, что эрбрановский универсум любой рассматриваемой здесь логической программы содержится в U.

Пусть $F_1, \dots, F_n$ - конечные множества из U и множества $T_1, \dots, T_n$ порождают $U \setminus F_1, \dots, U \setminus F_n$ соответственно. Тогда положим

$$C(P, F_1, \dots, F_n) = \mathrm{Comp}(P \bigcup_{i=1}^{n} (\cup\{I_i(s) : s \in T_i\})).$$

Определим оператор Φ_P из $(2^U)^n$ в 2^U следующим образом:

$\Phi_P(S_1, \dots, S_n) = \{t \in U:$ существуют такие конечные подмножества $F_1, \dots, F_n$ из $S_1, \dots, S_n$ соответственно, что $C(P, F_1, \dots$ $\dots, F_n) \to \sim O(t)\}$.

Заметим, что в силу полноты правила отрицание как неудача $t \in \Phi_P(S_1, \dots, S_n)$ тогда и только тогда, когда

$$(P \bigcup_{i=1} (\cup\{I_i(s) : s \in T_i\})) \cup \{\leftarrow O(t)\}$$

имеет конечное неудачное SLD-дерево. Очевидно, что Φ_P - монотонный, компактный оператор.

ЛЕММА 3. *Оператор* Φ_P *задан корректно, т.е. не зависит от выбора порождающих множеств для* $U \setminus F_1, \dots$ $\dots, U \setminus F_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть каждое из множеств T_i, S_i порождает множество $U \setminus F_i$, где $i = 1,\dots,n$. Обозначим через P_1, P_2 программы, полученные из P добавлением аксиом вида $I_i(t)$, $I_i(s)$ соответственно, здесь $t \in T_i$, $s \in S_i$ и $i = 1,\dots,n$. Покажем, что множества конечных неудач программ P_1 и P_2 совпадают. Для этого достаточно доказать, что $T_{P_1}\uparrow\omega = T_{P_2}\uparrow\omega$ (см. [3,с.65]). Пусть B_{P_1}, B_{P_2} - эрбрановские базисы программ P_1, P_2. Ясно, что $B_{P_1} = B_{P_2}$, поэтому $T_{P_1}\uparrow 0 = T_{P_2}\uparrow 0$. Пусть теперь $T_{P_1}\uparrow n = T_{P_2}\uparrow n$ и $A \in T_{P_1}\uparrow(n+1)$. Тогда, если $A \neq I_i(t)$, то очевидно, что $A \in T_{P_2}\uparrow(n+1)$. Если $A = I_i(t)$ для некоторого i, то по определению оператора T_P найдется предложение вида $I_i(t')$ из P_1 такое, что t унифицируется с t'. Но тогда в силу предложения 1 терм t унифицируется с некоторым термом s из S_i. Следовательно, $I_i(t)$ унифицируется с $I_i(s)$, т.е. $A \in T_{P_2}\uparrow(n+1)$. Таким образом, $T_{P_1}\uparrow(n+1) \subseteq T_{P_2}\uparrow(n+1)$. Включение $T_{P_2}\uparrow(n+1) \subseteq T_{P_1}\uparrow(n+1)$ доказывается аналогично. Отсюда получаем $T_{P_1}\uparrow(n+1) = T_{P_2}\uparrow(n+1)$. Поэтому $T_{P_1}\uparrow\omega = \bigcap_{n=1} T_{P_1}\uparrow n = \bigcap_{n=1} T_{P_2}\uparrow n = T_{P_2}\uparrow\omega$. Теперь в силу предложения 13.1 из [3] получаем, что Φ_P не зависит от выбора порождающих множеств для $U \setminus F_1, \dots, U \setminus F_n$.

Пусть P - логическая программа. Тогда через $C^{\rightarrow}(P)$ обозначим теорию, полученную из $\mathrm{Comp}(P)$ заменой $\leftrightarrow$ на $\rightarrow$.

Пусть P - логическая программа с входом I и T_1, T_2 - конечные множества термов. Предположим, что каждый терм из T_2 является примером некоторого терма из T_1. Тогда справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть* $P_i = P \cup \{I(r): \ r \in T_i\}$. *Тогда* $C^{\to}(P_1)$ *является логическим следствием* $C^{\to}(P_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_1 = \{t_1, \dots, t_n\}$ и $T_2 = \{s_1, \dots, s_m\}$. Достаточно доказать, что формула

$$\forall x(I(x) \to \bigvee_{k=1}^{n} \exists(x = t_k))$$ является логическим следствием $C^{\to}(P_2)$.

