ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)

1995 год Выпуск 152

УДК 519.685

S-ПРОГРАММЫ*)

О.Г.Юрченко

В работе сделана попытка построить на основе концепции семантического программирования [1,2] теоретический базис языка запросов к базам данных. Вводятся понятия S-формулы, истинности S-формулы на модели, S-схемы и S-программы (§1), определяется декларативная (денотационная) семантика S-программ (§2) и для S-программ, удовлетворяющих ограничению, что все базовые предикаты, входящие в них, интерпретируются конечными отношениями, задается операционная семантика (§3). Показано, что операционная семантика корректна и полна относительно декларативной и не дает бесконечных вычислений.

§1. S-программы

Пусть $\langle Sort, \sqsubseteq \rangle$ - частично-упорядоченное множество сортов. Если $s,t \in Sort$ и $s \sqsubseteq t$, то будем говорить, что s - подсорт сорта t. Последовательность сортов $s_1;\ldots;s_n$ будем называть типом над Sort. Зададим на множестве типов отношения порядка $\leq$: $s_1;\ldots;s_n \leq t_1;\ldots;t_m \Leftrightarrow (m=n) \wedge \forall i \leq n.(s_i \sqsubseteq t_i)$.

Введем множество предикатных символов P и множество констант C. Считаем, что каждому символу из P приписан тип над Sort и каждому символу из C приписан сорт. Сорт константы также будем называть типом константы.

---

*) Работа частично поддержана РФФИ (грант № 093-01-01506).

Обозначим через σ_o сигнатуру $\langle Sort, P, C \rangle$.

Введем множество предикатных переменных $\overline{P}$. Считаем, что каждому символу из $\overline{P}$ приписан тип над Sort и для каждого типа имеется бесконечное множество предикатных переменных этого типа.

Пусть $\sigma = \sigma_o \cup \overline{P}$ - расширенная сигнатура.

Введем в рассмотрение для каждого сорта s из Sort бесконечное множество предметных переменных $X(s)$ этого сорта. Считаем, что $X(s)$ и $X(t)$ для различных s и t не пересекаются. Сорт переменной будем также называть типом переменной.

Пусть X - множество всех предметных переменных.

Если a есть нечто, имеющее тип T, то будем это обозначать через $a:T$, либо писать $\mathrm{mun}(a) = T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предметная переменная или константа сорта s является термом этого сорта.

Введем понятие S-формулы Φ сигнатуры σ и множества свободных предметных переменных $FV(\Phi)$, входящих в Φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) Если $P \in P \cup \overline{P}$, $\mathrm{mun}(P) = s_1;\ldots;s_n$ и $t_1:s_1,\ldots,t_n:s_n$ - термы, то $\Phi = P(t_1,\ldots,t_n)$ - S-формула. $FV(\Phi)$ состоит в точности из всех предметных переменных, входящих в Φ.

2) Если Φ_1 и Φ_2 - S-формулы, то $\Phi = \Phi_1 \varepsilon \Phi_2$, где $\varepsilon \in \{\wedge, \vee, \setminus\}$, является S-формулой и $FV(\Phi) = FV(\Phi_1) \cup FV(\Phi_2)$.

3) Если x - предметная переменная сорта s, Ψ - S-формула и $c_1,\ldots,c_n$ - константы сорта s $(n \geq 1)$, то $\Phi = Qx \in \{c_1,\ldots,c_n\}.\Psi$, где $Q \in \{\forall,\exists\}$, является S-формулой и $FV(\Phi) = FV(\Psi) \setminus \{x\}$.

4) Если Ψ - S-формула, $P \in P \cup \overline{P}$, $\mathrm{mun}(P) = s_1;\ldots;s_n$, x - предметная переменная сорта s_i, где $i \in \{1,\ldots,n\}$,, то $\Phi = Qx \in P[i].\Psi$, где $Q \in \{\forall,\exists\}$, является S-формулой и $FV(\Phi) = FV(\Psi) \setminus \{x\}$.

5) Если Ψ - S-формула, x - предметная переменная, то $\Phi = \exists x.\Psi$ является S-формулой и $FV(\Phi) = FV(\Psi) \setminus \{x\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $P \in \mathrm{P} \cup \overline{\mathrm{P}}$, будем говорить, что P имеет кванторное вхождение в S-формулу Φ, если Φ содержит подформулу вида $Qx \in P[i].\Psi$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. S-формулу Φ будем называть допустимой, если выполнены следующие условия:

1) для любой подформулы Φ вида $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ выполнено $\mathrm{FV}(\Phi_2) \subseteq \subseteq \mathrm{FV}(\Phi_1)$;

2) для любой подформулы Φ вида $\Phi_1 \vee \Phi_2$ выполнено $\mathrm{FV}(\Phi_1) = = \mathrm{FV}(\Phi_2)$.

Пусть M - модель сигнатуры σ_0, $M = \langle (M_s)_{s \in \mathrm{Sort}}, \nu \rangle$, где M_s - носитель сорта s, ν - интерпретация символов из $\mathrm{P} \cup \mathrm{C}$, причем если $P \in \mathrm{P}$ и $\mathrm{mun}(P) = s_1;\ldots;s_n$, то $\nu(P) \subseteq M_{s_1} \times \ldots \ldots \times M_{s_n}$; если $c \in \mathrm{C}$, $\mathrm{mun}(c) = s$, то $\nu(c) \in M_s$.

