

ПОЛИНОМ НЕГАМИ ГРАФОВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ МНОГУГОЛЬНИКОВ^{*})

А.Ю.Веснин, А.А.Добрынин

В в е д е н и е

Изучение полиномиальных инвариантов графов является традиционной областью граф-теоретических исследований и в последнее время приобретает важное значение для приложений. Можно выделить два основных подхода к построению таких инвариантов. При первом подходе полиномы возникают как результат применения методов линейной алгебры к матрицам, ассоциированным с графами. При втором подходе полиномиальные инварианты представляют собой производящие функции, перечисляющие структурные характеристики графа. Примерами полиномиальных инвариантов являются характеристический многочлен матрицы смежности, матрицы расстояний и лапласовой матрицы графа, хроматический полином, полином Татта, полином паросочетаний, цикловой и ациклический полиномы, перманентный полином, полином стягиваний графа, ладейный полином, полиномы гомоморфизмов графов [1-7].

Отметим задачи, естественно возникающие при изучении полиномиальных инвариантов: нахождение рекуррентных формул для вычисления полиномов, получение явных выражений для полиномов отдельных графов и классов графов, установление взаимосвязи меж-

^{*}) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-03-18657).

ду различными полиномами, разработка алгоритмов и оценка трудоемкости вычисления полиномов, однозначность характеристики графов, поведение полиномов при операциях над графами.

Среди приложений отметим активное изучение свойств полиномов для графов, соответствующих молекулярным структурам и полимерам в органической химии [3-11]. Из физических приложений укажем на известную задачу Изинга, в которой возникает полином, перечисляющий подграфы специального вида, и задачи статистической физики, связанные с перечислением полимино [12, 13]. Основой активного интереса к полиномиальным инвариантам типа полинома Татта служит обнаружившаяся их глубокая связь с инвариантами узлов и зацеплений [14].

Одним из новых полиномиальных инвариантов является полином Негами, введенный в [15]. Интерес к этому полиному связан и с тем, что как показано в [15], через него могут быть выражены хроматический полином, полином Татта и потоковый полином.

В настоящей работе будут получены рекуррентные формулы и явные выражения для полинома Негами графов, составленных из n -угольников. Кроме того, в приложениях A-D будет приведена программа вычисления полинома Негами для произвольного графа и полученные с ее помощью полиномы Негами различных типов графов.

1. Полином Негами

В этом пункте будут даны определение и основные свойства полинома Негами, необходимые для дальнейшего изложения.

Везде далее под графом будет пониматься конечный граф с кратными ребрами и петлями и, как правило, будут использоваться обозначения и терминология из [16].

Для графа G и его ребра e определим следующие элементарные операции:

(1) *удаление ребра*; граф, полученный из G удалением ребра e будем обозначать $G-e$;

(2) *стягивание ребра*, заключающееся в удалении ребра с последующим отождествлением его вершин. Граф, полученный из G операцией стягивания ребра e , будем обозначать G/e .

Эти две операции лежат в основе определения полинома Негами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Полином Негами* $f(G) = f(G; t, x, y)$ графа G есть полином от трех переменных t, x, y , удовлетворяющий следующим условиям:

(i) если $G = \bar{K}_n$ - граф, состоящий из n , $n \geq 1$, изолированных вершин, то

$$f(\bar{K}_n) = t^n, \quad (1)$$

(ii) для любого ребра e графа G имеет место равенство

$$f(G) = xf(G/e) + yf(G-e). \quad (2)$$

Такое определение полинома Негами позволяет представить процесс его вычисления в виде корневого ориентированного бинарного дерева. Проиллюстрируем этот способ нахождения полинома $f(G)$.

ПРИМЕР. Рассмотрим мультиграф H , изображенный на рис.1.



Рис. 1

Представим схему вычисления полинома $f(H)$

в виде дерева на рис.2. В корневую вершину помещается исходный граф, остальные вершины связываются с графами, полученными после удаления или стягивания ребер. Дуги дерева с меткой "x" соответствуют операции стягивания ребра, а дуги с меткой "y" - операции удаления ребра. Очевидно,

общее число дуг дерева на рис.2 равно 2^q , где q - число ребер исходного графа. При этом концевым вершинам дерева соответствуют графы, состоящие из изолированных вершин, полиномы Негами которых определяются по формуле (1).

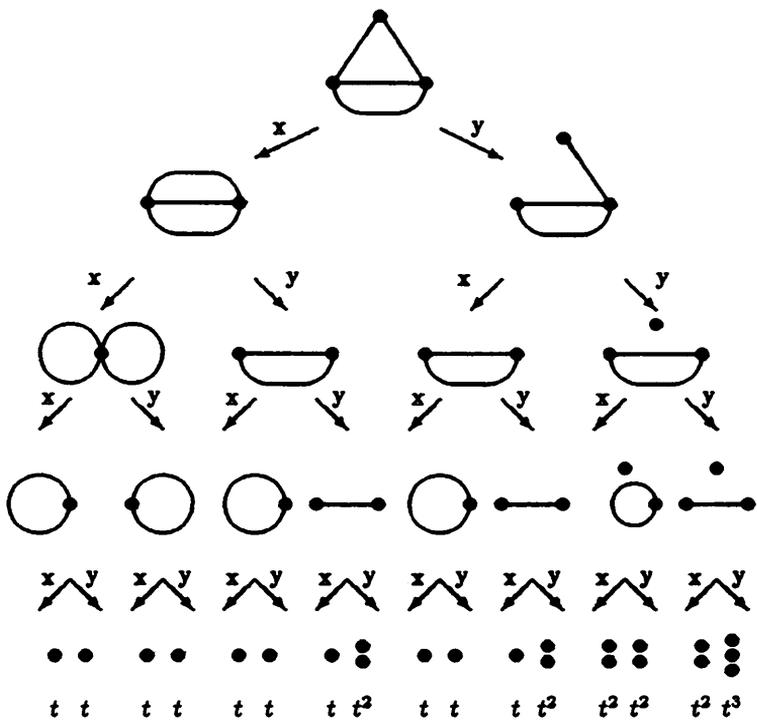


Рис. 2

Просмотрим далее все пути дерева, выходящие из корневой вершины и заканчивающиеся в конечных вершинах. Тогда, перемножая метки дуг этих путей и полиномы Негами графов, соответствующих

концевым вершинам путей дерева на рис.2, получим:

$$\begin{aligned}
 f(H) &= \\
 &= tx^4 + tx^3y + tx^3y + tx^2y^2 + tx^3y + tx^2y^2 + tx^2y^2 + t^2xy^3 + \\
 &+ tx^3y + tx^2y^2 + tx^2y^2 + t^2xy^3 + t^2xy^2 + t^2xy^3 + t^2xy^3 + t^3y^4 = \\
 &= tx^4 + 4tx^3y + (t^2 + 5t)x^2y^2 + 4t^2xy^3 + t^3y^4.
 \end{aligned}$$

Отметим, что для вычисления полинома нет необходимости редуцировать граф до вполне несвязных подграфов. А именно, пусть графы G_1, G_2, \dots, G_k соответствуют конечным вершинам дерева, тогда

$$f(G) = \sum_{i=1}^k x^{a_i} y^{b_i} f(G_i),$$

где a_i и b_i есть число дуг дерева, помеченных x и y соответственно и принадлежащих ветвям из корневой вершины в конечную вершину с G_i . Например, для простого цикла C_p порядка p полином может быть представлен через полином простой цепи P_p в виде

$$f(C_p) = x^2 f(C_{p-2}) + xy f(P_{p-1}) + y f(P_p).$$

Свойства полиномов Негами были подробно изучены в [15]. Перечислим те из них, которые будут использоваться далее. Для графа G обозначим p - число вершин, q - число ребер и w - число компонент связности графа.

1°. Для графа G справедлива формула

$$f(G) = \sum_{Y \subseteq E(G)} t^{w(G-Y)} x^{|Y|} y^{|Y|}, \quad (3)$$

где сумма берется по всем подмножествам Y множества ребер $E(G)$ графа G , а $|Y|$ - мощность множества Y .

2°. Полином $f(G)$ можно записать в виде

$$f(G) = \sum_{i=0}^q \sum_{j=1}^p b_{ij} t^j x^{q-i} y^i. \quad (4)$$

Используя свойство 1°, нетрудно заметить, что коэффициенты полинома имеют следующий смысл: b_{ij} равно числу подмножеств $Y \subseteq E(G)$ из i ребер таких, что после их удаления граф $G-Y$ распадается на j компонент связности. С другой стороны b_{ij} равно числу остовных подграфов в G с $(q-i)$ ребрами и j компонентами.