Пусть M - модель для $C^{\to}(P_2)$ и b - элемент из M такой, что $M \models I(b)$. Тогда в силу определения $C^{\to}(P_2)$ формула $\forall x(I(x) \to \bigvee_{k=1} \exists(x = s_k))$ истинна на M. Следовательно, для некоторого k на M истинна формула $\exists(b = s_k)$. Так как $s_k = t_i\theta$, где $t_i \in T_1$, то на M истинна формула $\exists(x = t_i)$. Поэтому M – модель для

$$\forall x(I(x) \to \bigvee_{i=1}^{n} \exists(x = t_i)).$$

ЛЕММА 4. *Пусть* P *– логическая программа и* G *– целевое утверждение. Тогда* G *следует из* $Comp(P)$ *в том и только в том случае, когда* G *логически следует из* $C^{\to}(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G логически следует из $Comp(P)$. Предположим, что интерпретация M сигнатурных символов из P основывается на прединтерпретации N. Пусть M вместе с интерпретацией $=$ как отношения равенства является моделью для $C^{\to}(P)$. Тогда $M \subseteq T_P^N(M)$. Поэтому, в силу предложения 5.2 из [3] и свойств оператора T_P^N, существует интерпретация M_0 такая, что $T_P^N(M_0) = M_0$ и $M \subseteq M_0$. Следовательно, по предложению 14.3 из [3] получаем, что M_0 вместе с интерпретацией $=$ как отношения равенства, есть модель для

$Comp(P)$. Поэтому $M_0 \models G$. Так как $M \subseteq M_0$, то, как легко видеть, $M \models G$. Таким образом, G логически следует из $C^{\rightarrow}(P)$.

Обратное утверждение очевидно.

Как уже отмечалось, имеет смысл говорить о таких операциях над программами, как композиция $(\circ)$, минимизация (μ), пересечение $(\cap)$ и объединение $(\cup)$. Как известно (см. [1]), класс логических программ замкнут относительно этих операций. Далее мы докажем ряд теорем, которые устанавливают соответствие между вышеуказанными операциями над операторами, представляющими конечные неудачи логических программ, и операциями над самими программами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть P - логическая программа с входами $T_1, \ldots, T_n$ и выходом 0. Будем называть P правильной программой, если в любом SLD-выводе из $P \cup \{\leftarrow O(t)\}$, где t - основной терм, все селекционные атомы вида $I_i(s)$ - основные и все целевые утверждения, для которых $I_i(s)$ - селекционный атом, имеют вид $\leftarrow I_i(s)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* P,Q *- логические программы, все предикатные символы которых различны. Пусть* I_P, I_Q *- входы программ* P,Q *соответственно, а* O_1, O_2 *- их выходы. Тогда справедливо включение* $\Phi_P \circ \Phi_Q(S) \subseteq \subseteq \Phi_{P \circ Q}(S)$. *Если программа* P *правильная, то* $\Phi_P \circ \Phi_Q(S) = \Phi_{P \circ Q}(S)$ *для любого* S *из* U.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in \Phi_P(\Phi_Q(S))$. Тогда $\sim O_P(t)$ логически следует из $C(P,F)$ для некоторого конечного множества F из $\Phi_P(S)$. Обозначим через T конечное множество термов, порождающее $U \setminus F$, и пусть $P_1 = P \cup \{I_P(r) : r \in T\}$. Тогда $P_1 \cup \{\leftarrow O_P(t)\}$

имеет конечное неудачное SLD-дерево D. Рассмотрим те листья этого дерева, которые помечены целями $G_1, \dots, G_k$ и у которых селекционные атомы имеют вид $I_P(s_1), \dots, I_P(s_k)$. Без ограничения общности можно считать, что переменные из s_i не входят в T, здесь $i=1,\dots,k$. Поскольку $I_P(s_i)$ не унифицируется с атомами вида $I_P(s)$ для $s \in T$, то, в силу предложения 1, $s_i \in F$, $1 \le i \le k$. По определению оператора Φ_P имеем, что для каждого $i=1,\dots,k$ существует конечное множество F_i из S такое, что $\sim O_Q(s_i)$ логически следует из $C(Q, F_i)$.