Пусть G - семейство всевозможных отношений на M. Моделью N сигнатуры σ будем называть пару $\langle M, G \rangle$.

Означиванием параметров назовем пару отображений $\langle \xi, \mu \rangle$: $\xi : X \to \cup (M_s)_{s \in \mathrm{Sort}}$, $\mu : \overline{\mathrm{P}} \to G$, удовлетворяющих условиям:

1) если $x \in X(s)$, то $\xi(x) \in M_s$;

2) если $\mathrm{mun}(P) = s_1;\ldots;s_n$, то $\mu(P) \subseteq M_{s_1} \times \ldots \times M_{s_n}$.

Будем называть ξ интерпретацией предметных переменных, μ - интерпретацией предикатных переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ истинности S-формулы Φ на модели N при означивании параметров $\langle \xi, \mu \rangle$.

1. Если $\Phi = P(t_1,\ldots,t_n)$, $P \in \mathrm{P}$, то $N \models \Phi \Leftrightarrow \langle a_1,\ldots,a_n \rangle \in \in \nu(P)$, где $a_j = \nu(t_j)$, если $t_j \in \mathrm{C}$, либо $a_j = \xi(t_j)$, если $t_j \in X$.

2. Если $\Phi = P(t_1,\ldots,t_n)$, $P \in \overline{\mathrm{P}}$, то $N \models \Phi \Leftrightarrow \langle a_1,\ldots,a_n \rangle \in \in \mu(P)$, где $a_j = \nu(t_j)$, если $t_j \in \mathrm{C}$, либо $a_j = \xi(t_j)$, если $t_j \in X$.

3. Если $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$, то $N \models \Phi_1 \Leftrightarrow N \models \Phi_1$ и $N \models \Phi_2$.

4. Если $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$, то $N \models \Phi \Leftrightarrow N \models \Phi_1$ или $N \models \Phi_2$.

5. Если $\Phi = \Phi_1 \setminus \Phi_2$, то $N \models \Phi \Leftrightarrow N \models \Phi_1$ и $N \not\models \Phi_2$.

6. Если $\Phi = \exists x. \Psi$, то $N \models \Phi \Rightarrow$ существует такая интерпретация предметных переменных ξ_1, что $\xi_1(y) = \xi(y)$, для всех $y \in X \setminus \{x\}$, и $N \models \Psi$, при означивании параметров $<\xi_1, \mu>$.

7. Если $\Phi = \exists x \in P[i].\Psi$, то $N \models \Phi \Leftrightarrow N \models \Psi$ для некоторого означивания параметров $<\xi_1, \mu_1>$, удовлетворяющего следующим условиям:

1) $\mu_1 = \mu$;

2) для любого $y \in X \ \{x\} \setminus \xi_1(y) = \xi(y)$;

3) если $\mathrm{mun}(P) = s_1;\ldots;s_n$ и $P \in \mathrm{P}$, то существует набор $<a_1,\ldots,a_i> \in \nu(P)$ такой, что $a_1 = \xi_1(x)$;

4) если $\mathrm{mun}(P) = s_1;\ldots;s_n$ и $P \in \overline{\mathrm{P}}$, то существует набор $<a_1,\ldots,a_n> \in \mu(P)$ такой, что $a_i = \xi_1(x)$.

8. Пусть $\Phi = \forall x \in P[i].\Psi$, тогда если интерпретация P - непустое отношение, то $N \models \Phi \Leftrightarrow N \models \Psi$ для всех означиваний параметров $<\xi_1, \mu_1>$, удовлетворяющих условиям 1-4 из п.7 данного определения; если интерпретация P - пустое отношение, то $N \models \Phi \Leftrightarrow N \models \exists x \Psi$.

9. Если $\Phi = \exists x \in \{c_1,\ldots,c_2\}.\Psi$, то $N \models \Phi \Leftrightarrow N \models \Psi$ для некоторого означивания параметров $<\xi_1, \mu_1>$, удовлетворяющего следующим условиям:

1) $\mu_1 = \mu$;

2) для любого $y \in X \setminus \{x\}$ $\xi_1(y) = \xi(y)$;

3) для некоторого c из $\{c_1,\ldots,c_n\} \xi_1(x) = \nu(c)$.

10. Если $\Phi = \forall x \in \{c_1,\ldots,c_n\}.\Psi$, то $N \models \Phi \Leftrightarrow N \models \Psi$ для всех означиваний параметров $<\xi_1, \mu_1>$, удовлетворяющих условиям 1-3 из п.9 данного определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если P - предикатная переменная типа $s_1;\ldots$ $\ldots;s_n$, $x_1:s_1,\ldots,x_n:s_n$ - предметные переменные, Φ - S-формула, удовлетворяющая условиям:

1) $x_1,\dots,x_n$ входят свободно в Φ;

2) P не имеет кванторных вхождений в Φ;

3) если для каждой подформулы Φ, вида $\Phi_0 \setminus \Phi_1$, P не входит в Φ_1, то $P(x_1,\dots,x_n)$ def Φ – S-*определение*.