3°. Пусть графы K и H не пересекаются. Тогда полином Негами их объединения $K \cup H$ имеет вид

$$f(K \cup H) = f(K)f(H). \quad (5)$$

4°. Пусть $K \cdot H$ обозначает граф, состоящий из двух подграфов K и H , имеющих единственную общую вершину. Тогда

$$f(K \cdot H) = \frac{1}{t} f(K)f(H), \quad (6)$$

5°. Если граф G полностью определяется параметрами p, q и w , то полином Негами $f(G)$ полностью характеризует его.

5.1°. Граф T_q является деревом с q ребрами тогда и только тогда, когда

$$f(T_q) = t(x + ty)^q. \quad (7)$$

5.2°. Граф C_q есть цикл длины q тогда и только тогда, когда

$$f(C_q) = (x + ty)^q + (t-1)x^q. \quad (8)$$

5.3°. Граф L_q состоит из единственной вершины и q петель тогда и только тогда, когда

$$f(L_q) = t(x + y)^q. \quad (9)$$

5.4°. Граф D_q состоит из двух вершин, соединенных q ребрами тогда и только тогда, когда

$$f(D_q) = t(x + y)^q + t(t - 1)y^q. \quad (10)$$

6°. Полином Негами характеризует графы с точностью до 2-изоморфизма, т.е. если графы G и H являются 2-изоморфными, то

$$f(G) = f(H). \quad (11)$$

2. Классы графов, составленных из n -угольников

Определим класс U_n^r графов, составленных из r присоединенных друг к другу n -угольников. Для произвольного $n \geq 2$ положим, что U_n^0 содержит K_2 , т.е. вырожденный n -угольник. Будем говорить, что граф G принадлежит классу U_n^r , $r \geq 1$, $n \geq 2$, если G может быть получен из графа $H \in U_n^{r-1}$ отождествлением одного из ребер нового n -угольника с некоторым ребром графа H , принадлежащим лишь одному n -угольнику. Так, среди графов, изображенных на рис.3, лишь графы G_1 и G_3 принадлежат классам U_4^5 и U_6^4 соответственно. В графе G_2 имеется ребро, которое принадлежит более чем двум n -угольникам, а граф G_4 может быть получен лишь в результате присоединения нового n -угольника к двум ребрам графа из U_6^3 .

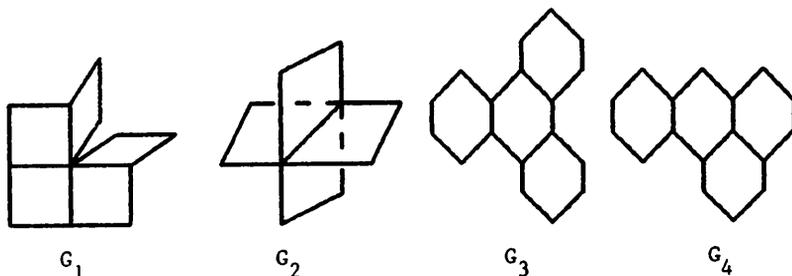


Рис.3

Нетрудно показать, что количество n -угольников произвольного графа из U_n^r связано с числом вершин p и числом ребер q графа простыми соотношениями: $p = r(n - 2) + 2$ и $q = r(n - 1) + 1$.

Как следует из определения, все графы из U_n^r являются плоскими, все r внутренних граней которых являются n -угольниками. Определим для такой укладки *периметр* графа как множество его ребер, смежных с внешней (бесконечной) гранью. Таким образом, можно всегда считать, что при построении графов класса U_n^r из графов класса U_n^{r-1} присоединение нового n -угольника происходит лишь к ребрам периметра.

Для графа $G \in U_n^r$ определим новый граф $S(G)$ следующим образом. Вершины графа $S(G)$ соответствуют n -угольникам графа G . Две вершины графа $S(G)$ соединяются ребром, если соответствующие им n -угольники в графе G смежны, т.е. имеют общее ребро. Полученный граф отражает смежность n -угольников в графе G и далее мы будем называть $S(G)$ *скелетом* графа G . Из определения класса U_n^r следует, что G принадлежит U_n^r тогда и только тогда, когда его скелет $S(G)$ является деревом.

Множество скелетов всех графов из U_n^r совпадает с множеством всех деревьев с числом вершин r , у которых максимальная степень вершин не превосходит n . Обратно, если T есть дерево с r вершинами, степень каждой из которых не превосходит n , то для каждого $k \geq n$ граф T является скелетом некоторого семейства графов из U_k^r . На рис.4 приводятся графы из U_4^5 и U_6^5 , имеющие изоморфные скелеты.

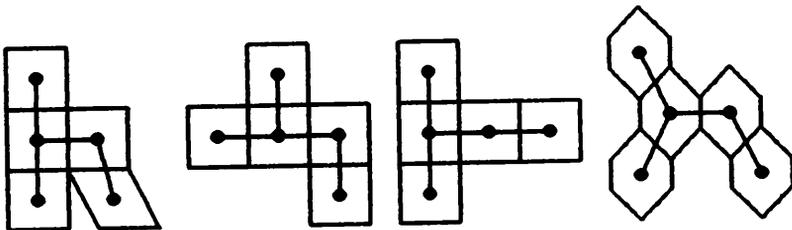


Рис.4

Отметим, что множество U_n^r включает в себя многие интересные классы графов. Возникающие при их перечислении задачи известны как задачи о росте клеток или росте n -угольных "животных". В [17] для графов из U_n^r , называемых n -кластерами, получены производящие функции и подсчитано количество графов. В табл. 1 для малых значений n и r приведены численные результаты из [17].

Т а б л и ц а 1

Количество графов в классе U_n^r

$n \setminus r$	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	2	2	3	3	4
4	3	5	8	12	16	21
5	4	16	33	68	112	183
6	12	60	194	483	1020	1918
7	27	261	1196	3946	10222	22908
8	82	1243	8196	34485	109947	290511
9	228	6257	58140	315810	1230840	3844688
10	733	32721	427975	2984570	14218671	52454248

Графы U_n^r включают в себя некоторые типы полимино, возникающие в задачах замощения фигур на плоскости [18].

Обозначим через P_n^r подкласс графов из U_n^r , для которых скелет изоморфен простой цепи. Ясно, что граф из P_n^r получается из некоторого графа из P_n^{r-1} присоединением нового n -угольника к его концевому n -угольнику. Графы из P_n^r будут далее основными объектами изучения. Для $r \leq 4$ и $n \leq 6$ изображения всех графов из классов P_n^r приведены на рис. 5.

Обозначим, наконец, через C_n^r подкласс графов из P_n^r , в которых каждая вершина является общей не более чем для двух n -угольников. Следовательно, степень каждой вершины графа из C_n^r равна двум или трем.

Графы класса C_6^r известны как неразветвленные катаконденсированные полигексы и включают семейство молекулярных графов бензоидных (ароматических) углеводородов, играющих важную роль в органической химии [19-21].