Пусть T_i - конечное множество термов, порождающее $U \setminus F_i$, где $i=1,\dots,k$ и $Q_i = Q \cup \{I_Q(r):\ r \in T_i\}$. Тогда $O_Q(s_i)$ принадлежит множеству конечных неудач программы Q_i, $1 \le i \le k$. Предположим, что $E = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$.

Тогда по лемме 2 существует конечное множество термов T_i', порождающее $U \setminus E$, каждый терм которого является примером некоторого терма из T_i, $1 \le i \le k$. Обозначим через Q_i' программу $Q \cup \{I_Q(r):\ r \in T_i'\}$. По предложению 2 для каждого $i=1,\dots,k$ $C^{\rightarrow}(Q_i)$ логически следует из $C^{\rightarrow}(Q_i')$. Следовательно, по лемме 4, $\sim O_Q(S_i)$ логически следует из $\mathrm{Comp}(Q_i')$. Поэтому, в силу леммы 3, $\sim O(s_i)$ логически следует из $\mathrm{Comp}(Q_1)$, где $i=1,\dots,k$. Пусть теперь D_{s_i} - конечное неудачное SLD-дерево для $Q_1 \cup \{\leftarrow O_Q(s_i)\}$. Рассмотрим программу $P \circ Q$, она состоит из следующих аксиом: P, Q и $I_P(x) \leftarrow O_Q(x)$. Покажем, что

$$(P \circ Q) \cup \{I_0(r):\ r \in T \cup \{\leftarrow O_P(t)\} \qquad (*)$$

имеет конечное неудачное SLD-дерево. Если лист дерева D помечен G_i, то соединим этот лист с корневой вершиной дере -

ва D_{s_i}. Проделав это для каждого листа дерева D, получим конечное неудачное SLD-дерево для (*). Следовательно, $t \in \Phi_{P\circ Q}(S)$.

Пусть P - правильная логическая программа и $t \in \Phi_{P\circ Q}(S)$. Тогда существуют конечное множество $F \subseteq S$ и множество термов T, порождающие $U \setminus F$ такое, что $P\circ Q \cup \{I_0(r) : r \in T\} \cup \cup \{\leftarrow O_P(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево D. Рассмотрим все вершины дерева D, помеченные целевыми утверждениями $G_1, \ldots, G_n$, для которых селекционными атомами являются $I_P(s_1), \ldots, I_P(s_n)$ соответственно. Поскольку P - правильная программа, то термы $s_1, \ldots, s_n$ - основные и потомок узла G_i дерева D помечен целью $\leftarrow O_Q(s_i)$. Так как D - конечное неудачное SLD-дерево, то его поддерево с корневой вершиной $\leftarrow O_Q(s_i)$ является конечным неудачным SLD-деревом для $Q \cup \{I_Q(r) : r \in T\} \cup \{\leftarrow O_Q(s_i)\}$. Поэтому для всех i, $1 \le i \le n$, $s_i \in \Phi_Q(S)$. Пусть $F_1 = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Тогда очевидно, что $\sim O_P(t)$ является логическим следствием $C(P, F_1)$, т.е. $t \in \Phi_P(\Phi_Q(S))$.

Пусть P - логическая программа с входами I, J и выходом 0. Зафиксируем конечное множество F из U и рассмотрим оператор Φ_F, заданный по правилу $\Phi_F(S) = \Phi_P(S, F)$. Пусть множество T порождает множество $U \setminus F$ и $Q = P \cup \{J(r) : r \in T\}$. Ясно, что логическая программа Q имеет вход I и выход 0. Покажем, что имеет место следующая

ЛЕММА 5. *Пусть* P, Q *- вышеуказанные логические программы. Тогда справедливо равенство* $\Phi_F = \Phi_Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in \Phi_F(S)$. Тогда существуют множества F_1 и F_2 из S и F такие, что $O(t)$ содержится в множестве конечных неудач программы $P_1 =$