Набор $\bar{v}$ всех свободных предметных переменных Φ, отличных от $x_1,\dots,x_n$, будем называть набором параметров данного S-определения. Формулу Φ будем называть правой частью данного S-определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Графом зависимостей* набора S-определений

$$\begin{array}{l} P_1(\bar{x}_1) \text{ def } \Phi_1, \\ \dots\dots\dots \\ P_n(\bar{x}_n) \text{ def } \Phi_n \end{array} \qquad (1)$$

(здесь и далее $P_1,\dots,P_n$ попарно различны) назовем ориентированный граф $G = (V,E)$ с множеством вершин $V = \{P_1,\dots,P_n\}$ и множеством дуг $E = \{(P_i,P_j) \mid P_j$ входит в $\Phi_i\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если в графе зависимостей набора S-определений (1) существуют пути из P_i в P_j, то S-определения $P_i(\bar{x}_i)$ def Φ_i, $P_j(\bar{x}_j)$ def Φ_j будем называть *взаимно-рекурсивными*.

Если в E содержится (P_i,P_i), то S-определение $P_i(\bar{x}_i)$ def Φ_i будем называть *рекурсивным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Набор S-определений (1) назовем S-*схемой*, если он удовлетворяет условию: если S-определения $P(\bar{x}_i)$ def Φ_i, $P_j(\bar{x}_j)$ def Φ_j взаимно-рекурсивны, то

1) P_i не имеет кванторных вхождений в Φ_j,

2) для каждой подформулы Φ_j, вида $\Phi \setminus \Psi$, P_j не входит в Ψ.

Набор $\bar{v}$, полученный объединением всех наборов $\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n$ параметров S-определений из S-схем, будем называть *набором предметных параметров схемы*. Набор $\bar{V}$ всех предикатных переменных, отличных от $P_1,\dots,P_n$ и входящих в правые части S-определений из S-схемы, будем называть *набором предикатных параметров схемы*. $\{P_1,\ldots,P_n\}$ будем называть *сигнатурой схемы*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. S-*программой* сигнатуры σ над моделью N сигнатуры σ будем называть четверку $\langle Sch,\xi,\mu,\Phi\rangle$, где Sch - S-схема с наборами параметров $\overline{v}$ и $\overline{V}$; ξ - означивание предметных параметров схемы Sch, т.е. $\xi:\overline{v}\to\cup(M_s)_{s\in Sort}$, если $x\in X(s)$, то $\xi(x)\in M_s$; μ - означивание предикатных параметров схемы Sch, т.е. $\mu:\overline{V}\to G$, если $mun(R)=s_1;\ldots,s_n$, $R\in\overline{V}$, то $\mu(R)\subseteq M_{s_1}\times\ldots\times M_{s_n}$; Φ -допустимая S-формула сигнатуры σ, причем каждая предикатная переменная, встречающаяся в Φ, содержится либо в $\overline{V}$, либо в сигнатуре схемы Sch.

§2. Декларативная семантика

Пусть N - модель сигнатуры σ. Пусть Φ - допустимая S-формула, $FV(\Phi)=\overline{x}\cup\overline{y}$, где $\overline{x}\cap\overline{y}=\emptyset$; $Q_1,\ldots,Q_m$, $R_1,\ldots,R_k$ - все предикатные переменные, входящие в Φ, причем $Q_1,\ldots,Q_m$ не имеют кванторных вхождений в Φ и для любой подформулы Φ, вида $\Phi_1\setminus\Phi_2$, $Q_1,\ldots,Q_m$ не входят в Φ_2.

Зафиксируем означивание параметров $\langle\xi,\mu\rangle$.

Если $mun(Q_i)=s_1;\ldots;s_n$, то обозначим через $D_i=$ $=M_{s_1}\times\ldots\times M_{s_n}$.

Если $\overline{x}=x_1;\ldots;x_n$, $x_1:k_1\ \ldots\ x_n:k_n$, то обозначим $D=$ $=M_{k_1}\times\ldots\times M_{k_n}$.

Обозначим через $f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle$ следующую функцию:

$$f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle:\mathcal{P}(D_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(D_m)\to\mathcal{P}(D),$$

$f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle(A_1;\ldots;A_m)=\{(a_1;\ldots;a_n)\mid a_1\in M_{тип(x_1)},\ldots,a_n\in M_{тип(x_n)},$

$N\models\Phi$, при некоторой интерпретации параметров $\langle\xi_1,\mu_1\rangle$, удовлетворяющей условиям:

1) если $y \in \bar{y}$, то $\xi_1(y) = \xi(y)$;

2) для каждого $i \in \{1,\dots,n\}$ $\xi_1(x_i) = a_i$;

3) для каждого $i \in \{1,\dots,k\}$ $\mu_1(R_i) = \mu(R_i)$;

4) для каждого $i \in \{1,\dots,m\}$ $\mu_1(Q_i) = A_i\}$,

где $\mathcal{P}(D)$ - множество подмножеств D.

Из определения истинности S-формулы на модели следует, что если $\langle\xi_1,\mu_1\rangle$, $\langle\xi_2,\mu_2\rangle$ - два означивания параметров, удовлетворяющих условиям 1-4 для фиксированных $a_1,\dots,a_n$, $A_1,\dots,A_n$ и фиксированном $\langle\xi,\mu\rangle$, то $N \models \Phi$ при $\langle\xi_1,\mu_1\rangle \Leftrightarrow N \models \Phi$ при $\langle\xi_2,\mu_2\rangle$.

В связи с этим отметим, что в определении $f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle$ вместо "общего" фиксированного означивания параметров $\langle\xi,\mu\rangle$ ($\xi: X \to \cup(M_s)_{s\in Sort}, \mu: \bar{P} \to G$) можно использовать "частное", т.е. $\xi: \bar{y} \to \cup(M_s)_{s\in Sort}, \mu: \{R_1,\dots,R_k\} \to G$.