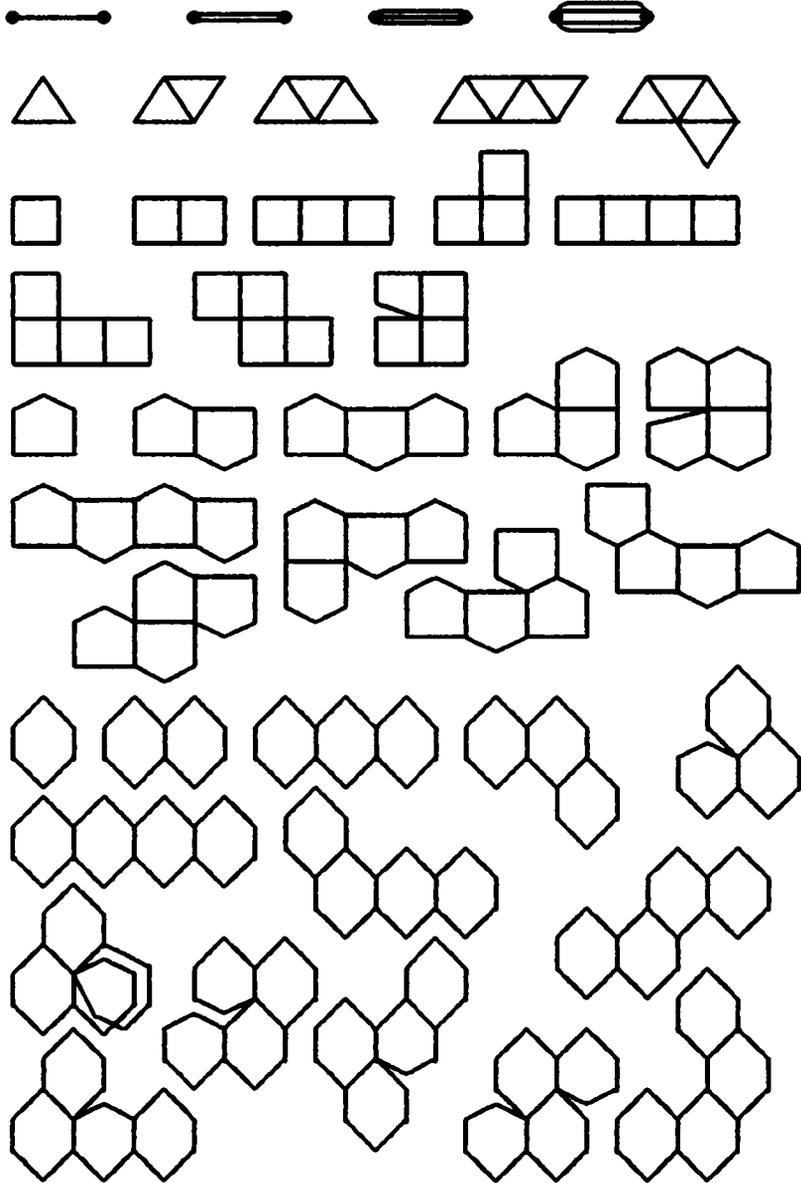


Рис. 5. Графы класса P_n^r для $r \leq 4$ и $n \leq 6$

Заметим, что для построения графа из C_n^r по графу из C_n^{r-1} новый n -угольник нельзя присоединять по ребрам концевго n -угольника, имеющим вершину степени 3. В концевом n -угольнике графа C_n^{r-1} таких ребер в точности $n-3$ (рис. 6а).

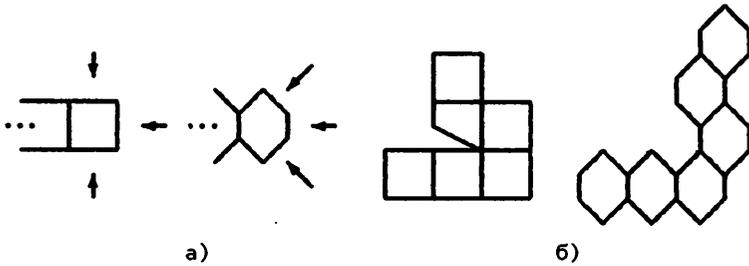


Рис. 6

Это позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между графами из классов P_n^r и C_{n-2}^r , пример которого показан на рис. 6б. Следовательно, $|P_n^r| = |C_{n-2}^r|$. Ясно, что $|C_n^1| = |C_n^2| = 1$ для любого $n \geq 2$ и $|C_4^r| = 1$ для всех $r \geq 1$. Для числа графов в классах C_5^r и C_6^r хорошо известны аналитические формулы [22,23]:

$$|C_5^r| = \begin{cases} 2^{r-4} + 2^{(r-4)/2}, & \text{если } r \geq 4 \text{ четно,} \\ 2^{r-4} + 2^{(r-5)/2}, & \text{если } r \geq 5 \text{ нечетно} \end{cases}$$

и

$$|C_6^r| = \begin{cases} (3^{(r-2)/2} + 1)^2/4, & \text{если } r \geq 2 \text{ четно,} \\ (3^{r-2} + 3^{(r-1)/2} + 3^{(r-3)/2} + 1)/4, & \text{если } r \geq 3 \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В табл.2 для сравнения с данными из табл.1 приводятся численные значения числа графов в классах C_5^r и C_6^r для $1 \leq r \leq 13$.

Количество графов в классе S_n^r

$n \setminus r$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	1	2	3	6	10	20	36	72	136	272	528
6	2	4	10	25	70	196	574	1681	5002	14884	44530

Далее нас будет интересовать вопрос о 2-изоморфности рассматриваемых графов. Напомним, что два графа называются 2-изоморфными, если существует взаимно-однозначное соответствие φ между множествами их ребер такое, что φ и φ^{-1} сохраняют простые циклы графов [24].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Любые два графа из P_n^r являются 2-изоморфными.

Для доказательства достаточно заметить, что у каждого концевой n -угольника периметру графа принадлежит $n-1$ ребро, а произвольный не концевой n -угольник имеет на периметре $n-2$ ребра.

В силу формулы (11) получаем

СЛЕДСТВИЕ. Полином Негами является инвариантом класса P_n^r , т.е. для любой пары графов $G, H \in P_n^r$ верно $f(G) = f(H)$.

Если вершина скелета графа из U_n^r имеет степень k , то соответствующий ей n -угольник будет иметь $n-k$ ребер на периметре графа. Следовательно, для графов класса U_n^r справедливо аналогичное

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если скелеты графов $G, H \in U_n^r$ изоморфны, то графы G и H являются 2-изоморфными и, следовательно, $f(G) = f(H)$.

3. Полиномы Негами класса P_n^r

В этом пункте для графов класса P_n^r будут получены рекуррентная и явная формулы полинома Негами. В силу следствия из предыдущего пункта полином Негами $f(G)$ совпадает на всех графах $G \in P_n^r$, поэтому здесь и далее мы будем обозначать его f_n^r .

Напомним, что для любого $n \geq 2$ класс P_n^0 состоит лишь из вырожденного n -угольника - ребра, и в силу формулы (7)

$$f_n^0 = t(x + ty). \quad (12)$$

Кроме того, для любого $n \geq 2$ класс P_n^1 состоит из n -угольника - простого цикла длины n . Следовательно, в силу формулы (8)

$$f_n^1 = (x + ty)^n + (t - 1)x^n. \quad (13)$$

Следующее утверждение дает рекуррентную формулу для вычисления полиномов Негами f_n^r .

ТЕОРЕМА 1. Для любых $r \geq 2$ и $n \geq 2$ имеет место соотношение

$$f_n^r = \frac{1}{t}[(x + ty)^{n-1} + (tx + ty - x)x^{n-2}]f_n^{r-1} - (x + y)x^{n-2}(x + ty)^{n-2}f_n^{r-2}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проиллюстрируем идею доказательства для случая $n = 5$ и $r = 4$, а затем распространим его на случай произвольных n и r .

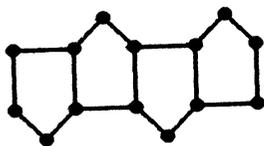


Рис. 7

В качестве представителя класса P_5^4 рассмотрим граф G_5^4 на рис. 7, составленный из четырех пятиугольников.

Согласно определению полинома Негами, полином f_5^4 связан по формуле (2) с полиномами двух

других графов, получаемых из G_5^4 стягиванием и удалением ребра соответственно (рис. 8).

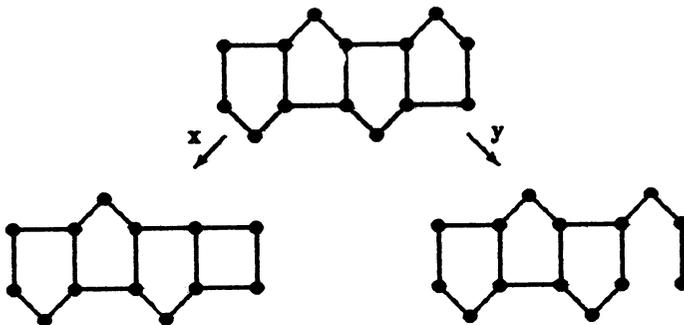


Рис. 8

Первый из них составлен из трех пятиугольников и одного четырехугольника. Обозначим его H_5^3 . Второй состоит из двух подграфов, имеющих единственную общую вершину: графа G_5^3 , составленного из трех пятиугольников и цепи T_3 длины три. Таким образом, из диаграммы на рис.8 в силу формул (2), (6) и (8) получим

$$\begin{aligned} f_5^4 &= xf(H_5^3) + yf(G_5^3 \cdot T_3) = xf(H_5^3) + y \frac{1}{t} f_5^3 t (x + ty)^3 = \\ &= xf(H_5^3) + y(x + ty)^3 f_5^3. \end{aligned}$$

Выразим отсюда полином Негами графа H_5^3 :

$$f(H_5^3) = \frac{1}{x}(f_5^4 - y(x + ty)^3 f_5^3).$$

Далее рассмотрим схему вычисления полинома Негами для графа H_5^3 (рис. 9).