$= P \cup \{I(r): r \in T_1\} \cup \{J(s): s \in T_2\}$, где T_i порождает $U \setminus F_i$, $i = 1,2$, т.е. $\sim O(t)$ логически следует из $Comp(P_1)$. В силу леммы 2 существует конечное множество термов T', порождающее $U \setminus F$, каждый терм которого является примером некоторого терма из T_2. Пусть $P_2 =$ $= P \cup \{I(r): r \in T_1\} \cup \{J(s): s \in T'\}$. По предложению 2 $C^{\to}(P_1)$ логически следует из $C^{\to}(P_2)$. Поэтому, в силу леммы 4, $\sim O(t)$ логически следует из $Comp(P_2)$. Следовательно, из леммы 3 вытекает, что $t \in \Phi_Q(S)$. Таким образом, $\Phi_P(S) \subseteq \Phi_Q(S)$. Обратное включение очевидно. Поэтому $\Phi_P = \Phi_Q$.

Пусть D - некоторое дерево. Глубину вершины дерева D определим следующим образом. Глубина корневой вершины считается равной нулю. Если глубина некоторой вершины равна n, то глубина ее непосредственного потомка равна $n + 1$. Глубина конечного дерева считается равной максимальной глубине вершин этого дерева.

ЛЕММА 6. *Пусть* P *- логическая программа с входом* I *и выходом* O *и пусть* $Q = P \cup \{I(x) \leftarrow O(x)\}$. *Тогда* $\bigcup_{n=0} \Phi_P^n(\emptyset) \subseteq \Phi_Q$. *Если логическая программа* P *правильная, то* $\bigcup_{n=0} \Phi_P^n(\emptyset) = \Phi_Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по n покажем, что $\Phi_P^n(\emptyset) \subseteq \Phi_Q$ для всех $n \geq 2$. Пусть $n = 2$ и $t \in \Phi_P^2(\emptyset)$. Тогда существует множество F из $\Phi_P(\emptyset)$ такое, что $P \cup \{I(r):$ $r \in T\} \cup \{\leftarrow O(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево D, здесь множество T порождает $U \setminus F$. Пусть листья этого дерева помечены целевыми утверждениями $G_1, \ldots, G_k$. Если $I(s_i)$ - селекционный атом G_i, $1 \leq i \leq k$, то в силу предложения 1 $s_i \in F$. Следовательно, $s_i \in \Phi_P(\emptyset)$. Поэтому $P \cup \{I(x)\} \cup \{\leftarrow O(s_i)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево D_{s_i}. Если какой-нибудь лист этого дерева помечен целевым утверждением G , то очевидно, что его селекционный атом отличен от $I(r)$. Поступая теперь так же, как при доказательстве первой части теоремы 1, получим, что $Q \cup \{\leftarrow O(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево, т.е. $t \in \Phi_Q$. Пусть $n > 2$ и для всех k, $2 \le k < n$, имеем $\Phi_P^k(\emptyset) \subseteq \Phi_Q$. Так как $\Phi_P^n(\emptyset) = \Phi_P(\Phi_P^{n-1}(\emptyset))$, то $\Phi_P^n(\emptyset) \subseteq \Phi_P(\Phi_Q)$. Повторяя в точности доказательство для случая $n = 2$, получим, что $\Phi_P(\Phi_Q) \subseteq \Phi_Q$. Поскольку $\emptyset \subseteq \Phi_P(\emptyset)$, то $\Phi_P(\emptyset) \subseteq \Phi_P^2(\emptyset)$. Таким образом, $\bigcup\limits_{n=0} \Phi_P^n(\emptyset) \subseteq \Phi_Q$.