В дальнейшем будем поступать именно таким образом.

ЛЕММА 1. $f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle$ *монотонна, т.е. если* $A_1 \subseteq B_1,\dots,A_m \subseteq B_m$, *то*

$$f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle(A_1;\dots;A_m) \subseteq f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle(B_1;\dots;B_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим индукцией по строению Φ. Для $\Phi = P(\bar{t})$ $P \in \mathrm{P} \cup \bar{\mathrm{P}}$ очевидно. Сделаем полезное

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 1 равносильна тому, что из $A_1 \subseteq B_1,\dots,A_m \subseteq B_m$ и $N \models \Phi$ при $\langle\xi_1,\mu_1\rangle$ следует, что $N \models \Phi$ при $\langle\xi_2,\mu_2\rangle$, где пара означиваний $\langle\xi_1,\mu_1\rangle,\langle\xi_2,\mu_2\rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

1) ξ_1 совпадает с ξ_2;

2) $\mu_1(R_i) = \mu_2(R_i) = \mu(R_i)$;

3) $\mu_1(Q_i) = A_i$;

4) $\mu_2(Q_i) = B_i$.

1. Пусть $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$. Рассмотрим два означивания параметров $\langle\xi_1,\mu_1\rangle$ и $\langle\xi_2,\mu_2\rangle$, удовлетворяющих условиям 1-4 из замечания.

Предполагаем, что

$$N \models \Phi \text{ при } \langle \xi_1, \mu_1 \rangle. \qquad (*)$$

В силу замечания нужно показать, что $N \models \Phi$ при $\langle \xi_2, \mu_2 \rangle$.

Из (*) следует, что при $\langle \xi_1, \mu_1 \rangle$ $N \models \Phi_1$ и $N \models \Phi_2$. Но Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют предположению индукции, следовательно, при $\langle \xi_2, \mu_2 \rangle$ $N \models \Phi_1$ и $N \models \Phi_2$. Откуда $N \models \Phi$ при $\langle \xi_2, \mu_2 \rangle$.

2. Случай $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ доказывается аналогично.

3. Пусть $\Phi = \Phi_1 \setminus \Phi_2$. Снова рассмотрим два означивания параметров $\langle \xi_1, \mu_1 \rangle$ и $\langle \xi_2, \mu_2 \rangle$, удовлетворяющих условиям 1-4 из замечания.

Пусть $N \models \Phi$ при $\langle \xi_1, \mu_1 \rangle$, следовательно, при $\langle \xi_1, \mu_1 \rangle$ $N \models \Phi_1$ и $N \not\models \Phi_2$. Поскольку, по предположению на Φ, $Q_1, \ldots, Q_m$ не входят в Φ_2, верно, что $N \not\models \Phi_2$ при $\langle \xi_2, \mu_2 \rangle$.

Из предположения индукции и замечания следует, что $N \models \Phi_1$ при $\langle \xi_2, \mu_2 \rangle$. Откуда $N \models \Phi$ при $\langle \xi_2, \mu_2 \rangle$.

4. Все случаи с кванторами очевидны ($Q_1, \ldots, Q_m$ не имеют кванторных вхождений в Φ, по предположению на Φ). Для примера рассмотрим случай $\Phi = \exists x \in P[i].\Psi$. Снова рассмотрим два означивания параметров $\langle \xi_1, \mu_1 \rangle$ и $\langle \xi_2, \mu_2 \rangle$, удовлетворяющих условиям 1-4 из замечания.

Пусть $N \models \Phi$ при $\langle \xi_1, \mu_1 \rangle$. Берем какое-нибудь означивание $\langle \xi_1', \mu' \rangle$ такое, что $N \models \Psi$ при $\langle \xi_1', \mu_1' \rangle$ и удовлетворяет условиям:

1) $\mu_1' = \mu_1$;

2) для любого $y \in X \setminus \{x\}$ $\xi_1'(y) = \xi_1(y)$;

3) если $\mathrm{mun}(P) = s_1; \ldots, s_n$ и $P \in \mathrm{P}$, то существует набор $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \nu(P)$ такой, что $a_i = \xi_1'(x)$ для данного i (из Φ);

4) если $\mathrm{mun}(P) = s_1; \ldots; s_n$ и $P \in \overline{\mathrm{P}}$, то существует набор $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mu_1(P)$ такой, что $a_i = \xi_1'(x)$ для данного i.

По определению индукции и замечанию $N \models \Psi$ при некотором $\langle \xi_2', \mu_2' \rangle$, где $\langle \xi_2', \mu_2' \rangle$ удовлетворяет условиям:

1) $\mu_2' = \mu_2$;

2) для любого $y \in X\setminus\{x\}$ $\xi_2'(y) = \xi_2(y)$;

3) если $\mathrm{mun}(P) = s_1;\ldots;s_n$ и $P \in \mathrm{P}$, то существует набор $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \in \nu(P)$ такой, что $a_i = \xi_2'(x)$ для данного i;

4) если $\mathrm{mun}(P) = s_1;\ldots;s_n$ и $P \in \overline{\mathrm{P}}$, то существует набор $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \in \mu_2(P)$ такой, что $a_i = \xi_2'(x)$ для данного i.