Концевым вершинам приведенного на рис.9 дерева соответствуют следующие графы: граф, составленный из имеющих единствен-

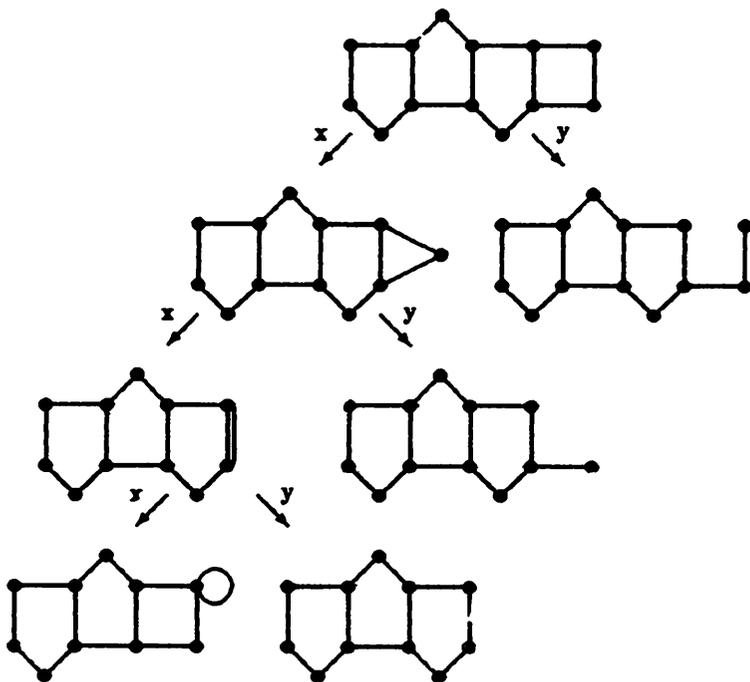


Рис. 9

ную общую вершину графа H_5^2 и петли L_1 ; граф G_5^3 ; граф, состав-
 ленный из имеющих единственную общую вершину графа G_5^3 и цепи
 T_1 ; граф, составленный из имеющих единственную общую вершину
 графа G_5^3 и цепи длины два T_2 . В силу формул (2), (6) и (7) имеем

$$\begin{aligned}
 f(H_5^3) &= x^3 \frac{1}{t} f(H_5^2) f(L_1) + (x^2 y + \frac{xy}{t} f(T_1) + \frac{y}{t} f(T_2)) f_5^3 = \\
 &= x^3 (x + y) f(H_5^2) + y(x^2 + x(x + ty) + (x + ty)^2) f_5^3 = \\
 &= x^3 (x + y) f(H_5^2) + y \frac{(x + ty)^3 - x^3}{(x + ty) - x} f_5^3. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$f(H_5^3) = x^3(x+y)f(H_5^2) + \frac{(x+ty)^3 - x^3}{t} f_5^3. \quad (16)$$

Подставляя выражение (15) для $f(H_5^3)$ и аналогичное для $f(H_5^2)$ в (16), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}(f_5^4 - y(x+ty)^3 f_5^3) &= \\ &= x^2(x+y)(f_5^3 - y(x+ty)^3 f_5^2) + \frac{(x+ty)^3 - x^3}{t} f_5^3. \end{aligned}$$

Выражая отсюда f_5^4 через f_5^3 и f_5^2 , имеем

$$f_5^4 = \left[y(x+ty)^3 + x^3(x+y) + x \frac{(x+ty)^3 - x^3}{t} \right] f_5^3 - y(x+y)x^3(x+ty)^3 f_5^2$$

и, следовательно,

$$f_5^4 = \frac{1}{t} [(x+ty)^4 + (tx+ty-x)x^3] f_5^3 - y(x+y)x^3(x+ty)^3 f_5^2.$$

Повторим подобные рассуждения для произвольных n и r . Тогда из анализа первого дерева вычисления полинома графа имеем

$$f(G_n^r) = xf(H_n^{r-1}) + yf(G_n^{r-1} \cdot T_{n-2}),$$

откуда, используя формулы (6) и (7), получим

$$f(H_n^{r-1}) = \frac{1}{x} [f_n^r - y(x+ty)^{n-2} f_n^{r-1}]. \quad (17)$$

Из анализа второго дерева вычисления полинома заключаем, что

$$f(H_n^{r-1}) = x^{n-2} f(H_n^{r-1} \cdot L_1) + y \sum_{i=0}^{n-3} x^i f(G_n^{r-2} \cdot T_{n-3-i}).$$

Далее, используя формулы (6), (7) и (9), имеем

$$\begin{aligned}
 f(H_n^{r-1}) &= x^{n-2}(x+y)f(H_n^{r-2}) + yf_n^{r-2} \sum_{i=0}^{n-3} x^i(x+ty)^{n-3-i} = \\
 &= x^{n-2}(x+y)f(H_n^{r-2}) + y \frac{(x+ty)^{n-2} - x^{n-2}}{t} f_n^{r-2}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Подставляя выражение (17) для $f(H_n^{r-1})$ и аналогичное для $f(H_n^{r-2})$ в (18), и выражая f_n^r через f_n^{r-1} и f_n^{r-2} , получим

$$\begin{aligned}
 f_n^r &= \frac{1}{t} [(x+ty)^{n-1} + (tx+ty-x)x^{n-2}] f_n^{r-1} - \\
 &\quad - y(x+y)x^{n-2}(x+ty)^{n-2} f_n^{r-2},
 \end{aligned}$$

что и доказывает теорему. ■

Заметим, что в полученной в теореме 1 рекуррентной формуле (14) выражения при f_n^{r-1} и f_n^{r-2} не зависят от r . Обозначим эти выражения через a_n и b_n соответственно:

$$a_n = \frac{1}{t} ((x+ty)^{n-1} + (tx+ty-x)x^{n-2}) \quad (19)$$

и

$$b_n = y(x+y)x^{n-2}(x+ty)^{n-2}. \quad (20)$$

Тогда формула (14) примет вид

$$f_n^r = a_n f_n^{r-1} - b_n f_n^{r-2}.$$

Сделаем еще один шаг редукции и выразим f_n^r через f_n^{r-2} и f_n^{r-3} :

$$f_n^r = a_n (a_n f_n^{r-2} - b_n f_n^{r-3}) - b_n f_n^{r-2} = (a_n^2 - b_n) f_n^{r-2} - a_n b_n f_n^{r-3}.$$

Продолжая этот процесс, мы можем выразить f_n^r через любые два последовательных полинома f_n^i и f_n^{i-1} , где $1 \leq i \leq r-1$. Со-

ответствующие коэффициенты для них обозначим c_n^{r-i} и d_n^{r-i} , т.е.

$$f_n^r = c_n^{r-i} f_n^i - d_n^{r-i} f_n^{i-1}.$$

Отметим, что $c_n^1 = a_n$ и $d_n^1 = b_n$, и имеет место следующая

ЛЕММА. Для любых $n \geq 2$ и $1 \leq i \leq r-2$ выполняется соотношение

$$\begin{pmatrix} c_n^{i+1} \\ d_n^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & -1 \\ b_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n^i \\ d_n^i \end{pmatrix}.$$

Продолжая процесс редукции f_n^r до полиномов f_n^0 и f_n^1 , вычисляемых по формулам (12) и (13), получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $n \geq 2$ и $r \geq 2$ имеет место соотношение

$$f_n^r = c_n^{r-1} f_n^1 - d_n^{r-1} f_n^0,$$

где $f_n^0 = t(x + ty)$, $f_n^1 = (x + ty)^n + (t - 1)x^n$,

$$\begin{pmatrix} c_n^{r-1} \\ d_n^{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & -1 \\ b_n & 0 \end{pmatrix}^{r-2} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix},$$

и

$$a_n = \frac{1}{t}((x + ty)^{n-1} + (tx + ty - x)x^{n-2}),$$

$$b_n = y(x + y)x^{n-2}(x + ty)^{n-2}.$$

4. Полином Негами графов, составленных из многоугольников с разным числом сторон

В этом пункте будут рассмотрены семейства графов, составленных из r экземпляров n -угольников и одного m -угольника. Для нахождения полиномов Негами таких графов будут использованы полученные в предыдущем пункте результаты для графов класса P_n^r .

Обозначим через $H_{n,m}^{r,i}$ класс графов, составленных из r экземпляров n -угольников и одного m -угольника, скелет которых является цепью, причем m -угольник соответствует $(i+1)$ -ой, $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$, вершине скелета, если занумеровать их последовательно от ближайшей концевой вершины. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству утверждения 1, можно показать, что имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Любые два графа из класса $H_{n,m}^{r,i}$ являются 2-изоморфными.