Пусть теперь P - правильная логическая программа. Покажем, что $\Phi_Q \subseteq \bigcup\limits_{n=1} \Phi_P^n(\emptyset)$. Пусть $t \in \Phi_Q$. Тогда $Q \cup \{\leftarrow O(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево D . Индукцией по глубине Γ дерева D покажем, что $t \in \Phi_P^k(\emptyset)$ для некоторого k . Если $\Gamma = 0$, то $O(t)$ не унифицируется ни с одним заголовком программного предложения из Q . Следовательно, $P \cup \{I(x)\} \cup \{\leftarrow O(t)\}$ также имеет конечное неудачное SLD-дерево глубины нуль, т.е. $t \in \Phi_Q(\emptyset)$. Пусть $\Gamma > 0$ и $G_1, \dots, G_l$ - все узлы дерева D , селекционные атомы которых имеют вид $I(s_1), \dots, I(s_l)$ и $F = \{s_1, \dots, s_l\}$. . В силу правильности программы P получаем, что $F \subseteq U$, и потомок узла G_i дерева D помечен целевым утверждением $\leftarrow O(s_i)$. Так как SLD-поддерево с корневой вершиной $\leftarrow O(s_i)$ имеет глубину меньше чем Γ ,то $s_i \in \Phi_P^k(\emptyset)$ для некоторого k . Поэтому в силу монотонности Φ_P существует такое k, что $F \subseteq \Phi_P^k(\emptyset)$. Пусть множество T порождает $U \setminus F$. Тогда легко понять, что $P \cup \{I(r) : r \in T\} \cup \{\leftarrow O(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево, т.е. $t \in \Phi_P(\Phi_P^k(\emptyset)) = \Phi_P^{k+1}(\emptyset)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathbf{P}$ *– правильная логическая программа с входами* $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ *и выходом* O. *Тогда* $\mu_1\Phi_P = \Phi_{\mu_I P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F - конечное множество из U . Рассмотрим оператор Φ_F , заданный формулой $\Phi_F(S) = \Phi_P(S,F)$. Так как оператор Φ_P монотонный, то Φ_F - также монотонный оператор. Поэтому Φ_F имеет наименьшую неподвижную точку $\mathrm{lfp}(\Phi_F)$. Следовательно, оператор Ψ , заданный равенством $\Psi(F) = \mathrm{lfp}(\Phi_F)$, определен корректно. Нетрудно понять, что Ψ – монотонный оператор. В силу определения операции минимизации имеем $\mu_1\Phi_P = \Psi$. Также очевидно, что из компактности оператора Φ_P вытекает компактность оператора Φ_F . Поэтому $\Psi(F) = \mathrm{lfp}(\Phi_F) = \bigcup\limits_{n=0} \Phi_F^n(\emptyset)$.

Пусть $P_F = P \cup \{J(r) : r \in T\}$, где множество порождает $U \setminus F$, и пусть $Q_F = P_F \cup \{I(x) \leftarrow O(x)\}$. Тогда в силу леммы 5 получаем, что $\Psi(F) = \Phi_Q$. Положим $Q = P \cup \{I(x) \leftarrow O(x)\}$. Так как $\mu_I P = Q$, то достаточно показать, что $\Phi_Q(F) = \Phi_{Q_F}$.

Очевидно, что $\Phi_{Q_F} \subseteq \Phi_Q(F)$. Пусть $t \in \Phi_Q(F)$. Тогда существует конечное подмножество F_1 из F такое, что $Q \cup \{J(r) : r \quad T_1\} \cup \{\leftarrow O(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево, здесь T_1 порождает $U \setminus F_1$. Поэтому $t \in \Phi_{Q_F}$ и, следовательно, $t \in \Psi(F_1)$. Так как Ψ - монотонный оператор и $F_1 \subseteq F$, то $t \in \Psi(F)$. Отсюда следует $\Phi_Q(F) \subseteq \Phi_{Q_F}$. Таким образом, $\Phi_Q(F) = \Phi_{Q_F}$, т.е. $\Phi_Q(F) = \Psi(F)$, а значит, $\mu_1\Phi_P = \Phi_{\mu_I P}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* P, Q *- логические программы, все предикатные символы которых различны. Пусть* $I_1, \ldots, I_n$ *и* $J_1, \ldots, J_n$ *- входы программ* P, Q *соответственно, а* O_1, O_2 *- их выходы. Тогда имеют место следующие равенства:* $\Phi_P \cup \Phi_Q = \Phi_{P\cap Q}$, $\Phi_P \cap \Phi_Q = \Phi_{P\cup Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим программу $P \cap Q$. Как уже отмечалось, $P \cap Q$ состоит из следующих аксиом:

$$P$$
$$Q$$
$$I_1(x) \leftarrow K_1(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_n(x) \leftarrow K_n(x)$$
$$J_1(x) \leftarrow K_1(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$J_n(x) \leftarrow K_n(x)$$
$$O(x) \leftarrow O_1(x), O_2(x)$$

