ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)
1995 год Выпуск 152

УДК 519.47

СЕТИ ПЕТРИ КАК ЯЗЫК СПЕЦИФИКАЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Е.Ю.Зыбарев, Ю.М.Зыбарев

Для создания эффективного инструментария анализа и синтеза сложных дискретных систем необходим хорошо развитый язык их спецификаций. В настоящее время для спецификации и моделирования дискретных систем широко используется интенсивно развивающийся аппарат сети Петри [1-5]. Предлагаемая работа направлена на исследование вопроса создания языка спецификаций на базе сетей Петри. В работе предлагаются различные варианты обобщения сетей Петри, которые систематизированы и определены в единой системе понятий. Главный недостаток классических сетей Петри (т.е. в их самом простом определении) заключается в сложности получаемых структур, так как даже для относительно простых систем моделирующие их сети Петри имеют значительные размеры. Стремление получить более компактную (ограниченную по размерам), удобную для исследования сеть Петри приводит к введению механизма персонификации позиций и маркеров, а вместе с этим и более общих определений условий возбуждения и срабатывания переходов. На множестве определенных классов сетей Петри вводятся операции над сетями Петри и исследуется ряд их свойств.

§1. Варианты обобщения сетей Петри

Сформулируем классическое определение сети Петри [1,2] в следующем виде.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Сеть Петри задается набором

$$L = \langle G=(X,Y,Z);\ \gamma;\ \mu_o;\ \delta_1;\ \delta_2 \rangle,$$

где 1) G - ориентированный двудольный граф с множеством вершин $(X \cup Y)$ и множеством дуг $Z = \{z \mid z \in (X\times Y) \cup (Y\times X)\}$, при этом: а) подмножество вершин $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m(x)}\}$ называется позициями сети Петри; б) подмножество вершин $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{m(y)}\}$ называется переходами сети Петри;

2) $\gamma: Z \Rightarrow \mathbb{N}^+$ - функция кратности дуг $z \in Z$, где $\gamma(z)$ - неотрицательное целое число;

3) $\mu_o: X \Rightarrow \mathbb{N}$ - функция начальной маркировки, которая ставит в соответствие каждой позиции $x \in X$ неотрицательное целое число $\mu_o(x)$, интерпретируемое как количество маркеров в позиции x;

4) $\delta_1(\mu_i, y)$ - условия возбуждения перехода $y \in Y$ в состоянии маркировки μ_i сети Петри, которые имеют вид:

$$\delta_1(\mu_i, y) = \forall x \in X \mid (x,y) \in Z:\ \mu_i(x) \geq \gamma(x,y),$$

т.е. во всех входных позициях x для перехода y количество маркеров $\mu_i(x)$ при текущей маркировке должно быть не меньше кратности соответствующей дуги (x,y); если условия возбуждения выполнены, то $\delta_1(\mu_i, y) = 1$ и переход y считается возбужденным, в противном случае $\delta_1(\mu_i, y) = 0$;

5) $\delta_2(\mu_i, y) = \mu_{i+1}$ - правило изменения маркировки в результате срабатывания возбужденного перехода y $(\delta_1(\mu_i, y)=1)$, которое для классической сети Петри определяется следующими соотношениями: $\forall x \in X:\ \mu_{i+1}(x) = \mu_i(x) + \tilde{\gamma}(y,x) - \tilde{\gamma}(x,y)$ (здесь и далее функция со значком ~ тождественно равна функции без этого знака на всей области ее определения и равна 0 вне ее), т.е. из каждой входной позиции x перехода y удаляется количество маркеров, равное кратности соответствующей дуги $\gamma(x,y)$, а в каждую входную позицию x перехода y добавляется соответствующее количество маркеров $\gamma(x,y)$.

Заметим, что начальная маркировка сети Петри μ_o и функции δ_1, δ_2 определяют некоторое множество допустимых последовательностей маркировок $(\mu_o,\mu_1,\dots,\mu_k)$, которые будем обозначать $M(L)$. Маркировка μ считается достижимой в сети Петри L, если существует $(\mu_o,\mu_1,\dots,\mu_k) \in M(L)$ и $\mu = \mu_k$.

При определении 1 в сети Петри в условиях маркировки μ_i может быть несколько возбужденных переходов $y \in Y$ (т.е. некоторое подмножество переходов $Y_i^* = \{y \in Y \mid \delta_1(\mu_i,y)=1\}$), а механизм выбора порядка срабатывания переходов не определен. В этих сетях возбужденные переходы могут срабатывать в произвольном порядке. Для устранения этой неопределенности введем функцию $\delta_3(\mu_i) = y^*$, которая задает правила выбора наиболее приоритетного перехода $y^* \in Y_i^*$ в условиях маркировки μ_i. Введение этой функции позволяет определить класс сетей Петри с приоритетами [1] следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Сеть Петри с приоритетами задается набором

$$L = \langle G=(X,Y,Z);\ \gamma;\ \mu_o;\ \delta_1;\ \delta_2;\ \delta_3 \rangle ,$$

где а) компоненты G, γ, μ_o, δ_1, δ_2 такие же,как в определении 1; б) $\delta_3(\mu_i) = y^*$ - функция выбора возбужденного перехода y^*, который должен срабатывать в условиях маркировки μ_i.

При спецификации моделируемых систем сетями Петри можно интерпретировать: а) маркеры как элементы системы; б) позиции как допустимые состояния элементов системы; в) переходы как процессы, переводящие элементы системы из одного допустимого состояния в другое; г) функцию начальной маркировки μ_o как формирование исходного состояния системы. Таким образом, спецификация пространства допустимых состояний моделируемой системы при определениях 1 и 2 сетей Петри полностью задается множеством всех допустимых маркировок (достижимых из начальной маркировки μ_o), а спецификация пространства допустимых состояний элементов системы задается множеством позиций X. При этом набор характеристик (параметров, переменных и т.п.), описывающих отдельные элементы и их состояния, как бы вынесены за определение сети Петри, т.е. одна сеть Петри может служить моделью разных прикладных систем. С точки зрения развития методов анализа сетей Петри это положительный момент. Однако при решении прикладных задач при исследовании сети Петри и интерпретации результатов формального анализа для моделируемой системы целесообразно иметь в явном виде в определении сети Петри характеристики элементов и их допустимых состояний, т.е. в явном виде указать для позиций сети Петри набор параметров и переменных, которые им соответствуют в моделируемой системе. В результате приходим к определению следующего класса сетей Петри - сети Петри с персонифицированными позициями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Сеть Петри с персонифицированными позициями задается набором

$$L = \langle G = (X,Y,Z);\ P;\ B;\ \gamma;\ \mu_o;\ \delta \rangle,$$

где а) G, γ, μ_o те же, что и в определениях 1,2;

б) $\delta = (\delta_1, \delta_2, \emptyset)$ или $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ те же, что и в определениях 1 и 2;

в) $P = \bigcup\limits_{x \in X} P_x$ - множество имен параметров, характеризующих элементы моделируемой системы, а P_x - набор имен параметров, соответствующих позиции $x \in X$;

г) $B = \bigcup\limits_{x \in X} B_x = \bigcup\limits_{p \in P} B_p$ - область всех допустимых значений параметров; $B_x = \{b_x(p) \mid p \in P_x\}$ - множество значений для набора параметров P_x; B_p - множество всех допустимых значений для параметра $p \in P$.