Таким образом, полином Негами является инвариантом класса $H_{n,m}^{r,i}$ и, следовательно, мы можем использовать обозначение $h_{n,m}^{r,i}$ для полинома графов класса $H_{n,m}^{r,i}$.

Отметим, что согласно таким обозначениям, формула (17) из предыдущего пункта дает выражение для полинома графа $h_{n,n-1}^{r,0}$.

ТЕОРЕМА 3. Для $n \geq 2$, $m \geq 2$, $r \geq 1$ и $0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ обозначим

$$g_{n,m}^{r,i} = \frac{1}{t^2} f_n^i f_n^{r-i} (x+ty)^{\min(m,n)-2} ((x+ty)^{|m-n|} - x^{|m-n|}). \quad (21)$$

Тогда полином Негами класса $H_{n,m}^{r,i}$ связан с полиномом класса P_n^r следующим образом:

а) если $m \geq n$, то

$$h_{n,m}^{r,i} = x^{|m-n|} f_n^{r+1} + g_{n,m}^{r,i}; \quad (22)$$

б) если $m < n$, то

$$f_n^{r+1} = x^{|m-n|} h_{n,m}^{r,i} + g_{n,m}^{r,i}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай "а". Проиллюстрируем идею доказательства для случая $H_{4,6}^{5,2}$, откуда будет очевидно следовать ее обобщение на произвольный случай $m \geq n$. На рис.10 изображен граф класса $H_{4,6}^{5,2}$ и соответствующее дерево вычисления полинома Негами.

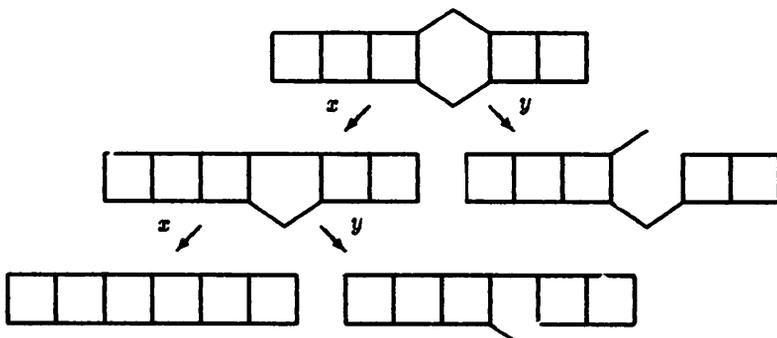


Рис. 10

Как нетрудно видеть, концевым вершинам этого дерева соответствуют графы G_4^6 , $(G_4^3 \cdot T_1) \cdot (G_4^2 \cdot T_1)$ и $(G_4^3 \cdot T_1) \cdot (G_4^2 \cdot T_2)$, где $G_n^r \in P_n^r$.

Используя свойства полинома Негами, получаем

$$h_{4,6}^{5,2} = x^2 f_4^6 + \frac{y}{t} f_4^2 f_4^3 \sum_{j=0}^1 x^j (x+ty)^{3-j}.$$

Аналогично в произвольном случае $m \geq n$ будем иметь

$$h_{n,m}^{r,i} = x^{m-n} f_n^{r+1} + \frac{y}{t} f_n^i f_n^{r-i} (x+ty)^{m-3} \sum_{j=0}^{m-n-1} \left(\frac{x}{x+ty} \right)^j.$$

Откуда, суммировав геометрическую прогрессию, получим

$$h_{n,m}^{r,i} = x^{m-n} f_n^{r+1} + \frac{1}{t} f_n^i f_n^{r-i} (x+ty)^{n-2} [(x+ty)^{m-n} - x^{m-n}],$$

что в силу (21) совпадает с (22).

Случай "б". Рассмотрим граф $G_6^4 \in P_6^4$ и соответствующее ему дерево вычисления полинома Негами, изображенное на рис.11.

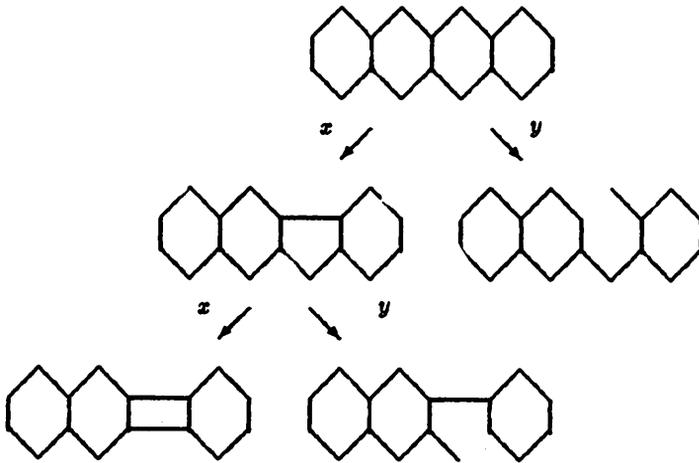


Рис.11

Концевым вершинам этого дерева соответствуют следующие графы: граф класса $H_{6,4}^{3,1}$ и графы $(G_6^2 \cdot T_1) \cdot (G_6^1 \cdot T_1)$ и $(G_6^2 \cdot T_2) \cdot (G_6^1 \cdot T_1)$. В силу свойств полинома Негами получаем

$$f_6^4 = x^2 h_{6,4}^{3,1} + \frac{y}{t} f_6^1 f_6^2 \sum_{j=0}^1 x^j (x+ty)^{3-j}.$$

Для произвольного случая $m < n$ будем иметь:

$$f_n^{r+1} = x^{n-m} h_{n,m}^{r,i} + \frac{y}{t} f_n^i f_n^{r-i} (x+ty)^{n-3} \sum_{j=0}^{n-m-1} \left[\frac{x}{x+ty} \right]^j.$$

Откуда окончательно получим

$$f_n^{r+1} = x^{n-m} h_{n,m}^{r,i} + \frac{1}{2} f_n^i f_n^{r-i} (x+ty)^{m-2} [(x+ty)^{n-m} - x^{n-m}],$$

что в силу (21) совпадает с (23), что и доказывает теорему. ■

СЛЕДСТВИЕ. Пусть вершина скелета, соответствующая m -угольнику, является концевой, т.е. граф принадлежит классу $H_{n,m}^{r,0}$. Тогда, если $m \geq n$, то

$$h_{n,m}^{r,0} = x^{m-n} f_n^{r+1} + \frac{1}{t} f_n^r (x+ty)^{n-1} [(x+ty)^{m-n} - x^{m-n}] \quad (24)$$

и для $m < n$ выполняется

$$f_n^{r+1} = x^{n-m} h_{n,m}^{r,0} + \frac{1}{t} f_n^r (x+ty)^{m-1} [(x+ty)^{n-m} - x^{n-m}]. \quad (25)$$

Заметим, что из (24) следует $h_{n,n}^{r,0} = f_n^{r+1}$, а выражая $h_{n,n-1}^{r,0}$ из (25), получим формулу (17).

В приложении С приведены полиномы Негами для графов $h_{4,6}^{2,1}$ и $h_{4,6}^{2,2}$.

В заключение отметим, что теорему 3 можно обобщить для графов, составленных из нескольких многоугольников разных размеров, скелет которых является цепью.

5. Вычисление полинома Негами для произвольного графа

Для получения полинома Негами произвольного графа были разработаны программные средства для IBM-совместимого персонального компьютера. Ввод информации осуществляется с помощью графического редактора путем рисования графов на экране дисп -

ля [25]. Выходными данными являются полиномы Негами, представленные в символьном виде, пригодные для дальнейшей обработки известным пакетом аналитических вычислений DERIVE.

Вычисление полинома Негами производится на основе формулы (4). По свойству 2^0 коэффициент b_{ij} зависит от двух параметров: мощности множества $Y \subseteq E(G)$ удаляемых из графа ребер (i) и числа компонент связности (j) в графе $G-Y$. Пусть ребра графа занумерованы от 1 до q . Представим множество удаляемых ребер Y характеристическим двоичным вектором длины q по следующему правилу. Положим k -й двоичный разряд равным нулю тогда и только тогда, когда ребро с номером k удаляется из графа, иначе ребру соответствует единичный разряд.

Опишем текущий шаг вычислительного процесса. Пусть число m есть значение двоичного вектора. Найдя нулевые разряды в двоичном представлении числа m , определяем какие ребра должны быть удалены из графа. Предположим, что таких ребер оказалось i штук, и после их удаления граф распался на j компонент. Эта информация о графе сохраняется в формируемом массиве коэффициентов полинома, $\text{coeff}[j,i] := \text{coeff}[j,i] + 1$. Ясно, что перебрав все целые числа m в интервале $0 \leq m \leq 2^q - 1$, мы тем самым полностью переберем все подмножества множества ребер графа. После завершения вычислений значение $\text{coeff}[j,i]$ будет равно коэффициенту b_{ij} при $t^j x^{q-i} y^i$.

