ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)
1995 год Выпуск 152

УДК 53.02+519.7+519.812.2

МЕТОД ТЕСТИРОВАНИЯ СИСТЕМ АКСИОМ*)

Е.Е Витяев, А.Д.Логвиненко

Введение

Существуют два различных подхода к тестируемости систем аксиом: индуктивный и статистический. Первый сформулирован в [1,с.28,29]: "The general problem of inductive generalization from limited data arise in testing all scientific theories." В частности, относительно эмпирических аксиом говорится:"...some axioms may be easier to disconfirm than others. For example, transitivity can be disconfirmed if there is a single intransitive triple, $a \geq b$, $b \geq c$, $c > a$. Usually the empirical interpretation of $\geq$ is such that it is possible to decide, for given a,b whether $a \geq b$, or at least, whether $a \geq b$ is extremely probable. With such an empirical interpretation, transitivity can be unequivocally rejected or, at least, assigned a very low probability." Тестирование аксиом на основе понятия опровержимости неявно предполагает, что принцип работы приборов и модели шумов нам известны и могут быть описаны в рамках известной нам теории. Поэтому мы в состоянии точно рассчитать допустимые и вероятные отклонения в показаниях приборов так, что если показания приборов вышли за эти пределы, то мы вправе отвергнуть аксиому. В теории измерений одним из приборов часто является человек, поэтому в ней это условие не всег-

*) Работа поддержана Royal Society Ex-Quota Fellowship и Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант № 93-1-88-12), частично профинансирована РФФИ (грант № 093-01-01506).

да выполнимо. Более приемлемым является статистический (эмпирический) подход, сформулированный в [2, с.251]: "The idea of testing axioms in many ways seems more closely associated with problems of statistical inference than directly with problems of axiomatizability." Ниже под эмпирическим подходом имеется в виду именно этот подход.

Проблема тестирования аксиом связана еще с одной проблемой - проблемой ошибок измерения. Эту проблему хорошо иллюстрирует пример, приведенный в [1, с.27]: "В качестве примера предположим, что мы сравниваем веса судя по отклонениям коромысловых весов. Когда объекты кладутся на обе чаши весов и это не вызывает отклонения от горизонтали, то действительно ли мы узнаем, что они имеют один и тот же вес? В операциональном смысле по отношению к этим весам - "да", но в некотором идеализированном смысле мы можем сомневаться, что "да" ... Так, мы ожидаем, что когда два веса отличаются на величину, сравнимую с чувствительностью весов, повторные наблюдения могут не дать того же результата... Очевидно, что в этом случае наблюдаемое отношение не является слабым порядком - в частности отношение неразличимости $\sim$ не транзитивно - и поэтому порядок не может быть представлен отношением $\geq$ ... С другой стороны, опыт показывает, что когда мы имеем такую последовательность (неотличимых по весу объектов - уточнение авторов) и когда условия наблюдения улучшены использованием более чувствительных весов, тогда по крайней мере одна из первоначальных эквивалентностей превращается в неэквивалентность и, при лучшей аппроксимации, свойства слабого порядка выполняются. Конечно, мы можем выбрать новое множество объектов, на котором проявится тот же феномен. Тем не менее, набор улучшающих аппроксимаций таков, что мы вынуждены вернуться к предположению о том, что в основе весов лежит слабый порядок и что в каждом конкретном множестве наблюдений есть систематические ошибки вследствие несовершенства прибора". Этот пример показывает насколько непростой является проблема учета точности измерений и влияния шумов.

В общем случае зависимость решения проблемы тестирования аксиом от решения проблемы ошибок измерения формулируется в [1] следующим образом: "Obviously, a subtly interplay obtains among observations, theory, and refined observations, in which the theory is both tested and used in a normative fashion to define the existence and nature of error. It is probably <u>not possible at present to formulate generally the exact conditions that lead us to attribute a discrepancy between theory and observation to error rather than to an inadequacy in the theory</u>." (Подчеркнуто нами.)