Представление моделируемой системы в виде простой сети Петри - это ее описание на логическом уровне. В принципе с ее помощью возможно отразить синхронную динамику системы, однако, достигается это за счет усложнения сети и увеличения ее размерности, что делает ее слишком громоздкой даже для очень простых динамических систем.

Этот недостаток устраняется путем включения в сети Петри временных параметров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Временная сеть Петри с персонифицированными позициями (в дальнейшем временная сеть Петри) задается набором

$$L = \langle G = (X,Y,Z);\ P;\ B;\ T;\ \gamma;\ \mu_o;\ \delta_1;\ \delta_2;\ \delta_3 \rangle,$$

где а) G, P, B, γ те же, что и в определении 3;

б) $T : Y \Rightarrow \mathbb{N}$ – функция, ставящая в соответствие каждому переходу натуральное число, характеризующее длительность реализации перехода (количество тактов);

в) $\mu_o = \{\mu_o(x,\tau) \in \mathbb{N} \mid x \in X,\ \tau \in \mathbb{N}\}$ - функция начальной маркировки, каждой позиции $x \in X$ и каждому номеру такта $\tau \in \mathbb{N}$, ставящая в соответствие натуральное число $\mu_o(x,\tau)$, характеризующее количество маркеров, находящихся в позиции x, которые стали или будут доступны для переходов, начиная с момента времени (номера такта) τ;

г) $\delta_1(\mu_i,y)$ – функция, определяющая условия возбуждения перехода в состоянии маркировки μ_i, которая имеет вид:

$$\delta_1(\mu_t,y) = \forall x \in X \mid (x,y) \in Z:\ \sum_{\tau \leq t} \mu_t(x,\tau) \geq \gamma(x,y),$$

т.е. для любой входной позиции x перехода y количество маркеров, доступных для переходов в момент t, должно быть не меньше кратности дуги (x,y);

д) $\delta_2(\mu_t,\hat{Y}_t) = \mu_{t+1}$ - функция, описывающая правила изменения маркировки μ_t на μ_{t+1} в результате срабатывания переходов из множества $\hat{Y}_t$ $(\hat{Y}_t = \delta_3(\mu_t))$, которая имеет вид:

$$\forall x \in X: \begin{cases} \forall \tau < t: \mu_{t+1}(x,\tau) = \mu_t(x,\tau) - \sum_{y \in \hat{Y}_t} \tilde{\gamma}(x,y); \\ \forall \tau \geq t+1: \mu_{t+1}(x,\tau) = \mu_t(x,\tau) + \sum_{y \in \hat{Y}_t \mid \tau = t+T(y)} \tilde{\gamma}(y,x); \end{cases}$$

е) $\delta_3(\mu_t) = \hat{Y}_t$ – функция, выбирающая в условиях маркировки μ_t подмножество возбужденных переходов $\hat{Y}_t$, которые должны сработать, удовлетворяющее следующему условию:

$$\forall x \in X: \sum_{y \in \hat{Y}_t} \tilde{\gamma}(x,y) \leq \sum_{\tau \subseteq t} \mu_t(x,\tau),$$

т.е. маркеров в позициях в условиях маркировки μ_t достаточно для того, чтобы сработали все переходы из множества $\hat{Y}$.

Представление моделируемых систем временны́ми сетями Петри не снимает всех проблем, в частности: 1) даже при небольших моделируемых системах временна́я сеть Петри может иметь большую размерность и сложную структуру; 2) поскольку маркеры в позициях временно́й сети Петри неразличимы, часто возникают трудности с персонификацией маркеров: далеко не всегда оказывается рациональным проводить их персонификацию на уровне позиций; 3) в реальных системах (в том числе и производственных) многие процессы могут быть реализованы альтернативными способами. Во временно́й сети Петри данный факт учитывается за счет топологии графа G, что во многих случаях затрудняет анализ сети Петри и решения на ее основе прикладных задач.

Эти недостатки устраняются в следующем варианте обобщения сетей Петри, в котором вводится персонификация маркеров:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Обобщенная временна́я сеть Петри задается набором

$$L = \langle G = (X,Y,Z);\ P;\ \bar{P};\ B;\ \bar{B};\ Q;\ T;\ \mu_0;\ \delta_1;\ \delta_2;\ \delta_3 \rangle,$$

где а) G та же, что и в определениях 1-4;

б) P, B такие же, как и в определениях 3 и 4;

в) $\overline{P} = \bigcup\limits_{x \in X} \overline{P}_x$ – множество имен параметров, характеризующих элементы моделируемой системы, а $\overline{P}_x$ – набор имен параметров для маркеров, находящихся в позиции x;

г) $\overline{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \overline{B}_x$ – множество наборов значений имен параметров, где $\overline{B}_x = \bigcup\{b_x(p) \in B_p | p \in \overline{P}_x\}$ – совокупность множеств значений для набора имен параметров $\overline{P}_x$; B_p – множество всех допустимых значений для параметра $p \in P$.

д) $Q = \bigcup\limits_{y \in Y} Q_y$ – объединение множеств допустимых способов для срабатывания переходов;

$$\forall y \in Y: Q_y = \{q = \{\gamma_q(z, \overline{b}_x) \in \mathbb{N} | x \in z \in Z, \ \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x\}\} \ -$$

множество допустимых способов для срабатывания перехода y, где $\gamma_q(z, \overline{b}_x)$ – количество маркеров с множеством значений $\overline{b}_x$ для набора имен параметров $\overline{P}_x \subseteq \overline{P}(x \in z)$: 1) необходимых в позиции x для срабатывания перехода y способом q, если $z = (x,y)$; 2) которые должны появиться в позиции x после срабатывания перехода y способом q, если $z = (y,x)$;

е) $T : Q \Rightarrow \mathbb{N}$ – функция, задающая длительность срабатывания каждого перехода для каждого допустимого способа;

ж) $\mu_o = \{\mu_o(x, b_x, \tau) \in \mathbb{N} | x \in X, \ \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x, \ \tau \in \mathbb{N}\}$ – функция начальной маркировки, где $\mu_o(x, \overline{b}_x, \tau)$ – количество маркеров в позиции x, обладающих множеством значений $\overline{b}_x$ набора имен параметров $\overline{P}_x$, доступных для переходов, начиная с момента времени (номера такта) τ;

з) $\delta_1(\mu_t, y, q) = \forall x \in X | (x,y) \in Z:$

$$\sum_{\tau \le t} \mu_t(x, \overline{b}_x((x,y),q), \tau) \ge \gamma_q((x,y), \overline{b}_x(x,y),q)) \ -$$

функция, определяющая условия возбуждения перехода y для допустимого способа его срабатывания q в условиях маркировки μ_t, где

$\bar{b}_x((x,y),q)$ – множество значений набора имен параметров, соответствующих дуге (x,y), для допустимого способа q, т.е. во всех входных позициях перехода y количество маркеров, обладающих набором значений имен параметров $\bar{b}_x$, определяемых допустимым способом q и доступных для переходов, должно быть не меньше, чем это определено в допустимом способе;