По определению истинности на модели $N \models \exists x \in P[i].\Psi$ при $\langle \xi_2,\mu_2\rangle$.

Лемма 1 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть

$$\begin{array}{l} P_1(\overline{x}_1) \text{ def } \Phi_1, \\ \circ\ \bullet\ \circ\ \circ\ \bullet\ \circ\ \bullet \\ P_l(\overline{x}_l) \text{ def } \Phi_l \end{array} \qquad (2)$$

- S-схема Sch с наборами предметных параметров $\overline{v}$ и предикатных параметров $\overline{V}$.

Будем называть Sch *простой* S-схемой, если 1) $P_1,\ldots,P_l$ не имеют кванторных вхождений в $\Phi_1,\ldots,\Phi_l$; 2) для любой Φ_i, $1 \le i \le l$, для любой ее подформулы вида $\Psi_1 \setminus \Psi_2$, $P_1,\ldots,P_l$ не входят в Ψ_2.

Пусть Sch - простая S-схема (2); ξ - означивание переменных из $\overline{v}$, τ - означивание переменных из $\overline{V}$.

Если $\mathrm{mun}(P_i) = s_1;\ldots;s_n$, то обозначим $D_i = M_{s_1} \times\ldots\times M_{s_n}$.

Определим оператор

$$\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle:\ (D_1)\times\ldots\times(D_l) \to \mathcal{P}(D_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(D_l),$$

$$\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle = \langle f_{\xi,\tau}\langle\Phi_1\rangle,\ldots,f_{\xi,\tau}\langle\Phi_l\rangle\rangle.$$

Очевидно, что $\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle$ монотонный, а $\mathcal{P}(D_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(D_l)$ - полная решетка.

Приведем известную теорему (см., например, [3,4]).

ТЕОРЕМА 1. *Монотонное преобразование* T *на полной решетке* $\langle V,\le\rangle$ *имеет непустое множество неподвижных* *точек. В частности,* T *имеет наименьшую неподвижную точку* $\mathrm{lfp}(T)$ *такую, что* $\mathrm{lfp}(T) = \inf(\{x \in V \mid T(x) \le x\})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Денотационной семантикой простоты S-схемы Sch (2) назовем отображение $\mathrm{Den}(Sch)$ из $\{P_1,\dots,P_l\}$, сигнатуры простой S-схемы Sch (2), в набор отношений $\mathrm{lfp}(\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle)$, при этом P_i ставится в соответствие i-я компонента $\mathrm{lfp}(\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle)$.

Пусть Sch $P_1(\bar{x}_1)$ def $\Phi_1,\dots,P_l(\bar{x}_l)$ def Φ_l – произвольная S-схема с наборами предметных параметров $\bar{v}$ и предикатных параметров $\bar{V}$. Пусть $\langle\xi,\mu\rangle$ – означивание параметров схемы. Будем считать, что μ ставит в соответствие каждому символу из $\bar{V}$ конечное отношение.

Определим расширенный граф зависимостей G^* S-схемы Sch. Вершины G^* состоят из предикатных символов, входящих в сигнатуру Sch (т.е. $P_1,\dots,P_l$). Направленная дуга $\langle P_i,P_j\rangle$ существует в G^* тогда и только тогда, когда P_j входит в Φ_i. Дуга $\langle P_i,P_j\rangle$ помечается знаком * тогда и только тогда, когда P_j имеет хотя бы одно кванторное вхождение в Φ_i или для некоторой подформулы Φ_i, вида $\Psi_1 \setminus \Psi_2$, P_j имеет хотя бы одно вхождение в Ψ_2.

Разбиением сигнатуры схемы Sch называется разбиение множества $\{P_1,\dots,P_l\}$ на подмножества $\bar{Q}_1,\dots,\bar{Q}_m$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) если $P \in \bar{Q}_i$, $Q \in \bar{Q}_j$ и $\langle P,Q\rangle$ есть дуга G^*, то $i \ge j$;

б) если $P \in \bar{Q}_i$, $Q \in \bar{Q}_j$ и $\langle P,Q\rangle$ есть дуга C^*, помеченная *, то $i > j$.

Разбиение определяет порядок вычисления предикатов из S-схемы. Сначала вычисляются предикаты из $\bar{Q}_1$. После этого вычисляются предикаты из $\bar{Q}_2$ и т.д.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой* S*-схемы существует разбиение.*

Ниже приведем способ нахождения разбиения.

Алгоритм разбиения

INPUT: S-схемы Sch, G^*.

OUTPUT: разбиение для сигнатуры Sch.

METHOD

Выполнить следующие шаги:

1. На основе графа G^* построить граф G^*_{tr} следующим образом. Для каждой пары вершин P_i и P_j в G^*: если существует путь в G^* из P_i в P_j, содержащий дуги, помеченные знаком $*$, добавить дугу $\langle P_i, P_j \rangle$, помеченную знаком $*$, в результирующий граф (если такая дуга еще не существует).

2. $i:=1$.

3. Определить множество K всех вершин графа G^*_{tr}, из которых не выходят дуги, помеченные знаком $*$.

4. $Q_i:=K$.

5. Исключить все вершины множества K вместе с соответствующими им дугами из G^*_{tr}.

6. Если в G^*_{tr} остались какие-нибудь вершины, то $i:=i+1$ и перейти к шагу 3, иначе закончить.