Ввиду неограниченного разнообразия возможных типов шумов и моделей ошибок наиболее естественным и простым подходом к выделению (обнаружению) теории в шумах являлся бы такой, в котором понятие аксиомы расширялось бы на вероятностный случай и давало бы определение аксиомы в языке первого порядка,устойчивое относительно как можно большего типа шумов. Насколько нам известно, такой попытки сделано не было. Мы предлагаем в качестве такого вероятностного определения аксиомы понятие вероятностной закономерности, введенное и исследованное в [3-5].Это понятие применялось для решения большого числа практических и модельных задач и показало свою эффективность и устойчивость.

В данной работе описывается метод тестирования аксиом,основанный на понятии вероятностной закономерности. Обоснование этого метода, а также введение понятия вероятностной закономерности,требует введения некоторых новых понятий.В §1 показано, как тестируемые аксиомы могут привести к универсальным утверждениям (содержащим только кванторы всеобжности), затем к бескванторному виду,а затем к совокупности формул специального вида,похожих на правила.Обычно семантика вероятности в языках первого порядка определяется на алгебраических системах. Учет различных типов шумов требует определения совместной вероятности на классе алгебраических систем (множестве возможных миров) и на каждой алгебраической системе (области) в отдельности.Такое определение вероятности основано на теоретических соображениях,но оно неприемлемо с практической точки зрения.Для практических целей в §2 вводятся понятия эксперимента,вероятностной модели эксперимента и вероятности для ограниченных фрагментов языка первого порядка.В §3 определяется понятие истинности утверждений на экспериментах и всем множестве экспериментов. С целью исследования взаимосвязи детерминированного и вероятностного случаев, в § 3-4 рассматривается случай, когда система аксиом истинна на всем множестве экспериментов. Так как на множестве экспериментов определена также вероятностная мера, то кроме истинности утверждения системы аксиом будут иметь значение условной вероятности, равное 1. В § 4 вводится определение вероятностной закономерности. Чтобы показать, что оно может служить вероятностным определением аксиомы, в этом параграфе доказывается, что аксиомы, истинные на всем множестве экспериментов, являются также вероятностными закономерностями. Кроме того,это определение применимо и к утверждениям,истинным не на всем множестве экспериментов. В § 5 описывается метод обнаружения вероятностных закономерностей по выборке экспериментов. Используя этот метод, можно проверить (с определенным доверительным уровнем), является ли некоторая система аксиом множеством вероятностных закономерностей. Если каждая аксиома данной системы аксиом является вероятностной закономерностью,то,ввиду устойчивости вероятностных закономерностей относительно шумов, мы вправе предположить, что данная система аксиом истинна на некоторой гипотетической незашумленной генеральной совокупности, зашумлением которой является наша генеральная совокупность.

§ 1. Приведение системы аксиом к специальному виду

Пусть дана некоторая конечная система аксиом Σ. Ограничимся рассмотрением только систем аксиом в некотором языке первого порядка L. Если в системе аксиом есть аксиомы с квантором существования, то для них проведем скулемизацию - удалим все кванторы существования, а связанные ими переменные заменим на эмпирически интерпретируемые скулемовские функции, зависящие от переменных, связанных предыдущими кванторами всеобщности. Это возможно, если для каждого квантора существования можно подобрать эмпирическую операцию, которая строит (находит, создает и т.д.) требуемый объект. Почти для всех систем аксиом теории измерений требуемые эмпирические операции существуют. Все вводимые операции надо, кроме того, ввести в язык L. После скулемизации система аксиом будет состоять только из универсальных формул (содержащих только кванторы всеобщности). Преобразуем эти формулы в логически эквивалентные, удалив все кванторы. Получим множество бескванторных формул, которое также будем обозначать через Σ.