и) $\delta_2(\mu_t,\hat{D}_t) = \mu_{t+1}$ – функция, описывающая правила изменения маркировки μ_t на μ_{t+1} в результате реализации всех допустимых способов из множества $\hat{D}_t (\hat{D}_t = \delta_3(\mu_t))$, имеет вид:

$$\forall x \in X\ \forall \bar{b}_x \subseteq \bar{B}_x :$$

$$\mu_{t+1}(x,\bar{b}_x,t+1) = \mu_t(x,\bar{b}_x,t) - \sum_{(y,q)\in\hat{D}_t} \tilde{\gamma}_q((y,x),\bar{b}_x),$$

$$\forall x \in X\ \forall \bar{b}_x \subseteq \bar{B}_x\ \forall \tau > t:$$

$$\mu_{t+1}(x,\bar{b}_x,\tau) = \mu_t(x,\bar{b}_x,\tau) + \sum_{(y,q)\in\hat{D}_t, T(q)=\tau-t} \tilde{\gamma}_q((y,x),\bar{b}_x);$$

к) $\delta_3(\mu_t) = \hat{D}_t$ – функция, выбирающая в условиях маркировки μ_t подмножество допустимых способов, возбуждающих переходы, $\hat{D}_t = \{(y,q) | y \in Y,\ q \in Q,\ \delta_1(\mu_t,y,q) = 1\}$ такое, что

$$\forall x \in X\ \forall \bar{b}_x \subseteq \bar{B}_x : \sum_{(y,q)\in\hat{D}_t} \tilde{\gamma}_q((x,y),b) \leq \sum_{\tau \leq t} \mu_t(x,b_x,\tau)$$

(т.е. чтобы в каждой позиции количество маркеров, необходимых для реализации всех выбранных допустимых способов, не превышало количество маркеров, имеющихся в наличии).

Таким образом, мы определили обобщенную временную сеть Петри (в дальнейшем будем называть ее обобщенная сеть Петри), которая предлагается в качестве инструмента спецификации при моделировании сложных дискретных динамических систем. Рассмотрим некоторые свойства рассматриваемых классов сетей Петри.

ТЕОРЕМА 1. *Обобщенная сеть Петри, в которой* $\overline{P} = \emptyset$, $\overline{B} = \emptyset$ *и* $\forall y \in Y: \# Q_y = 1$ ($\# Q_y$ *- количество элементов в множестве* $\# Q_y$), *является временно́й сетью Петри.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обобщенной сети Петри и во временно́й сети Петри одинаково определяются граф G и множества P и B.

Так как для данной обобщенной сети Петри $\forall y \in Y: \# Q_y = 1$ и $\overline{B} = \emptyset$, то $\forall y \in Y$ в этой сети множество $Q_y \subseteq Q$ имеет вид: $Q_y = \{\gamma_q(z) \in N^+ | z = (x,y) \in Z \vee z = (y,x) \in Z\}$, т.е. множество Q ставит в соответствие каждой дуге $z \in Z$ натуральное число $\gamma_q(z)$, однозначно соответствуя функции кратности дуг γ для временно́й сети Петри с персонифицированными позициями.

Так как в каждом из множеств Q_y, $y \in Y$, содержится один допустимый способ $q \in Q$ $(\forall y \in Y: \# Q_y = 1)$, то функцию $T: Q \Rightarrow N$ в обобщенной сети Петри можно переписать для временно́й сети Петри как $T: Y \Rightarrow N$.

Убирая из определения функции начальной маркировки μ_o и функции δ_1, δ_2, δ_3 для обобщенной сети Петри элементы множества $\overline{B}$, так как по условию теоремы таковые отсутствуют, получим определения этих функций из временно́й сети Петри. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

СЛЕДСТВИЕ. *Временна́я сеть Петри является обобщенной сетью Петри.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве теоремы 1 было по сути показано взаимооднозначное соответствие между определениями временно́й сети Петри и обобщенной сети Петри, в которой $\overline{P} = \emptyset$, $\overline{B} = \emptyset$ и $\forall y \in Y: \# Q_y = 1$.

Таким образом, мы выяснили, что класс временны́х сетей Петри является подклассом обобщенных сетей Петри. Покажем теперь более тесную связь между этими двумя классами, а именно, что любую обобщенную сеть Петри можно промоделировать временно́й сетью Петри так, чтобы обе эти сети с равной степенью адекватности соответствовали системе, которую они моделируют.

Приведем алгоритм построения такой временно́й сети Петри.

Алгоритм 1. Пусть дана обобщенная сеть Петри

$$L = \langle G = (X,Y,Z);\ P;\ \overline{P};\ B;\ \overline{B};\ Q;\ T;\ \mu_o;\ \delta_1;\ \delta_2;\ \delta_3 \rangle .$$

Сконструируем для нее временну́ю сеть Петри с персонифицированными позициями:

$$L' = \langle G' = (X',Y',Z');\ P';\ B';\ T';\ \gamma';\ \mu_o';\ \delta_1';\ \delta_2';\ \delta_3' \rangle .$$

1) $P' := P \cup \overline{P}$, $B' := B \cup \overline{B}$;

2) $\forall x \in X\ \forall b_x = B_x \cup \overline{b}_x$ $(\overline{b}_x \subseteq B_x)$ строится одна позиция x' в X', для этой позиции $P_x' := P_x \cup \overline{P}_x$, $B_x' = b_x$;

3) $\forall y \in Y\ \forall q \in Q_y$ строится один переход y' в Y', $T'(y') := T(q)$;

4) $Z' = \{(x',y') | x' \in X',\ y' \in Y',\ \exists q \in Q_y\colon \gamma_q((x,y),\overline{b}_x) \in$ $\in q$, где y,q соответствуют y', $\overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x$ соответствует $x'\} \cup$ $\cup \{(y',x') | x' \in X',\ y' \in Y',\ \exists q \in Q_y\colon \gamma_q((y,x),\overline{b}_x) \in q$, где y,q соответствуют y', $\overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x$ соответствует $x'\}$;

5) $\forall y \in Y\ \forall q \in Q_y\ \forall x \in X\ \forall \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x\colon \tilde{\gamma}'(z') := \tilde{\gamma}(z,\overline{b}_x)$, где $x' \in z'$ соответствует $(x,\overline{b}_x)$, $y' \in z'$ соответствует (y,q) а $z = (x,y)$ или $z = (y,x)$;

6) $\forall x' \in X'\ \forall \tau \in \mathbb{N}\colon \mu_o'(x',\tau) := \mu_o(x,\overline{b}_x,\tau)$, где x' соответствует паре $(x,\overline{b}_x)$;

7) Функции δ_1' и δ_2' стандартно определяются для любой временно́й сети Петри с персонифицированными позициями;

8) $\delta_3'(\mu_t') := Y_t^{o'}$, где $Y_t^{o'}$ такое, что для любого перехода $y' \in Y'$ в множестве $\hat{D}_t = \delta_3(\mu_t)$ существует пара (y,q), для которой он был построен, и для любой пары $(y,q) \in \hat{D}_t$ в множестве $Y_t^{o'}$ должен быть переход, построенный для этой пары;

9) пока в множестве X' существуют множества X^o такие, что $\# X^o > 1$ и $\forall x' \in X^o$ $\forall x'' \in X^o$: $B'_{x'} = B'_{x''}$:

- выбираем в X' такое множество и заменяем его на одну позицию x' $(X' := (X' \setminus X^o) \cup x')$;

- во всех $z \in Z'$, содержащих позицию из X^o, заменяем ее на x', соответственно корректируя функцию γ' $(\gamma'(z') = \gamma'(z), z' \in \in x')$;

$$- \forall \tau \in \mathbf{N}: \quad \mu'_o(x', \tau) := \sum_{x \in X^o} \mu'_o(x, \tau);$$