Текст программы вычисления полинома Негами на языке Turbo Pascal приводится в приложении D. Эта версия программы не требует графического редактора и содержит процедуру интерактивного ввода списка смежности графа с клавиатуры компьютера. Полученный полином Негами, члены которого сгруппированы по степеням $x^{q-j} y^j$, записывается в ASCII-файл с именем `negami.mth`. Данная реализация вычисления полинома рассчитана на обработку графов с числом ребер не более 31.

Разработанная программа была использована для вычисления полинома Негами графов, приведенных в приложениях А-С.

Л и т е р а т у р а

1. ТАТТ У. Теория графов. - М.: Мир, 1988.
2. ХАРАРИ Ф., ПАЛМЕР Э. Перечисление графов. - М.: Мир, 1977.
3. ЦВЕТКОВИЧ Д., ДУБ М., ЗАХС Х. Спектры графов. Теория и применение. - Киев: Наукова думка, 1984.
4. Recent results in the theory of graph spectra /Cvetković D., Doob M., Gutman I., Torgašev A. - North-Holland, 1988.
5. TRINAJSTIĆ N., KLEIN D.J., RANDIĆ M. On some solved and unsolved problems of chemical graph theory //Int. J. Quantum Chem. Quantum Chem. Symp. - 1986. - Vol. 20. - P.699-742.
6. TRINAJSTIĆ N. Chemical graph theory. - Florida: CRC Press, Boca Raton. - 1983.
7. HOSOYA H. On some counting polynomials in chemistry // Discrete Appl. Math. - 1988. - Vol. 19. - P. 239-257.
8. KIRBY E.C. The factorisation of chemical graphs: a polynomial division approach //Croat. Chem. Acta - 1986. -Vol.59. - P. 635-641.
9. BABIĆ D., GRAOVAC A., MOHAR B., PISANSKI T. The matching polynomial of a polygraph //Discrete Appl. Math. - 1986. - Vol. 15. - P. 11-24.
10. BABIĆ D., GRAOVAC A., MOHAR B., PISANSKI T. Recursion for the matching polynomials of a fasciagraphs and rotagraphs //Graph Theory/Proc. 6th Yugosl. Semin., Dubrovnik. Apr.18-19, 1985. - Novi Sad. - 1986. - P. 27-41.
11. KNOP J.V., TRINAJSTIĆ N. Chemical graph theory. II. On the graph theoretical polynomials of conjugated structures //Int. J. Quantum Chem. Quantum Chem. Symp. - 1980. - Vol. 14. - P. 503-520.
12. HARARY F. A graphical exposition of the Ising problem //J.Austral. Math. Soc. - 1971. - Vol. 12. - P. 365-377.
13. ВЬЕННО Ж. Комбинаторные задачи статистической физики //Кибернетический сборник. Новая серия. - М., 1990. - Вып. 27. - С. 173-199.
14. MURASUGI K. On invariants of graphs with applications to knot theory //Trans. Amer. Math. Soc. - 1989. - Vol. 314. - P. 1-49.

15. NEGAMI S. Polynomial invariants of graphs //Trans. Amer. Math. Soc. - 1987. - Vol. 229. -P. 601-622.
16. ХАРАРИ Ф. Теория графов. - М.: Мир, 1973.
17. HARARY F., PALMER E.M., READ R.C. On the self-growth problem for arbitrary polygons //Discrete Math. - 1975.-Vol. 11. - P. 371-389.
18. ГОЛОМБ С.В. Полимино. - М.: Мир, 1975.
19. Computer generation of certain classes of molecules /Кноп J.V., Müller W.R., Szymanski K., Trinajstić N. -Zagreb: SKTN/Kemija u industriji, 1985.
20. TRINAJSTIĆ N. On the classification of polyhex hydrocarbons //J.Math. Chem. - 1990. - Vol. 5. - P. 171-175.
21. Computational chemical graph theory: characterization, enumeration and generation of chemical structures by computer methods /Trinajstić N., Nikolić S.,Кноп J.V., Müller W.R., Szymanski K. - Simon & Schuster, Horwood,Chichester. - 1991.
22. BALABAN A.T., HARARY F. Chemical graphs V.Enumeration and proposed nomenclature of benzenoid cata-condensed polycyclic aromatic hydrocarbons //Tetrahedron. - 1968.-Vol.24. - P. 2505-2516.
23. DOBRYNIN A.A. Generation graphs of pentahexagonal systems //Croat. Chem. Acta - 1993. - Vol. 66. - P. 91-100.
24. WHITNEY H. 2-isomorphic graphs //Amer. J. Math. - 1933. - Vol. 55. - P. 245-254.
25. ВЕСНИН А.Ю., ДОБРЫНИН А.А., СКОРОБОГАТОВ В.А. Програмные средства создания баз данных по экологии //Тез.докл. I Всесибирской конф. по математическим проблемам экологии. - Новосибирск, 1992. - С. 52-53.

Поступила в ред.-изд.отд.

28 июля 1994 года

Полиномы Негами графов классов P_n^r

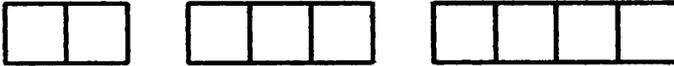


$$f_3^2 = t x^5 + 5t x^4 y + (2t^2 + 8t) x^3 y^2 + 10t^2 x^2 y^3 + 5t^3 x y^4 + t^4 y^5$$

$$f_3^3 = t x^7 + 7t x^6 y + (2t^2 + 19t) x^5 y^2 + (14t^2 + 21t) x^4 y^3 + (3t^3 + 32t^2) x^3 y^4 + 21t^3 x^2 y^5 + 7t^4 x y^6 + t^5 y^7$$

$$f_3^4 = t x^9 + 9t x^8 y + (2t^2 + 34t) x^7 y^2 + (19t^2 + 65t) x^6 y^3 + (3t^3 + 68t^2 + 55t) x^5 y^4 + (27t^3 + 99t^2) x^4 y^5 + (4t^4 + 80t^3) x^3 y^6 + 36t^4 x^2 y^7 + 9t^5 x y^8 + t^6 y^9$$

$$f_3^5 = t x^{11} + 11t x^{10} y + (2t^2 + 53t) x^9 y^2 + (24t^2 + 141t) x^8 y^3 + (3t^3 + 117t^2 + 210t) x^7 y^4 + (36t^3 + 282t^2 + 144t) x^6 y^5 + (4t^4 + 159t^3 + 299t^2) x^5 y^6 + (44t^4 + 286t^3) x^4 y^7 + (5t^5 + 160t^4) x^3 y^8 + 55t^5 x^2 y^9 + 11t^6 x y^{10} + t^7 y^{11}$$

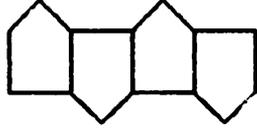
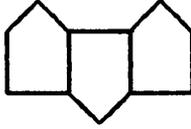
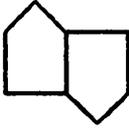


$$f_4^2 = t x^7 + 7t x^6 y + (6t^2 + 15t) x^5 y^2 + (2t^3 + 33t^2) x^4 y^3 + 35t^3 x^3 y^4 + 21t^4 x^2 y^5 + 7t^5 x y^6 + t^6 y^7$$

$$f_4^3 = t x^{10} + 10t x^9 y + (7t^2 + 38t) x^8 y^2 + (2t^3 + 62t^2 + 56t) x^7 y^3 + (47t^3 + 163t^2) x^6 y^4 + (18t^4 + 234t^3) x^5 y^5 + (3t^5 + 207t^4) x^4 y^6 + 120t^5 x^3 y^7 + 45t^6 x^2 y^8 + 10t^7 x y^9 + t^8 y^{10}$$

$$f_4^4 = t x^{13} + 13t x^{12} y + (8t^2 + 70t) x^{11} y^2 + (2t^3 + 98t^2 + 186t) x^{10} y^3 + (64t^3 + 442t^2 + 209t) x^9 y^4 + (21t^4 + 509t^3 + 757t^2) x^8 y^5 + (3t^5 + 348t^4 + 1365t^3) x^7 y^6 + (147t^5 + 1569t^4) x^6 y^7 + (36t^6 + 1251t^5) x^5 y^8 + (4t^7 + 711t^6) x^4 y^9 + 286t^7 x^3 y^{10} + 78t^8 x^2 y^{11} + 13t^9 x y^{12} + t^{10} y^{13}$$