Для определения понятий "эксперимент", "вероятность", "вероятностная модель эксперимента" и т.д. нам не потребуется весь язык первого порядка L. Понадобится только некоторый его конечный фрагмент, который мы сейчас и определим. Для системы аксиом определим сигнатуру $\mathfrak{S}(\Sigma) = \langle P_1^{n_1},\ldots,P_k^{n_k};\ f_1^{m_1},\ldots,f_l^{m_l}\rangle$, $k,l \geq 0$ (константы представлены 0-местными функциями), содержащую все символы отношений и операций, встречающиеся в аксиомах; $X(\Sigma) = \langle x_1,\ldots, x_m\rangle$ - множество переменных, входящих в Σ; $T(\Sigma) = \langle t_1,\ldots, t_n\rangle$ - множество термов, входящих в Σ (включая переменные и индивидные константы); $TT(\Sigma)$ - множество всех термов и их подтермов, кроме переменных, входящих в Σ; $U(\Sigma)$ - множество всех атомарных формул, входящих в Σ; $\mathfrak{B}(\Sigma)$ - замыкание относительно логических операций $\&, \vee, \neg$ множества $U(\Sigma)$.

Для тестирования системы аксиом ее необходимо привести к специальному виду. Рассмотрим систему аксиом Σ (без кванторов) в рамках исчисления высказываний (в процессе этого рассмотрения под знаком $\vdash$ будет пониматься доказуемость в исчислении высказываний). Приведем каждую аксиому к сокращенной конъюнктивной нормальной форме [8]. Напомним свойства этих форм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [8]. Дизъюнкция $C_1^{\varepsilon_1} \vee \ldots \vee C_n^{\varepsilon_n}$ называется *простым следствием* формулы A, где $C_1,\ldots,C_n$ - булевы переменные, а $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n = 0$ (1) означает, что переменная берется с отрицанием (без него) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $A \vdash C_1^{\varepsilon_1} \vee \ldots \vee C_n^{\varepsilon_n}$;

2) $C_1^{\varepsilon_1},\ldots,C_n^{\varepsilon_n}$ - все различны и среди $C_1^{\varepsilon_1},\ldots,C_n^{\varepsilon_n}$ нет одновременно переменной и ее отрицания;

3) если из дизъюнкции $C_1^{\varepsilon_1} \vee \ldots \vee C_n^{\varepsilon_n}$ удалить хотя бы один член, то она перестанет быть следствием A.

Известно [8], что если A не тождественно-истинная формула, то сокращенная конъюнктивная форма формулы A является конъюнкцией всех ее простых следствий.

Преобразуем простые следствия, используя тождества

$$
\begin{aligned}
& C_1^{\varepsilon_1} \vee \ldots \vee C_n^{\varepsilon_n} \equiv \\
& \equiv C_2^{1-\varepsilon_2} \;\&\; \ldots \;\&\; C_n^{1-\varepsilon_n} \Rightarrow C_1^{\varepsilon_1} \equiv \\
& \equiv C_1^{1-\varepsilon_1} \;\&\; C_3^{1-\varepsilon_3} \;\&\; \ldots \;\&\; C_n^{1-\varepsilon_n} \Rightarrow C_2^{\varepsilon_2} \equiv \ldots \equiv \\
& \equiv C_1^{1-\varepsilon_1} \;\&\; \ldots \;\&\; C_{n-1}^{1-\varepsilon_{n-1}} \Rightarrow C_n^{\varepsilon_n}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Заменим каждое простое следствие формулы A на конъюнкцию всех импликаций, получающихся из этого простого следствия в соответствии с тождествами (1). Полученную конъюнкцию импликаций назовем *импликативной формой формулы* A. Выясним свойства полученной импликативной формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Простым импликативным следствием* формулы A будем называть импликацию $C_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& C_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \Rightarrow C_n^{\varepsilon_n}$, удовлетворяющую условиям:

1) $A \vdash C_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& C_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \Rightarrow C_n^{\varepsilon_n}$;

2) $C_1^{\varepsilon_1},\ldots,C_n^{\varepsilon_n}$ – все различны и среди $C_1^{\varepsilon_1},\ldots,C_n^{\varepsilon_n}$ нет одновременно переменной и ее отрицания;

3) если из импликации $C_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& C_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \Rightarrow C_n^{\varepsilon_n}$ удалить один из членов $C_1^{\varepsilon_1},\ldots,C_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ или заменить высказывание $C_n^{\varepsilon_n}$ на "ложь", то полученная импликация уже не будет следствием A.