10) пока в множестве Y' существуют множества Y^o такие, что $\# Y^o > 1$ и $\forall y' \in Y^o$ $\forall y'' \in Y^o$ $\forall x \in X'$: $T'(y') = T'(y'')$ и $\gamma'(z') = \gamma'(z'')$, где $y' \in z'$, $y'' \in z''$, $x \in z'$, $x \in z''$:

- выбираем в Y' такое множество и заменяем его на один переход y' $(Y' := (Y' \setminus Y^o) \cup Y')$;

- $\forall x \in X'$: $\tilde{\gamma}'(x, y') := \tilde{\gamma}'(x, y)$, $\tilde{\gamma}'(y', x) := \tilde{\gamma}'(y, x)$, $T'(y') := T'(y)$, где $y \in Y^o$;

- функция $\delta'_3(\mu'_t) = Y^{*'}_t$ корректируется так, что в $Y^{*'}_t$ все переходы из Y^o заменяются на переход y'.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Временную сеть Петри L', сконструированную по алгоритму 1 для обобщенной сети Петри L, будем называть базовой сетью Петри для L и обозначать БСП(L).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Обобщенные сети Петри, которым соответст - вует одна и та же базовая сеть Петри, будем называть Б-эквивалентными, а класс Б-эквивалентных обобщенных сетей Петри, имеющих одну и ту же базовую сеть Петри L, будем обозначать Б(L).

Таким образом, класс всех обобщенных сетей Петри $\mathcal{L}_o$ разбивается классом временных сетей Петри $\mathcal{L}^*_в$ таких, что $\forall L \in \mathcal{L}^*_в$: БСП$(L) = L$, на непересекающиеся подклассы $\mathcal{L}_o = \bigcup_{L \in \mathcal{L}^*_в}$ Б(L). Эти подклассы не пересекаются $(\forall L' \in \mathcal{L}^*_в\ \forall L'' \in \mathcal{L}^*_в$: $(L') \cap$ Б$(L'') = \emptyset \Leftrightarrow L' \neq L'')$, так как каждой обобщенной сети Петри, по алгоритму 1, однозначно соответствует только одна временная сеть Петри. Содержательно класс Б-эквивалентных обобщенных сетей Петри можно интерпретировать как совокупность обобщенных сетей Петри, с равной степенью адекватности моделирующих одну и ту же систему.

§2. Операции над сетями Петри

Таким образом, выше мы привели систематизированный набор определений сети Петри с разным уровнем обобщения. В зависимости от сложности моделируемых систем и тех задач, которые решаются, возможно применение того или иного класса сетей Петри. Рассматривая сети Петри в качестве языка спецификаций дискретных динамических систем, возникает вполне естественное желание проводить некоторые операции над сетями Петри, позволяющие эффективно решать задачи анализа и синтеза сложных систем. В данной работе нами определены следующие операции:

1) слияние двух обобщенных сетей Петри (Ф1);
2) слияние двух позиций обобщенной сети Петри (Ф2);
3) слияние двух переходов обобщенной сети Петри (Ф3);
4) разделение обобщенной сети Петри (Ф4);
5) разделение позиции обобщенной сети Петри (Ф5);
6) разделение перехода обобщенной сети Петри (Ф6).

<u>Операция Ф1</u> имеет вид Ф1(L',L") = L, где

$$L' = \langle G' = (X',Y',Z'),\ P',\ \overline{P}',\ B',\ \overline{B}',\ Q',\ T',\ \mu_0',\ \delta_1',\ \delta_2',\delta_3' \rangle,$$

$$L'' = \langle G'' = (X'',Y'',Z''),\ P'',\ \overline{P}'',\ B'',\ \overline{B}'',\ Q'',\ T'',\ \mu_0'',\delta_1'',\delta_2'',\ \delta_3'' \rangle,$$

$$L = \langle\ G = (X,Y,Z),\ P,\ \overline{P},\ B,\ \overline{B},\ Q,\ T,\ \mu_0,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3 \rangle .$$

Обобщенная сеть Петри L определяется следующим образом:

$G = G' \cup G''$ т.е. $X = X' \cup X''$, $Y = Y' \cup Y''$, $Z = Z' \cup Z''$;

$P = P' \cup P''$; $\overline{P} = P' \cup P''$; $B = B' \cup B''$; $\overline{B} = B' \cup B''$; ; $Q = Q' \cup Q''$;

$$\forall y \in Y\ \forall q \in Q_y \subseteq Q:\ T(q) = \begin{cases} T'(q), \text{ если } y \in Y'; \\ T''(q), \text{ если } y \in Y''; \end{cases}$$

$\mu_o = \mu'_o \cup \mu''_o$;

δ_1 и δ_2 определяются стандартным образом для любой обобщенной сети Петри;

$$\delta_3(\mu_t) = \delta'_3(\mu'_t) \cup \delta''_3(\mu''_t).$$

Операция Ф2 имеет вид $\Phi 2(L, x_1, x_2) = L'$, где

$L = \langle G = (X,Y,Z)\ P,\ \overline{P},\ B,\ \overline{B},\ Q,\ T,\ \mu_o,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\rangle$,

$\{x_1, x_2\} \subseteq X$,

$L' = \langle G' = (X',Y',Z'),\ P',\ \overline{P}',\ B',\ \overline{B}',\ Q',\ T',\ \mu'_o,\ \delta'_1,\ \delta'_2,\ \delta'_3\rangle$.

Обобщенная сеть Петри L' определяется следующим образом, $X' = (X \setminus \{x_1, x_2\}) \cup \{x'\}$, т.е. x_1 и x_2 заменяются на позицию x'; $Y' = Y$;

$$Z' = (Z \setminus \{z \in Z \mid z = (x,y) \vee z = (y,x),\ x \in \{x_1,x_2\},\ y \in Y\} \cup \\ \cup \{x',y) \mid (x_1 y) \in Z \vee (x_2,y) \in Z\} \cup \{(y,x) \mid (y,x_1) \in Z \vee \\ \vee (y,x_2) \in Z\},$$

т.е. все дуги, соединяющие позиции x_1 и x_2 с переходами, заменяются на дуги, соединяющие позицию x' с теми же переходами, сохраняя ориентацию дуг;

$$\forall x \in X \setminus \{x_1,x_2\}:\ P'_x = P_x;\ \overline{P}'_x = \overline{P}_x;\ B'_x = B_x;\ \overline{B}' = \overline{B}_x;$$

т.е. для всех позиций, кроме x_1 и x_2, все персонифицирующие множества сохраняются, а для позиции x' эти множества определяются следующим образом:

$$P'_{x'} = \{p \in P_{x_1} \cap P_{x_2} \mid b_{x_1}(p) = b_{x_2}(p),\ b_{x_1}(p) \in B_{x_1},\\ b_{x_2}(p) \in B_{x_2}\};$$

$$B'_{x'} = \{b_{x'}(p) \in B_{x_1} \mid p \in P'_{x'}\} = B_{x_1} \cap B_{x_2};$$

$$\overline{P}'_{x'} = (P_{x_1} \cup \overline{P}_{x_1} \cup P_{x_2} \cup \overline{P}_{x_2}) \setminus P'_{x'};$$

$$\overline{B}'_{x'} = \bigcup_{\overline{b}_{x_1} \in \overline{B}_{x_1}} (\overline{b}_{x_1} \cup \{b_{x_1}(p) \in B_{x_1} \mid p \in P_{x_1} \setminus P'_{x'}\}) \cup$$

$$\bigcup_{\overline{b}_{x_2} \in \overline{B}_{x_2}} (\overline{b}_{x_2} \cup \{b_{x_2}(p) \in B_{x_2} \mid p \in P_{x_2} \setminus P'_{x'}\}).$$