ENDMETHOD

Пусть Sch_i – подсхема Sch с сигнатурой $\overline{Q}_i$, множеством предметных параметров $\overline{v}$ и множеством предикатных параметров $\overline{V} \cup \bigcup_{j<i} \overline{Q}_j$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Sch_i – *простая S-схема*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению Sch_i имеем:

1) кванторные вхождения в правые части определений Sch_i могут иметь лишь те предикатные переменные из сигнатуры Sch, которые содержатся в $\bigcup_{j<i} \overline{Q}_j$;

2) если $P(\overline{x})$ def Φ содержится в Sch_i, то для любой подформулы Φ вида $\Psi_1 \setminus \Psi_2$ в Ψ_2, могут иметь вхождения лишь те

предикатные переменные из сигнатуры Sch, которые содержатся в $\bigcup_{j<i} Sch_j$.

Поскольку все символы из $\bigcup_{j<i} \overline{Q}_j$ являются предикатными параметрами Sch_i, Sch_i удовлетворяет определению простой S-схемы.

Теорема доказана.

Набор подсхем $Sch_1,\ldots,Sch_m$ будем называть разбиением схемы Sch. Пусть $Sch_1,\ldots,Sch_m$ - разбиение схемы Sch и $\overline{Q}_1,\ldots$ $\ldots,\overline{Q}_m$ - разбиение сигнатуры схемы Sch.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Декларативной семантикой S-схемы Sch назовем отображение Den(Sch) сигнатуры Sch такое, что если $P \in \overline{Q}_i$, то $Den(Sch)(P) = Den(Sch_i)(P)$.

Пусть $Pr = (Sch,\xi,\mu,\Phi)$ - S-программа сигнатуры σ над моделью N и $FV(\Phi) = \{x_1,\ldots,x_m\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Декларативной семантикой Den(Pr) S-программы Pr назовем

$\{(a_1,\ldots,a_m) \mid a_1 \in M_{тип(x_1)},\ldots,a_m \in M_{тип(x_m)},\ N \models \Phi$ при

означивании параметров $\langle \xi_1,\mu_1 \rangle$, удовлетворяющем условиям:

1) ξ_1 на $\overline{v}$ совпадает с ξ, μ_1 на $\overline{V}$ совпадает с μ, где $\overline{v},\overline{V}$ - наборы предметных и предикатных параметров Sch.

2) $\xi_1(x_i) = a_i$, $i \in \{1,\ldots,m\}$;

3) если P из сигнатуры Sch, то $\mu_1(P) = Den(Sch_i)(P)$, где сигнатура Sch_i содержит $P\}$.

§3. Операционная семантика

Пусть N - модель сигнатуры σ. Считаем, что в σ содержится константа для каждого элемента из носителя N. Будем считать, что все предикатные символы из P интерпретируются в N конечными отношениями.

Сделанные предположения таковы, что под базовой моделью M сигнатуры σ_o можно понимать некоторую реляционную базу данных, при этом предикатные символы сигнатуры σ_o символизируют таблицы этой базы данных.

Пусть Sch $P_1(\overline{x}_1)$ def $\Phi_1,\ldots,P_l(\overline{x}_l)$ def Φ_l - простая S-схема с наборами предметных параметров $\overline{v}$ и предикатных параметров $\overline{V}$.

Пусть $\langle\xi,\mu\rangle$ - означивание параметров схемы. Будем считать, что μ ставит в соответствие каждому символу из $\overline{V}$ конечное отношение.

Так же как в предыдущем параграфе, рассмотрим оператор

$$\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle : \mathcal{P}(D_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(D_l),$$

$$\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle = \langle f_{\xi,\mu}\langle\Phi_1\rangle,\ldots,f_{\xi,\mu}\langle\Phi_l\rangle\rangle,$$

где если $mun(P_i) = s_1;\ldots,s_n$, $1\leq i\leq l$, то $D_i = M_{s_1}\times\ldots\times M_{s_n}$.

Имеет место (см., например, [3]) известная

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $(V,\leq)$ *- полная решетка,* T *- монотонное преобразование на* V. *Пусть* $\perp_V$ *- наименьший элемент* $(V,\leq)$. *Пусть* $T^o(\perp_V) = \perp_V, T^{m+1}(\perp_V) = T(T^m(\perp_V))$. *Тогда если существует* n *такое, что* $T^{n+1}(\perp_V) = T^n(\perp_V)$, *то* $T^n(\perp_V)$ *- наименьшая неподвижная точка.*

Покажем, что для оператора $\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5. *Существует* n *такое, что*

$$\Gamma^{n+1}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) = \Gamma^{n}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset),$$

где $\Gamma^{o}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) = (\emptyset,\ldots,\emptyset)$ и $\Gamma^{k+1}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) = \Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\Gamma^{k}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть P_1 - множество символов из P, встречающихся в $\Phi_1,\ldots$ $\ldots,\Phi_1$; T_s - множество всех тех элементов a из M_s, для которых существует R из $P_1 \cup \overline{V}$, $\mathrm{mun}(R) = s_1,\ldots,s_k$, существуют константы $b_1{:}s_1,\ldots,b_k{:}s_k$ такие, что $N \models R(b_1,\ldots,b_k)$ и для некоторого j из $\{1,\ldots,k\}$ $s_j = s$ и $\nu(b_j) = a$. Из сделанных предположений следует, что T_s конечное. Если $\mathrm{mun}(P_i) = s_1,\ldots$ $\ldots,s_m$, $1 \leq i \leq 1$, то обозначим через E_i множество $T_{s_1} \times\ldots$ $\ldots \times T_{s_m}$. Поскольку для всех s T_s конечное, то E_i конечное.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для каждого* j

$$\Gamma^j_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) \in \mathcal{P}(E_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(E_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим индукцией по j. Обозначим

$$\Gamma^0_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) = (\emptyset,\ldots,\emptyset) \in \mathcal{P}(E_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(E_1).$$

Пусть $\Gamma^k_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) \in \mathcal{P}(E_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(E_1)$.