$$f_4^5 = t x^{16} + 16t x^{15} y + (9t^2 + 111t) x^{14} y^2 + (2t^3 + 140t^2 + 418t) x^{13} y^3 + (82t^3 + 879t^2 + 859t) x^{12} y^4 + (24t^4 + 894t^3 + 2670t^2 + 780t) x^{11} y^5 + (3t^5 + 537t^4 + 4088t^3 + 3380t^2) x^{10} y^6 + (198t^5 + 3918t^4 + 7324t^3) x^9 y^7 + (42t^6 + 2538t^5 + 10290t^4) x^8 y^8 + (4t^7 + 1128t^6 + 10308t^5) x^7 y^9 + (334t^7 + 7674t^6) x^6 y^{10} + (60t^8 + 4308t^7) x^5 y^{11} + (5t^9 + 1815t^8) x^4 y^{12} + 560t^9 x^3 y^{13} + 120t^{10} x^2 y^{14} + 16t^{11} x y^{15} + t^{12} y^{16}$$



$$f_6^2 = t x^9 + 9t x^8 y + (12t^2 + 24t) x^7 y^2 + (8t^3 + 76t^2) x^6 y^3 + (2t^4 + 124t^3) x^5 y^4 + 126t^4 x^4 y^5 + 84t^5 x^3 y^6 + 36t^6 x^2 y^7 + 9t^7 x y^8 + t^8 y^9$$

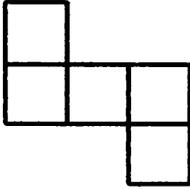
$$f_6^3 = t x^{13} + 13t x^{12} y + (15t^2 + 63t) x^{11} y^2 + (9t^3 + 162t^2 + 115t) x^{10} y^3 + (2t^4 + 214t^3 + 499t^2) x^9 y^4 + (170t^4 + 1117t^3) x^8 y^5 + (84t^5 + 1632t^4) x^7 y^6 + (24t^6 + 1692t^5) x^6 y^7 + (3t^7 + 1284t^6) x^5 y^8 + 715t^7 x^4 y^9 + 286t^8 x^3 y^{10} + 78t^9 x^2 y^{11} + 13t^{10} x y^{12} + t^{11} y^{13}$$

$$f_6^4 = t x^{17} + 17t x^{16} y + (18t^2 + 118t) x^{15} y^2 + (10t^3 + 273t^2 + 397t) x^{14} y^3 + (2t^4 + 327t^3 + 1500t^2 + 551t) x^{13} y^4 + (235t^4 + 2916t^3 + 3037t^2) x^{12} y^5 + (105t^5 + 3656t^4 + 8615t^3) x^{11} y^6 + (27t^6 + 3198t^5 + 16223t^4) x^{10} y^7 + (3t^7 + 1998t^6 + 22309t^5) x^9 y^8 + (883t^7 + 23427t^6) x^8 y^9 + (264t^8 + 19184t^7) x^7 y^{10} + (48t^9 + 12328t^8) x^6 y^{11} + (4t^{10} + 6184t^9) x^5 y^{12} + 2380t^{10} x^4 y^{13} + 680t^{11} x^3 y^{14} + 136t^{12} x^2 y^{15} + 17t^{13} x y^{16} + t^{14} y^{17}$$

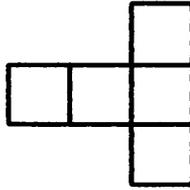


$$f_8^2 = t x^{11} + 11t x^{10} y + (20t^2 + 35t) x^9 y^2 + (20t^3 + 145t^2) x^8 y^3 + (10t^4 + 320t^3) x^7 y^4 + (2t^5 + 460t^4) x^6 y^5 + 462t^5 x^5 y^6 + 330t^6 x^4 y^7 + 165t^7 x^3 y^8 + 55t^8 x^2 y^9 + 11t^9 x y^{10} + t^{10} y^{11}$$

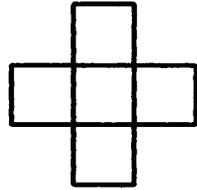
$$f_8^3 = t x^{16} + 16t x^{15} y + (26t^2 + 94t) x^{14} y^2 + (24t^3 + 332t^2 + 204t) x^{13} y^3 + (11t^4 + 628t^3 + 1181t^2) x^{12} y^4 + (2t^5 + 762t^4 + 3604t^3) x^{11} y^5 + (632t^5 + 7376t^4) x^{10} y^6 + (360t^6 + 11080t^5) x^9 y^7 + (135t^7 + 12735t^6) x^8 y^8 + (30t^8 + 11410t^7) x^7 y^9 + (3t^9 + 8005t^8) x^6 y^{10} + 4368t^9 x^5 y^{11} + 1820t^{10} x^4 y^{12} + 560t^{11} x^3 y^{13} + 120t^{12} x^2 y^{14} + 16t^{13} x y^{15} + t^{14} y^{16}$$



G



H



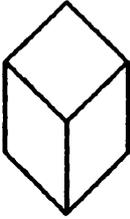
F

$$f(G) = t x^{16} + 16t x^{15} y + (9t^2 + 111t) x^{14} y^2 + (2t^3 + 140t^2 + 418t) x^{13} y^3 + (82t^3 + 879t^2 + 859t) x^{12} y^4 + (24t^4 + 894t^3 + 2670t^2 + 780t) x^{11} y^5 + (3t^5 + 537t^4 + 4088t^3 + 3380t^2) x^{10} y^6 + (198t^5 + 3918t^4 + 7324t^3) x^9 y^7 + (42t^6 + 2538t^5 + 10290t^4) x^8 y^8 + (4t^7 + 1128t^6 + 10308t^5) x^7 y^9 + (334t^7 + 7674t^6) x^6 y^{10} + (60t^8 + 4308t^7) x^5 y^{11} + (5t^9 + 1815t^8) x^4 y^{12} + 560t^9 x^3 y^{13} + 120t^{10} x^2 y^{14} + 16t^{11} x y^{15} + t^{12} y^{16}$$

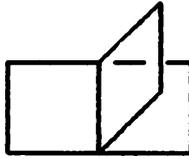
$$f(H) = t x^{16} + 16t x^{15} y + (10t^2 + 110t) x^{14} y^2 + (3t^3 + 145t^2 + 412t) x^{13} y^3 + (91t^3 + 879t^2 + 850t) x^{12} y^4 + (28t^4 + 905t^3 + 2659t^2 + 776t) x^{11} y^5 + (4t^5 + 544t^4 + 4087t^3 + 3373t^2) x^{10} y^6 + (200t^5 + 3920t^4 + 7320t^3) x^9 y^7 + (42t^6 + 2539t^5 + 10289t^4) x^8 y^8 + (4t^7 + 1128t^6 + 10308t^5) x^7 y^9 + (334t^7 + 7674t^6) x^6 y^{10} + (60t^8 + 4308t^7) x^5 y^{11} + (5t^9 + 1815t^8) x^4 y^{12} + 560t^9 x^3 y^{13} + 120t^{10} x^2 y^{14} + 16t^{11} x y^{15} + t^{12} y^{16}$$

$$f(F) = t x^{16} + 16t x^{15} y + (12t^2 + 108t) x^{14} y^2 + (4t^3 + 156t^2 + 400t) x^{13} y^3 + (106t^3 + 882t^2 + 832t) x^{12} y^4 + (36t^4 + 924t^3 + 2640t^2 + 768t) x^{11} y^5 + (6t^5 + 558t^4 + 4084t^3 + 3360t^2) x^{10} y^6 + (204t^5 + 3924t^4 + 7312t^3) x^9 y^7 + (42t^6 + 2541t^5 + 10287t^4) x^8 y^8 + (4t^7 + 1128t^6 + 10308t^5) x^7 y^9 + (334t^7 + 7674t^6) x^6 y^{10} + (60t^8 + 4308t^7) x^5 y^{11} + (5t^9 + 1815t^8) x^4 y^{12} + 560t^9 x^3 y^{13} + 120t^{10} x^2 y^{14} + 16t^{11} x y^{15} + t^{12} y^{16}$$

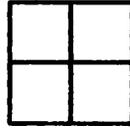
Полиномы Негами графов, не принадлежащих U_n^r