Множества допустимых способов реализации переходов выглядят следующим образом: $\forall y \in Y \mid (y,x_1) \notin Z \;\&\; (y,x_2) \notin Z \;\&\; \&\; (x_1,y) \notin Z \;\&\; (x_2,y) \notin Z$: $Q'_y = Q_y$, т.е. для переходов, не связанных дугами с позициями x_1 и x_2, множества допустимых способов сохраняются, а для переходов, связанных с этими позициями, переопределяются следующим образом:

$$\forall y \in Y \mid (y,x_1) \in Z \vee (y,x_2) \in Z \vee (x_1,y) \in Z \vee (x_2,y) \in Z :$$

$$Q'_y = \{q' = \{\gamma_{q'}(z',\overline{b}'_{x'}) = \gamma_q(z,\overline{b}_x) \mid \overline{b}_x \subseteq \overline{b}'_{x'} \subseteq \overline{B}'_{x'}\} \mid q \in Q_y\}.$$

Время реализации допустимых способов q' из Q' остается таким же, как и для реализации допустимого способа q из Q, который ему соответствует: $T'(q') = T(q)$.

Функция начальной маркировки определяется так:

$$\forall x \in X \setminus \{x_1,x_2\} \; \forall b'_x \subseteq B'_x \quad \forall \tau \in \mathbb{N} : \mu'_o(x,\overline{b}'_x,\tau) = \mu_o(x,\overline{b}_x,\tau),$$

где $\overline{b}_x$ $\overline{b}'_x$;

$\forall \overline{b}'_{x'} \subseteq \overline{B}'_{x'}$ $\forall \tau \in \mathbb{N}$:

$$\mu'_o(x',b'_{x'},\tau) = \begin{cases} \mu_o(x_1,\overline{b}_{x_1},\tau), \text{ если } \overline{b}_{x_1} \subseteq \overline{b}'_{x'}, \\ \mu_o(x_2,\overline{b}_{x_2},\tau), \text{ если } \overline{b}_{x_2} \subseteq \overline{b}'_{x'}. \end{cases}$$

Функции δ'_1 и δ'_2 определяются стандартным образом для любой обобщенной временно́й сети Петри. Функция $\delta'_3(\mu'_t) = D'_t$, в связи со слиянием позиций, переопределяется так, что в множество D'_t входят переходы и допустимые способы их реализации, соответствующие тем, которые были построены для переходов и допустимых способов из $D_t = \delta_3(\mu_t)$.

Операция Ф3 имеет вид $\Phi3(L,y_1,y_2) = L'$, где

$L = \langle G=(X,Y,Z),P,\overline{P},B,\overline{B},Q,T,\mu_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle$, $\{y_1,y_2\} \subseteq Y$;

$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_o',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle$.

Обобщенная сеть Петри L' определяется следующим образом:

$X' = X$;

$Y' = (Y \setminus \{y_1,y_2\}) \cup \{y'\}$, т.е. переходы y_1 и y_2 заменяются на переход y';

$Z' = (Z \cup \{(x,y') \mid (x,y_1) \in Z \vee (x,y_2) \in Z\} \cup \{(y',x) \mid (y_1,x) \in Z \vee (y_2,x) \in Z\}) \setminus (\{(x,y) \in Z \mid y \in \{y_1,y_2\}\} \cup \{(y,x) \in Z \mid y \in \{y_1,y_2\}\})$, т.е. все дуги, соединяющие переходы y_1 и y_2 с позициями, заменяются на дуги, соединяющие переход y' с теми же позициями, сохраняя ориентацию этих дуг;

$\forall x \in X$: $P_x' = P_x$; $\overline{P}_x' = \overline{P}_x$; $B_x' = B_x$; $\overline{B}_x' = \overline{B}_x$.

В множестве допустимых способов реализации переходов Q его подмножества Q_{y_1} и Q_{y_2} заменяются на $Q'_{y'} = Q_{y_1} \cup Q_{y_2}$, т.е. $Q' = (Q \setminus (Q_{y_1} \cup Q_{y_2})) \cup Q'_{y'}$.

Несмотря на изменение количества переходов, количество допустимых способов их реализации осталось прежним и каждому способу $q \in Q$ взаимооднозначно соответствует способ $q' \in Q'$, и время реализации этих способов одинаково ($T'(q') = T(q)$). Функция начальной маркировки не изменяется ($\mu_o' = \mu_o$). Функции δ_1' и δ_2' определяются стандартно для любой обобщенной временно́й сети Петри. С учетом взаимооднозначного соответствия допустимых способов реализации переходов Q и Q' функция $\delta_3'(\mu_t') = D_t'$ такова, что множество D_t' эквивалентно множеству D_t во всем, за исключением переходов y_1 и y_2, которые заменяются на переход y'.

Операция Ф4 имеет вид $\Phi4(L,G_1,G_2) = (L',L'')$, где

$L = \langle G=(X,Y,Z),P,\overline{P},B,\overline{B},Q,T,\mu_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle$;

$$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_o',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle;$$

$$L'' = \langle G''=(X'',Y'',Z''),P'',\overline{P}'',B'',\overline{B}'',Q'',T'',\mu_o'',\delta_1'',\delta_2'',\delta_3'' \rangle,$$

причем $G_1 \neq \emptyset$, $G_2 \neq \emptyset$, $G_1 \cup G_2 = G$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Обобщенные временные сети Петри L' и L'' определяются следующим образом:

$$G' = G_1;\ G'' = G_2;$$

$$P' = \bigcup_{x\in X'} P_x;\ P'' = \bigcup_{x\in X''} P_x;\ \overline{P}' = \bigcup_{x\in X'} \overline{P}_x;\ \overline{P}'' = \bigcup_{x\in X''} \overline{P}_x;$$

$$B' = \bigcup_{x\in X'} B_x;\ B'' = \bigcup_{x\in X''} B_x;\ \overline{B}' = \bigcup_{x\in X'} \overline{B}_x;\ \overline{B}'' = \bigcup_{x\in X''} \overline{B}_x;$$

$$Q' = \bigcup_{y\in Y'} Q_y;\ Q'' = \bigcup_{y\in Y''} Q_y;$$

$$\forall y \in Y' \quad \forall q \in Q_y' \subseteq Q':\ T'(q) = T(q);$$

$$\forall y \in Y'' \quad \forall q \in Q_y'' \subseteq Q'':\ T''(q) = T(q);$$

$$\mu_o' = \{\mu_o(x,\overline{b}_x,\tau) \mid x \in X',\ \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x',\ \tau \in \mathbb{N}\};$$

$$\mu_o'' = \{\mu_o(x,\overline{b}_x,\tau) \mid x \in X'',\ \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x'',\ \tau \in \mathbb{N}\}.$$

Функции δ_1', δ_2', δ_1'', δ_2'' задаются стандартно для любой обобщенной временной сети Петри. Функции $\delta_3'(\mu_t') = D_t'$, $\delta_3''(\mu_t'') = D_t''$ определяются таким образом, что

$$D_t' = \{(y,q) \in D_t \mid y \in Y'\},$$

$$D_t'' = \{(y,q) \in D_t \mid y \in Y''\},$$

где $D_t = \delta_3(\mu_t)$.