Чтобы доказать утверждение для $j = k + 1$, достаточно показать, что если $B_1 \subseteq E_1,\ldots,B_1 \subseteq E_1$, то $f_{\xi,\mu}\langle\Phi_i\rangle(B_1,\ldots,B_1) \subseteq$ $\subseteq E_i$. Для этого достаточно показать, что если $(a_1,\ldots,a_r) \in$ $\in f_{\xi,\mu}\langle\Phi_i\rangle(B_1,\ldots,B_1)$, то каждый $a_p \in T_{s_p}$, где $\mathrm{mun}(P_i) =$ $= s_1;\ldots;s_r$ и $1 \leq p \leq r$.

Пусть $(a_1,\ldots,a_r) \in f_{\xi,\mu}\langle\Phi_i\rangle(B_1,\ldots,B_1)$. Воспользуемся индукцией по строению Φ.

1. $\Phi = P(t_1,\ldots,t_n)$, $P \in \mathrm{P} \cup \overline{\mathrm{P}}$. По определению T_{s_p} имеем $a_p \in T_{s_p}$.

2. Если $\Phi = \Psi_1 \wedge \Psi_2$, то очевидно, что a_p содержится либо в некотором $\bar{b} \in f_{\xi,\mu}\langle\Psi_1\rangle(B_1,\ldots,B_1)$, либо в некотором $\bar{c} \in$ $\in f_{\xi,\mu}\langle\Psi_2\rangle(B_1,\ldots,B_1)$. Следовательно, $a_p \in T_{s_p}$.

3. Случай $\Phi = \Psi_1 \vee \Psi_2$ доказывается аналогично.

4. Если $\Phi = \Psi_1 \setminus \Psi_2$, то по определению истинности такого вида формулы имеем, что $f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle(B_1,\ldots,B_1) \subseteq f_{\xi,\mu}\langle\Psi_1\rangle(B_1,\ldots,B_1)$ и по предположению индукции доказано.

5. Пусть $\Phi = \exists x \in P[i].\Psi$. Тогда a_p содержится в некотором $\overline{b} \in f_{\xi,\mu}\langle\Psi\rangle(B_1,\ldots,B_1)$. Следовательно, $a_p \in T_{s_p}$.

6. Случаи $\Phi = \exists x.\Psi$ и $\Phi = \exists x \in \{c_1,\ldots,c_n\}.\Psi$ доказываются аналогично.

7. Пусть $\Phi = \forall x \in P[i].\Psi$. Если P интерпретируется пустым отношением, то по определению истинности такого вида формулы имеем, что $f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle(B_1,\ldots,B_1) = f_{\xi,\mu}\langle\exists x.\Psi\rangle(B_1,\ldots,B_1)$ и по п.5 все доказано. Если P интерпретируется непустым отношением, то $f_{\xi,\mu}\langle\Phi\rangle(B_1,\ldots,B_1) \subseteq f_{\xi,\mu}\langle\exists x.\Psi\rangle(B_1,\ldots,B_1)$ и по п.5 все доказано.

8. Случай $\Phi = \forall x \in \{c_1,\ldots,c_n\}.\Psi$ доказывается аналогично.

Утверждение доказано.

Из монотонности $\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle$ имеем бесконечную неубывающую последовательность элементов из $\mathcal{P}(E_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(E_1)$:

$$\Gamma^{o}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) \subseteq \ldots \subseteq \Gamma^{j}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) \subseteq \ldots$$

Но множество $\mathcal{P}(E_1)\times\ldots\times\mathcal{P}(E_1)$ конечно. Значит, существует n такое, что $\Gamma^{n+1}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset) = \Gamma^{n}_{\xi,\tau}\langle Scg\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset)$. По теореме 4, $\Gamma^{n}_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle(\emptyset,\ldots,\emptyset)$ – наименьшая неподвижная точка оператора $\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle$. Теорема доказана.

Теорема 5 дает способ нахождения наименьшей неподвижной точки $\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle$.

Алгоритм LFP

INPUT: Простая S-схема Sch с наборами параметров $\overline{v}$ и $\overline{V}$, означивание параметров $\langle\xi,\tau\rangle$.

OUTPUT: $lfp(\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle)$.

```
BEGIN
  old:= (∅,...,∅);
  new:= Γ_{ξ,τ}<Sch>(∅,...,∅);
    WHILE new ≠ old DO
      BEGIN
        old:= new;
        new:= Γ_{ξ,τ}<Sch>(new);
      END;
   RETURN new
END.
```

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ 5. *Алгоритм* LFP *всегда останавливается (выполнение не может быть бесконечным) и его результатом является* $\mathrm{lfp}(\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle)$ *– наименьшая неподвижная точка оператора* $\Gamma_{\xi,\tau}\langle Sch\rangle$.