где $K_1, \ldots, K_n$ и 0 - новые предикатные символы. Для простоты будем считать, что $n = 1$. Пусть $t \in \Phi_P(S) \cup \Phi_Q(S)$. Предположим $t \in \Phi_P(S)$. Тогда существует конечное множество F из S такое, что $P \cup \{I(r): r \in T\} \cup \{\leftarrow O_1(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево, здесь множество T порождает $U \setminus F$. В этом случае, как легко видеть, $(P \cap Q) \cup \{K(r): r \in T\} \cup \{\leftarrow O_1(t)\}$ также имеет конечное неудачное SLD-дерево. Следовательно, $(P \cap Q) \cup \{K(r): r \in T\} \cup \{\leftarrow O(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево. Поэтому $t \in \Phi_{P\cap Q}(s)$.

Пусть теперь $t \in \Phi_{P\cap Q}(S)$. Тогда для некоторого конечного множества F из S и множества T, порождающего $U \setminus F$, $(P \cap Q) \cup \{K(r): r \in T\} \cup \{\leftarrow O(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево. Тогда в силу 13.3 из [3] либо $O_1(t)$, либо $O_2(t)$ принадлежит множеству конечных неудач программы $(P\cap Q)\cup\{K(r):\ r\in T\}$. . Но тогда легко понять, что $t\in \Phi_P(S)\cup \Phi_Q(S)$.

Теперь докажем второе равенство. Рассмотрим программу $P\cup Q$. Пусть опять $n = 1$. Предположим, что $t\in \Phi_P(S)\cap \cap\, \Phi_Q(S)$. Тогда существуют такие конечные подмножества F_1, F_2 из S и множества T_1, T_2, порождающие $U\setminus F_1$, $U\setminus F_2$, что $P\cup\{I(r):\ r\in T_1\}\cup\{\leftarrow O(t)\}$ и $Q\cup\{J(r):\ r\in T_2\}\cup\{\leftarrow O(t)\}$ имеют конечные неудачные SLD-дерееья. Пусть $P_1= P\cup\{I(r):\ r\in T\}$, $Q_1= Q\cup\{J(r):\ r\in T\}$ и $F = F_1\cup F_2$. Тогда по лемме 2 существуют множества T'_1 и T'_2 , порождающие $U\setminus F$, такие, что каждый терм из T'_i является примером некоторого терма из T_i, $i = 1,2$. Обозначим $P\cup\{I(r):\ r\in T'_1\}$ через P_2 , а $Q\cup\{J(r):\ r\in T'_2\}$ – через Q_2 . В силу предложения 2, $C^{\rightarrow}(P_1)$ и $C^{\rightarrow}(Q_1)$ логически следуют из $C^{\rightarrow}(P_2)$ и $C^{\rightarrow}(Q_2)$ соответственно. По лемме 4 получаем, что $\sim O_1(t)$ и $\sim O_2(t)$ логически следуют из $Comp(P_2)$ и $Comp(Q_2)$ соответственно. Следовательно, в силу леммы 3 $\sim O_1(t)$ логически следует из $C(P_2, F)$, т.е. $P\cup\{I(r):\ r\in T'_2\}\cup\{\leftarrow O_1(t)\}$ имеет конечное неудачное SLD-дерево. Теперь, как легко понять, $\sim O(t)$ логически следует из $C(P\cup Q, F)$. Следовательно, $t\in \Phi_{P\cup Q}(S)$. Таким образом, получаем, что $\Phi_P(S)\cap\Phi_Q(S)\subseteq \subseteq \Phi_{P\cup Q}(S)$. Обратное включение очевидно.

Литература

1. FITTING M. Enumeration Operators and Modular Logic Programming //J.Logic Programming. - 1987. - N1. -P. 11-21.

2. O'KEEFE R. Towards an Algebra for Constructing Logics Problems //IEEE-1985. Symposium an Logic Programming. - 1985. - N 4. - P. 152-160.

3. LLOYD J.M. Foundations of Logic Programming. - New York, 1984.

4. BARBUTI R., MANCARELA P., PEDRESCHI D., TURINI F. A Trans formational Approach to Negation in Logic Programming //J.Programming. - 1990. - N 8. - P. 201-228.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 апреля 1993 года