<u>Операция Ф5</u> имеет вид $\Phi5(L,x_o,\overline{B}_{x_o}^1,\overline{B}_{x_o}^2) = L'$, где

$$L = \langle G=(X,Y,Z),P,\overline{P},B,\overline{B},Q,T,\mu_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle,$$

$$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_o',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle,$$

$$x_o \in X,\ \overline{B}_{x_o}^1 \neq \emptyset,\ \overline{B}_{x_o}^2 \neq \emptyset,\ \overline{B}_{x_o}^1 \cup \overline{B}_{x_o}^2 = \overline{B}_{x_o} \subseteq \overline{B}.$$

Обобщенная временная сеть Петри L' определяется следующим образом:

$X' = (X \setminus \{x_o\}) \cup \{x_1, x_2\}$, т.е. позиция x_o заменяется на позиции x_1 и x_2;

$Y' = Y$;

$$Z' = (Z \setminus \{z \in Z \mid x_o \in z\}) \cup \{(x_1,y) \mid (x_o,y) \in Z,\ \exists q \in Q_y : \gamma_q((x_o,y),\bar{b}_{x_o}) \in q, \text{где } \bar{b}_{x_o} \subseteq \bar{B}^1_{x_o}\} \cup \{(y,x_1) \mid (y,x_o) \in Z,\ \exists q \in Q_y : \gamma_q((y,x_o),\bar{b}_{x_o}) \in q, \text{где } \bar{b}_{x_o} \subseteq \bar{B}^1_{x_o}\} \cup \{(x_2,y) \mid (x_o,y) \in Z,\ \exists q \in Q_y : \gamma_q((x_o,y),\bar{b}_{x_o}) \in q, \text{где } \bar{b}_{x_o} \subseteq \bar{B}^2_{x_o}\} \cup \{(y,x_2) \mid (y,x_o) \in Z,\ \exists q \in Q_y : \gamma_q((y,x_o),\bar{b}_{x_o}) \in q, \text{где } \bar{b}_{x_o} \subseteq \bar{B}^2_{x_o}\};$$

$\forall x \in X \setminus \{x_o\}$; $P'_x = P_x$; $\bar{P}'_x = \bar{P}_x$; $B'_x = B_x$; $\bar{B}'_x = \bar{B}_x$;

т.е. для всех позиций, кроме x_o, все персонифицирующие множества сохраняются, а для позиций x_1 и x_2 эти множества определяются следующим образом:

$$P'_{x_1} = P_{x_o} \cup \{p \in \bar{P}_{x_o} \mid \forall \bar{b}'_{x_o} \subseteq \bar{B}^1_{x_o}\ \forall \bar{b}''_{x_o} \subseteq \bar{B}^1_{x_o}\ \forall b'_{x_o}(p) \in \bar{b}'_{x_o}\ \forall b''_{x_o}(p) \in \bar{b}''_{x_o} : b'_{x_o}(p) = b''_{x_o}(p)\};$$

$$P'_{x_2} = P_{x_o} \cup \{p \in \bar{P}_{x_o} \mid \forall \bar{b}'_{x_o} \subseteq \bar{B}^2_{x_o}\ \forall \bar{b}''_{x_o} \subseteq \bar{B}^2_{x_o}\ \forall b'_{x_o}(p) \in \bar{b}'_{x_o}\ \forall b''_{x_o}(p) \in \bar{b}''_{x_o} : b'_{x_o}(p) = b''_{x_o}(p)\};$$

$$B'_{x_1} = B_{x_o} \cup \{b_{x_o}(p) \in \bar{b}_{x_o} \subseteq \bar{B}^1_{x_o} \mid p \in P'_{x_1} \setminus P_{x_o}\};$$

$$B'_{x_2} = B_{x_o} \cup \{b_{x_o}(p) \in \bar{b}_{x_o} \subseteq \bar{B}^2_{x_o} \mid p \in P'_{x_2} \setminus P_{x_o}\};$$

$\bar{P}'_{x_1} = \bar{P}_{x_o} \setminus P'_{x_1}$; $\bar{P}'_{x_2} = \bar{P}_{x_o} \setminus P'_{x_2}$;

$$\overline{B}'_{x_1} = \bigcup_{\overline{b}_{x_o} \in \overline{B}^1_{x_o}} \{b_{x_o}(p) \in \overline{b}_{x_o} \mid p \in \overline{P}'_{x_1}\};$$

$$\overline{B}'_{x_2} = \bigcup_{\overline{b}_{x_o} \in \overline{B}^2_{x_o}} \{b_{x_o}(p) \in \overline{b}_{x_o} \mid p \in \overline{P}'_{x_2}\}.$$

Для всех переходов, не связанных дугами с позицией x_o, множества допустимых способов их реализации не меняются

$$\forall y \in Y \mid (y,x_o) \notin Z \;\&\; (x_o,y) \notin Z: Q'_y = Q_y ,$$

а для переходов, которые связаны дугами с позицией x_o, эти множества определяются следующим образом:

$\forall y \in Y \mid (y,x_o) \in Z \vee (x_o,y) \in Z$: $Q'_y = \{q' = \{\gamma'_{q'}(z', b_{x' \in z'}) = \gamma_q(z, \overline{b}_{x \in z})$, если $z' = (x_1,y)$ или $z' = (y,x_1)$, то $z = (x_o,y)$ или $z = (y,x_o)$ соответственно, $\overline{b}'_{x_1} \subseteq \overline{B}'_{x_1}$, $\overline{b}'_{x_1} \subseteq \overline{b}_{x_o} \subseteq \overline{B}_{x_o}$; если $z' = (x_2,y)$ или $z' = (y,x_2)$, то $z = (x_o,y)$ или $z = (y,x_o)$ соответственно, $\overline{b}'_{x_2} \subseteq \overline{B}'_{x_2}$, $\overline{b}'_{x_2} \subseteq \overline{b}_{x_o} \subseteq \overline{B}_{x_o}$, иначе $z' = z \in Z$, $b'_{x' \in z'} = b_{x \in z} \subseteq \overline{B}_x\} \mid q \in Q_y\}$.

Таким образом, каждый допустимый способ реализации перехода $q \in Q$ взаимооднозначно соответствует способу $q' \in Q'$, а время реализации соответствующих способов q и q' одинаково ($T'(q') = T(q)$); функция начальной маркировки μ'_o определяется следующим образом:

$$\forall x \in X \setminus \{x_o\} = X' \setminus \{x_1, x_2\} \quad \forall \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x = \overline{B}'_x \quad \forall \tau < \mathbb{N}:$$

$$\mu'_o(x, \overline{b}_x, \tau) = \mu_o(x, \overline{b}_x, \tau);$$

$$\forall x \in \{x_1, x_2\} \quad \forall \overline{b}_x \subseteq \hat{B}'_x \quad \forall \tau \in \mathbb{N}:$$

$$\mu'_o(x, \overline{b}_x, \tau) = \mu_o(x_o, \overline{b}_{x_o}, \tau),$$

где $\overline{b}_{x_o} \supseteq \overline{b}_x$; функции δ'_1 и δ'_2 для всех обобщенных временных сетей Петри определяются стандартно; функция δ_3' взаимооднозначно соответствует функции δ_3 (соответствие между множествами $D_t' = \delta_3'(\mu_t')$ и $D_t = \delta_3(\mu_t)$ определяется соответствием между множествами Q' и Q) .