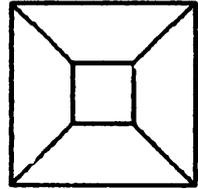
G



H



F



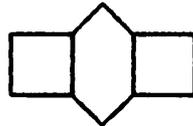
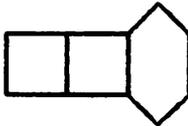
L

$$f(G) = tx^9 + 9tx^8y + (3t^2 + 33t)x^7y^2 + (34t^2 + 50t)x^6y^3 + (15t^3 + 111t^2)x^5y^4 + (3t^4 + 123t^3)x^4y^5 + 84t^4x^3y^6 + 36t^5x^2y^7 + 9t^6xy^8 + t^7y^9$$

$$f(H) = tx^{10} + 10tx^9y + (9t^2 + 36t)x^8y^2 + (3t^3 + 63t^2 + 54t)x^7y^3 + (48t^3 + 162t^2)x^6y^4 + (18t^4 + 234t^3)x^5y^5 + (3t^5 + 207t^4)x^4y^6 + 120t^5x^3y^7 + 45t^6x^2y^8 + 10t^7xy^9 + t^8y^{10}$$

$$f(F) = tx^{12} + 12tx^{11}y + (4t^2 + 62t)x^{10}y^2 + (56t^2 + 164t)x^9y^3 + (22t^3 + 281t^2 + 192t)x^8y^4 + (4t^4 + 236t^3 + 552t^2)x^7y^5 + (116t^4 + 808t^3)x^6y^6 + (32t^5 + 760t^4)x^5y^7 + (4t^6 + 491t^5)x^4y^8 + 220t^6x^3y^9 + 66t^7x^2y^{10} + 12t^8xy^{11} + t^9y^{12}$$

$$f(L) = tx^{12} + 12tx^{11}y + 66tx^{10}y^2 + (8t^2 + 212t)x^9y^3 + (87t^2 + 408t)x^8y^4 + (12t^3 + 396t^2 + 384t)x^7y^5 + (184t^3 + 740t^2)x^6y^6 + (48t^4 + 744t^3)x^5y^7 + (6t^5 + 489t^4)x^4y^8 + 220t^5x^3y^9 + 66t^6x^2y^{10} + 12t^7xy^{11} + t^8y^{12}$$



$$h_{4,6}^{2,1} = tx^{12} + 12tx^{11}y + (14t^2 + 52t)x^{10}y^2 + (11t^3 + 123t^2 + 86t)x^9y^3 + (5t^4 + 156t^3 + 334t^2)x^8y^4 + (t^5 + 121t^4 + 670t^3)x^7y^5 + (58t^5 + 866t^4)x^6y^6 + (16t^6 + 776t^5)x^5y^7 + (2t^7 + 493t^6)x^4y^8 + 220t^7x^3y^9 + 66t^8x^2y^{10} + 12t^9xy^{11} + t^{10}y^{12}$$

$$h_{4,6}^{2,2} = tx^{12} + 12tx^{11}y + (12t^2 + 54t)x^{10}y^2 + (6t^3 + 126t^2 + 88t)x^9y^3 + (t^4 + 155t^3 + 339t^2)x^8y^4 + (118t^4 + 674t^3)x^7y^5 + (57t^5 + 867t^4)x^6y^6 + (16t^6 + 776t^5)x^5y^7 + (2t^7 + 493t^6)x^4y^8 + 220t^7x^3y^9 + 66t^8x^2y^{10} + 12t^9xy^{11} + t^{10}y^{12}$$

Программа вычисления полинома Негами

```

program Negami_Polynomial;
const
  MaxP   = 30; { maximal number of vertices }
  MaxQ   = 31; { maximal number of edges }
  MaxDeg = 11; { maximal degree of vertices+1 }
var
  f      : text;
  EdgesInG : array[1...MaxQ] of boolean;
  Coeff   : array[1...MaxP,0...MaxQ] of longint;
  NEdge   : array[1...MaxP,1...MaxP,2...MaxDeg] of byte;
  List    : array[1...MaxP,1...MaxDeg] of byte;
  Later   : array[0...MaxQ] of integer;
  Mult    : array[0...MaxQ] of integer;
  Bit     : array[1...MaxQ] of longint;
  All, I  : longint;
  NumbComp, DelQ, Neig, P, Q, N, J : integer

procedure Input_Graph;
begin
  write('Input Order of Graph ->');
  readln(P);
  for I := 1 to P do
    begin
      write('Vertex', I:3, ', ', 'Input Degree -> ');
      readln(N);
      write('Input neighbors ->');
      List[I,1] := 1;
      for J := 1 to N do
        begin
          List[I,1] := List[I,1] + 1;
          read(Neig);
          List[I,List[I,1]] := Neig
        end;
      end;
end; { Input_Graph }

procedure Init_Data;
begin
  for I := 1 to MaxP do
    for J := 0 to MaxQ do Coeff[I,J] := 0;
  Q := 0;
  for I := 1 to P do
    for J := 2 to List[I,1] do

```

```

if I ≤ List[I,J] then
begin
  Q := Q + 1;
  NEdge[I,List[I,J],J] := Q;
  for N := 2 to List[List[I,J],1] do
    if List[List[I,J],N] = I then
      NEdge[List[I,J],I,N] := Q;
  end;
Bit[1] := 1;
for I := 2 to MaxQ do
  Bit[I] := Bit[I-1] * 2;
All := Bit[Q+1] - 1;
end; { Init_Data }

procedure Output_Result;
function D (N: integer): integer
var S: string; begin str(N,S); D := length(S) end;
begin
assign(f,'negami.mth');
rewrite(f);
for I := 0 to MaxQ do Mult[I] := 0;
for J := 0 to Q do
  for I := P down to 1 do;
    if Coeff[I,J] > 0 then
      begin
        Mult[J] := Mult[J] + 1;
        Later[J] := I;
      end;
for J := 0 to Q do
  begin
    if Mult[J] > 1 then write(f,'( ');
    for I := P down to 1 do
      if Coeff[I,J] > 0 then
        begin
          if Coeff[I,J] > 1 then
            write(f,Coeff[I,J]:D(Coeff[I,J]),'*');
          write(f,'t');
          if I > 1 then write(f,'^',I:D(I));
          if I > Later[J] then write(f,'+ ');
        end;
    if Mult[J] > 1 then write(f,')');
    if J < Q then
      begin
        write(f,'*x');
        if J < (Q-1) then write(f,'^', (Q-J):D(Q-J));

```

```

    end;
    if J > 0 then
    begin
        write(f, '*y');
        if J > 1 then write(f, '^', J:D(J));
        end;
        if J < Q then write(f, ' + ');
    end; { J }
    writeln(f);
    close(f);
end; { Output_Result }

procedure Count_Components (var NumbComp: integer);
label l;
var
    Matr      : array[1...MaxP, 1...MaxP] of byte;
    NotObrab  : array[1...MaxP] of boolean;
    TekSloy, NewSloy, Ver, I, J : integer;
begin
    J := 1;
    NumbComp := 1;
    for I := 2 to P NotObrab[I] := true;
l:
    TekSloy := 1;
    Matr[TekSloy, 1] := 2;
    Matr[TekSloy, 2] := J;
    NotObrab[J] := false;
    while (P > 0) do
    begin
        NewSloy := TekSloy + 1;
        Matr[NewSloy, 1] := 1;
        for I := 2 to Matr[TekSloy, 1] do
        begin
            Ver := Matr[TekSloy, I];
            for J := 2 to List[Ver, 1] do
            begin
                Neig := List[Ver, J];
                if EdgesInG[NEdge[Ver, Neig, J]] and NotObrab[Neig]
                then
                begin
                    Matr[NewSloy, 1] := Matr[NewSloy, 1] + 1;
                    Matr[NewSloy, Matr[NewSloy, 1]] := Neig;
                    NotObrab[Neig] := false;
                end
            end; { J }
        end; { I }
    end;
end;

```

```
if Matr[NewSloy,1] > 1 then TekSloy := NewSloy
else
  begin
    for J := 1 to P do
      if NotObrab[J] then
        begin
          NumbComp := NumbComp + 1;
          goto 1;
        end;
      break;
    end
  end; {while }
end; { Count_Components }
```

```

BEGIN
  Input_Graph;
  Init_Data;
  for I := 0 to All do
    begin
      DelQ := 0;
      for J := 1 to Q do
        begin
          EdgesInG[J] := not ((I and Bit[J]) <> 0);
          if not EdgesInG[J] then DelQ := DelQ+1;
        end;
      Count_Components(NumbComp);
      Coeff[NumbComp,DelQ] := Coeff[NumbComp,DelQ] + 1;
    end;
  Output_Result;
END.

```

Полином Негами графа из класса P_3^1 (треугольник) будет записан в ASCII-файл с именем `negami.mth` в следующем виде:

$$t*x^3 + 3*t*x^2*y + 3*t^2*x*y^2 + t^3*y^3.$$