Пусть Sch $P_1(\overline{x}_1)$ def $\Phi_1,\ldots, P_1(\overline{x}_1)$ def Φ_1 – произвольная S-схема с наборами предметных параметров $\overline{v}$ и предикатных параметров $\overline{V}$. Пусть $\langle\xi,\mu\rangle$ – означивание параметров схемы. Будем считать, что μ ставит в соответствие каждому символу из $\overline{V}$ конечное отношение.

Пусть $Pr = (Sch, \xi, \mu, \Psi)$ – S-программа над моделью N сигнатуры σ. Считаем, что в σ содержится константа для каждого элемента из носителя N. Будем считать, что все предикатные символы из P интерпретируются в N конечными отношениями.

Теперь можно привести алгоритм вычисления значений предикатных переменных из сигнатуры схемы Sch с наборами предметных параметров $\overline{v}$ и предикатных параметров $\overline{V}$ относительно означивания параметров $\langle\xi, \mu\rangle$. Здесь же вычисляется значение отношения, определяемого S-программой $Pr = (Sch, \xi, \mu, \Phi)$.

Алгоритм вычисления $\mathrm{Den}_{op}(Sch)$ и $\mathrm{Den}_{op}(Pr)$

Шаг 1. Находим разбиения сигнатуры Sch и схемы Sch. Алгоритм приведен в §2. Имеем $\overline{Q}_1,\ldots,\overline{Q}_k$ – разбиение сигнатуры Sch; $\{Sch_j\}_{1\leq j\leq k}$ – разбиение схемы Sch; $\overline{v}_j = \overline{v}$ – набор предметных параметров S-схемы Sch_j, $\overline{V}_j = \bigcup\limits_{l<j} Q_l$ – набор предикатных параметров Sch_j;

<u>Шаг 2</u>. $i:=1$; $\mu':=\mu$.

<u>Шаг 3</u>. Набору $\overline{Q_i}$ ставим в соответствие набор $lfp(\Gamma_{\xi,\mu'}, \langle Sch\rangle)$, вычисляемый алгоритмом LFP, входом которого будут S-схема Sch_j с наборами предметных и предикатных параметров $\overline{v}_i$, $\overline{V}_i$ и означивание параметров $\langle\xi,\mu'\rangle$. При этом если $\overline{Q}_i = (R_1,\dots,R_r)$, то R_k ставится в соответствие k-я компонента $lfp(\Gamma_{\xi,\mu'}, \langle Sch_i\rangle)$.

<u>Шаг 4</u>. Расширяем μ'. Пусть $\overline{Q}_i = (R_1,\dots,R_r)$. Считаем, что $\mu'(R_k)$ совпадает с k-й компонентой $lfp(\Gamma_{\xi,\mu'}, \langle Sch\rangle)$. Таким образом, μ' определена на $\overline{V}_{i+1}$.

<u>Шаг 5</u>. Если $i < k$, то $i:=i+1$ и переходим к шагу 3. Определим означивание $Den_{op}(Sch)$ сигнатуры схемы Sch следующим образом: $Den_{op}(Sch)(P) := \mu'(P)$, где P – предикатная переменная из сигнатуры схемы Sch.

Пусть $FV(\Phi) = \{x_1,\dots,x_n\}$. Тогда

$Den_{op}(Pr) := \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_1 \in M_{тип(x_n)},\dots,a_n \in M_{тип(x_n)},$

$N \models \Phi$ при означивании параметров $\langle\xi',\mu'\rangle$, которое удовлетворяет условиям:

1) μ' вычислено ранее;

2) ξ' совпадает с ξ на $\overline{v}$;

3) $\xi'(x_i) = a_i$ при $1 \le i \le n\}$.

На этом вычисления заканчиваются.

ТЕОРЕМА 6. $Den_{op}(Pr) = Den(Pr)$, *т.е. операционная семантика корректна и полна относительно декларативной при сделанных предположениях на S-программу* Pr.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравнивая определение $Den(Pr)$ с определением $Den_{op}(Pr)$, видим, что если декларативная семантика символов из сигнатуры схемы Sch совпадает с их операционной семантикой, то $Den_{op}(Pr) = Den(Pr)$.

А тот факт, что декларативная семантика символов из сигнатуры схемы Sch совпадает с их операционной семантикой, следует из следствия теоремы 5. Теорема доказана.

Заметим, что в силу того, что алгоритмы LFP и построения разбиения всегда останавливаются (нет бесконечных вычислений), алгоритм вычисления $Den_{op}(Pr)$ и $Den_{op}(Sch)$ также не дает бесконечных вычислений.

Дальнейшим продолжением исследований может быть разработка на основе языка S-программ более выразительного языка, удовлетворяющего требованиям практики. Автор благодарен С.С.Гончарову за советы и замечания, сделанные по ходу работы.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программы и их семантики //Логические методы в программировании.-Новосибирск,1987. - Вып. 120: Вычислительные системы. - С. 24-51.

2. ГОНЧАРОВ С.С., ЕРШОВ Ю.Л., СВИРИДЕНКО Д.И. Методологические аспекты семантического программирования //Научное знание: логика, понятия, структура. - Новосибирск: Наука, 1987. - С. 154-184.

3. ЧЕРИ С., ГОТЛОБ Г., ТАНКА Л. Логическое программирование и базы данных. - М.: Мир, 1992.

4. TARSKI A. A lattice theoretical fixpoint theorem and its applications // Pacific J.Math.- 1955. - N 5.

Поступила в редакцию
20 апреля 1995 года