<u>Операция Ф6</u> имеет вид $\Phi6(L, y_o, Q_{y_o}^1, Q_{y_o}^2) = L'$, где

$$L = \langle G=(X,Y,Z), P, \overline{P}, B, \overline{B}, Q, T, \mu_o, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \rangle,$$

$$L' = \langle G'=(X',Y',Z'), P', \overline{P}', B', \overline{B}', Q', T', \mu_o', \delta_1', \delta_2', \delta_3' \rangle,$$

$$y_o \in Y,\ Q_{y_o}^1 \neq \emptyset,\quad Q_{y_o}^2 \neq \emptyset,\quad Q_{y_o}^1 \cup Q_{y_o}^2 = Q_{y_o}.$$

Обобщенная временная сеть Петри L' определяется следующим образом: $X' = X$; $Y' = (Y \setminus \{y_o\}) \cup \{y_1, y_2\}$, т.е. переход y_o заменяется на переходы y_1 и y_2;

$$Z' = (Z \setminus \{z \in Z \mid z \equiv y_o\}) \cup$$
$$\cup \{(x,y_1) \mid (x,y_o) \in Z \ \ \exists q \in Q_{y_o}^1 : q \ni \gamma_q((x,y_o),\overline{b}_x),\ \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x\} \cup$$
$$\cup \{(x,y_2) \mid (x,y_o) \in Z \ \ \exists q \in Q_{y_o}^2 : q \ni \gamma_q((x,y_o),\overline{b}_x),\ \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x\} \cup$$
$$\cup \{(y_1,x) \mid (y_o,x) \in Z \ \ \exists q \in Q_{y_o}^1 : q \ni \gamma_q((y_o,x),\overline{b}_x),\ \overline{b}_x \subseteq \overline{B}_x\} \cup$$
$$\cup \{(y_2,x) \mid (y_o,x) \in Z \ \ \exists q \in Q_{y_o}^2 : q \ni \gamma_q((y_o,x),b_x),\ b_x \subseteq B_x\};$$

набор множеств персонификации остается без изменения, т.е. $P' = P$; $\overline{P}' = \overline{P}$; $B' = B$; $\overline{B}' = \overline{B}$; множество допустимых способов реализации переходов остается без изменений ($Q' = Q$), изменяется лишь разбиение его на подмножества ($\bigcup_{y \in Y'} Q_y' = (\bigcup_{y \in Y \setminus \{y_o\}} Q_y) \cup$ $\cup\, Q_{y_1}' \cup Q_{y_2}'$, где $Q_{y_1}' = Q_{y_o}^1$, $Q_{y_2}' = Q_{y_o}^2$); функция, задающая длительность реализации допустимого способа, тоже остается без изменений ($\forall q \in Q = Q'$: $T'(q) = T(q)$); функция начальной маркировки μ_o' тождественно равна μ_o; функции δ_1' и δ_2' определяются стандартно для любой обобщенной временной сети Петри; учитывая взаимооднозначное соответствие допустимых способов реализации переходов Q' и Q, функция δ_3' отличается от функции δ_3 только тем, что в множестве $D_t' = \delta_3'(\mu_t')$, в отличие от $D_t = \delta_3(\mu_t)$, вместо перехода y_o стоят переходы y_1 или y_2, в зависимости от принадлежности соответствующего допустимого способа множеству $Q^1_{y_o}$ или $Q^2_{y_o}$.

Остановимся на некоторых свойствах введенных операций.

СВОЙСТВО 1. *Пусть* $\Phi 1(L',L'') = L$, *где*

$$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_o',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle,$$

$$L'' = \langle G''=(X'',Y'',Z''),P'',\overline{P}'',B'',\overline{B}'',Q'',T'',\mu_o'',\delta_1'',\delta_2'',\delta_3'' \rangle,$$

$$L = \langle G=(X,Y,Z),P,\overline{P},B,\overline{B},Q,T,\mu_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle,$$

тогда $\Phi 4(L,G',G'') = (L',L'')$.

СВОЙСТВО 2. *Пусть* $\Phi 4(L,G',G'') = (L'\ L'')$, *где*

$$L = \langle G=(X,Y,Z),P,\overline{P},B,\overline{B},Q,T,\mu_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle,$$

$$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_o',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle,$$

$$L'' = \langle G''=(X'',Y'',Z''),P'',\overline{P}'',B'',\overline{B}'',Q'',T'',\mu_o'',\delta_1'',\delta_2'',\delta_3'' \rangle,$$

$$G' \cup G'' = G,\ G' \cap G'' = \emptyset,$$

тогда $\Phi 1(L'.L'') = L$.

СВОЙСТВО 3. *Пусть* $\Phi 5(L,x_o,\overline{B}^1_{x_o},\overline{B}^2_{x_o}) = L'$, *где*

$$L = \langle G=(X,Y,Z),P,\overline{P},B,\overline{B},Q,T,\mu_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle,$$

$$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_o',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle,$$

$$x_o \in X,\ \overline{B}^1_{x_o} \neq \emptyset,\ \overline{B}^2_{x_o} \neq \emptyset,\ \overline{B}^1_{x_o} \cup \overline{B}^2_{x_o} = \overline{B}_{x_o};$$

$\Phi 2(L',x_1,x_2) = L$, *где* $\{x_1,x_2\} \subseteq X'$, *тогда и только тогда, когда* $X \setminus \{x_o\} = X' \setminus \{x_1,x_2\}$.

СВОЙСТВО 4. *Пусть* $\Phi 2(L,x_1,x_2) = L'$, *где*

$$L = \langle G=(X,Y,Z),P,P,B,B,Q,T,\mu_o,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle,$$

$\{x_1,x_2\} \subseteq X$,

$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_0',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle$;

$\Phi5(L',x_0,\ \overline{B}^1_{x_0},\overline{B}^2_{x_0}) = L$, *где* $\overline{B}^1_{x_0} \neq \emptyset$, $\overline{B}^2_{x_0} \neq \emptyset$, $\overline{B}^1_{x_0} \cup \overline{B}^2_{x_0} = \overline{B}'_{x_0}$, *тогда и только тогда, когда*

$$\overline{B}_{x_1} = \bigcup_{\overline{b}_{x_0} \subseteq \overline{B}^1_{x_0}} \{b_{x_0}(p) \in \overline{b}_{x_0} \mid p \in P_{x_1}\},$$

$$\overline{B}_{x_2} = \bigcup_{\overline{b}_{x_0} \subseteq \overline{B}^2_{x_0}} \{b_{x_0}(p) \in \overline{b}_{x_0} \mid p \in P_{x_2}\}.$$

СВОЙСТВО 5. *Пусть* $\Phi6(L,y_0,Q^1_{y_0},Q^2_{y_0}) = L'$, *где*

$L = \langle G=(X,Y,Z),P,\overline{P},B,\overline{B},Q,T,\mu_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle$,

$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_0',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle$,

$y_0 \in Y$, $Q^1_{y_0} \cup Q^2_{y_0} = Q_{y_0} \subseteq Q$;

$\Phi3(L',y_1,y_2) = L$, *где* $\{y_1,y_2\} \subseteq Y'$, *тогда и только тогда, когда* $Y \setminus \{y_0\} = Y' \setminus \{y_1,y_2\}$.

СВОЙСТВО 6. *Пусть* $\Phi3(L,y_1,y_2) = L'$, *где*

$L = \langle G=(X,Y,Z),P,\overline{P},B,\overline{B},Q,T,\mu_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3 \rangle$,

$\{y_1,y_2\} \subseteq Y$,

$L' = \langle G'=(X',Y',Z'),P',\overline{P}',B',\overline{B}',Q',T',\mu_0',\delta_1',\delta_2',\delta_3' \rangle$;

$\Phi6(L',y_0,Q^1_{y_0},Q^2_{y_0}) = L$, *где* $y_0 \in Y'$, *тогда и только тогда, когда* $Y' \setminus \{y_0\} = Y \setminus \{y_1,y_2\}$, $Q^1_{y_0} = Q_{y_1}$, $Q^2_{y_0} = Q_{y_2}$.

СВОЙСТВО 7. *Результат выполнения операции* Ф2 *над обобщенной сетью Петри* L *принадлежит классу* Б (БСП(L)).

СВОЙСТВО 8. *Результат выполнения операции* Ф3 *над обобщенной сетью Петри* L *принадлежит классу* Б (БСП(L)).

СВОЙСТВО 9. *Результат выполнения операции Ф5 над обобщенной сетью Петри* L *принадлежит классу* Б (БСП(L)).

СВОЙСТВО 10. *Результат выполнения операции Ф6 над обобщенной сетью Петри* L *принадлежит классу* Б (БСП(L)).

Свойства 1-10 доказываются прямой подстановкой в соответствующие определения. Так как эти доказательства достаточно очевидны, но очень громоздки, в настоящей работе мы их опускаем.

В качестве следствия свойств 7-10 можем сформулировать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каждый класс Б-эквивалентных сетей Петри замкнут относительно операций* Ф2,Ф3,Ф5,Ф6.

ТЕОРЕМА 2. *Любую обобщенную временную сеть Петри* L, *используя операции* Ф2,Ф3,Ф5 *и* Ф6, *можно привести к базовой сети Петри* БСП(L).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана обобщенная временная сеть Петри

$$L = \langle G=(X,Y,Z), P, \overline{P}, B, \overline{B}, Q, T, \mu_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \rangle.$$

Применим к ней следующую процедуру:

1) $L' := L$;

2) до тех пор пока $\overline{B}' \neq \emptyset$, где $B' \in L'$, применяем к сети L' операцию Ф5 следующим образом:

$$L' := Ф5(L', x', \overline{B}^1_{x_0}, \overline{B}^2_{x_0}),$$

где $\overline{B}^1_{x_0} = \overline{b}_{x_0} \subseteq \overline{B}'_{x_0} \subseteq \overline{B}'$, $\overline{B}^2_{x_0} = \overline{B}'_{x_0} \setminus \overline{B}^1_{x_0} \neq \emptyset$, $\overline{B}^1_{x_0} \neq \emptyset, x' \in X' \in G' \in L'$;

3) до тех пор пока $(\forall y' \in Y' \in G' \in L':\ Q = 1) = 0$, применяем к сети L' операцию Ф6 следующим образом:

$$L' := Ф6(L', y', Q^1_{y'}, Q^2_{y'}),$$

где $y' \in Y' \in G' \in L'$, $Q^1_{y'} \subseteq Q' \in L'$, $Q^2_{y'} \subseteq Q' \in L'$, $Q^1_{y'} \cup Q^2_{y'} = Q'_{y'}$, $Q^1_{y'} \cap Q^2_{y'} = \emptyset$, $\# Q'_{y'} \neq 1$;

4) до тех пор пока $\exists X^o \subseteq X' \mid \# X^o > 1 \ \& \ \forall x' \in X^o \ \forall x'' \in X^o$: $B'_{x'} = B'_{x''}$, применяем к сети L' операцию Ф2 следующим образом:

$L' := Ф2(L', x', x'')$, где $\{x', x''\} \subseteq X^o$;

5) до тех пор пока $\exists Y^o \subseteq Y' \mid \# Y^o > 1 \ \& \ \forall y' \in Y^o \ \forall y'' \in Y^o$ $\forall x \in X'$: $T'(y') = T'(y'') \ \& \ \gamma'(z') = \gamma'(z'')$, где $y' \in z'$, $y'' \in z''$, $x \in z'$, $x \in z''$, применяем к сети L' операцию Ф3 следующим образом: $L' := Ф3(L', y', y'')$, где $\{y', y''\} \subseteq Y^o$.

После выполнения пп.1-3 настоящей процедуры получаем сеть такую же, что и после выполнения пп.1-8 в алгоритме 1, а пп.4 и 5 в этой процедуре выполняют ту же функцию, что и пп.9 и 10 в алгоритме 1, что можно проверить прямой подстановкой в соответствующие определения.

Таким образом, мы построили базовую сеть Петри L' для сети L.

ТЕОРЕМА 3. *Любую обобщенную временную сеть Петри* L *с помощью операций* Ф2,Ф3,Ф4,Ф5 *можно привести к любой обобщенной временной сети Петри из класса* Б (БСП(L)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны две Б-эквивалентные обобщенные временные сети Петри L' и L'' (БСП(L') =БСП(L'')). Применяя процедуру из теоремы 2 к сетям L' и L'', получаем последовательности операций

$$(Ф'_{(i)} \in \{Ф2, Ф3, Ф5, Ф6\})_{i=\overline{1,n_1}} \text{ и } (Ф''_{(i)} \in \{Ф2, Ф3, Ф5, Ф6\})_{i=\overline{1,n_2}},$$

приводящих сети L' и L'' к БСП(L') = БСП(L''). Используя свойства 3-6, одну из этих последовательностей (пусть, для определенности, Ф'') преобразуем в последовательность операций $(F''_{(i)} \in \{\Phi2,\Phi3,\Phi5,\Phi6\})_{i=\overline{1,n_2}}$, приводящую сеть БСП(L'') в сеть L''. Соединяя две последовательности $(\Phi'_i)_{i=\overline{1,n_1}}$ и $(F''_i)_{i=\overline{1,n_2}}$, получаем последовательность операций $(\Phi'_i)_{i=\overline{1,n_1}}, (F''_i)_{i=\overline{1,n_2}}$, приводящую сеть L' к сети L''.

В заключение работы отметим, что сформулированный набор определений сетей Петри и введенные операции над ними рассматриваются нами в качестве теоретической основы создания программной инструментальной системы, которая ориентирована на анализ и конструирование сложных дискретных динамических систем.

Литература

1. КОТОВ В.Е. Сети Петри.- М.: Наука, 1984.- 158 с.

2. ПИТЕРСОН Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. - М : Мир, 1984.- 284 с.

3. ЛЕСКИН А.А., МАЛЬЦЕВ П.А., СПИРИДОНОВ А.М. Сети Петри в моделировании и управлении.- Л.: Наука,1989.- 133 с.

4. МУРАТА Т. Сети Петри: свойства, анализ, приложения // ТИИЭР.- 1982.- Т.77, № 4. - С.41-85.

5. БЕСТУЖЕВА И.И., РУДНЕВ В.В. Временные сети Петри.Классификация и сравнительный анализ// Автоматика и телемеханика.- 1990.- № 10.- С.3-21.

Поступила в редакцию
7 октября 1992 года

Повторное поступление в редакцию
24 ноября 1994 года