ЛЕММА 1. *Импликация* $C_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& C_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \Rightarrow C_n^{\varepsilon_n}$ *является простым импликативным следствием формулы* A *тогда и только тогда, когда дизъюнкция* $C_1^{1-\varepsilon_1} \vee \ldots \vee C_{n-1}^{1-\varepsilon_{n-1}} \vee C_n^{\varepsilon_n}$ *является простым следствием формулы* A □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Импликативная форма формулы* A *логически эквивалентна конъюнкции всех своих простых импликативных следствий* □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Не тождественно-истинная система аксиом* Σ *логически эквивалентна совокупности формул вида*

$$(A_1 \& \ldots \& A_n \Rightarrow A_o), \qquad (2)$$

где $A_j = \left[P_j^{n_j}\right]^{\varepsilon_j}(t,\ldots,g)$, $j = 0,1,\ldots,n$, - *литеры* (атомы или их отрицания) *атомов из* $U(\Sigma)$; $t,\ldots,g \in T(\Sigma)$ □

Формулы вида (2) будем называть правилами. Систему аксиом Σ, представленную как совокупность правил, также будем обозначать через Σ. Среди правил системы аксиом могут быть такие, которые выводятся из остальных правил. Можно получить минимальное число правил, если использовать не сокращенную конъюнктивную нормальную форму (к.н.ф.), а минимальную. Алгоритм получения минимальных к.н.ф. можно найти в [8].

В рамках языка первого порядка систему аксиом Σ можно еще упростить (под $\vdash$ снова будем понимать доказуемость в языке первого порядка).

Определим *обобщающую подстановку* как частичное отображение ϑ: $TT(\Sigma) \to X$, $X \cap X(\Sigma) = \emptyset$, X - некоторое множество переменных (это определение отличается от традиционного), удовлетворяющее условию: если терм t_1 является подтермом t_2, то отображение ϑ определено только для t_2. Применение подстановки ϑ к литере A означает, что термы, входящие в A, на которых подстановка определена, заменяются на соответствующие переменные. Множество всех обобщающих подстановок обозначим через Θ. Будем считать, что *пустая подстановка,* имеющая пустую область определения, принадлежит Θ.

Определим на правилах отношение $\sqsupset$ "быть более общим". Используя это отношение, правила из Σ можно максимально "обобщить", сохраняя их логическую эквивалентность исходной системе аксиом Σ. Смысл этого "обобщения" состоит в том, чтобы убрать всю "дублирующую" информацию из системы аксиом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отношение $(A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n \Rightarrow A_0) \sqsupset (B_1 \,\&\, \ldots$ $\ldots \,\&\, B_{n'} \Rightarrow B_0)$, $n, n' \geq 0$, имеет место тогда и только тогда, когда существует подстановка $\vartheta \in \Theta$ такая, что $A_0 = B_0\vartheta$, и $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \{B_1\vartheta, \ldots, B_{n'}\vartheta\}$. При этом либо ϑ не пустая подстановка, либо $n < n'$.

ЛЕММА 2. *Если* $C \sqsupset C'$, *то* $C \vdash C'$, C, C' - *правила* □

"Обобщим" систему аксиом Σ с помощью следующей процедуры. Последовательно переберем все правила из Σ и для каждого правила C найдем наиболее общее правило $C' \sqsupset C$ такое, что $\Sigma \vdash C'$ и правило C' уже нельзя обобщить, т.е. из $C'' \sqsupset C'$ следует, что $\Sigma \nvdash C''$ ($\nvdash$ обозначает недоказуемость). Заменим правило C на C' в Σ. Полученная система аксиом Σ будет зависеть, вообще говоря, от порядка перебора, но, как следует из леммы 2, она будет логически эквивалентна исходной.

§ 2. Эксперимент, вероятностная модель эксперимента, вероятность в языке первого порядка

Семантика вероятности в вероятностных логиках [6,7] определяется через алгебраические системы. В реальных экспериментах мы никогда не получаем целую алгебраическую систему. Поэтому, точно так же, как мы выбрали конечный фрагмент языка, определим и конечную конструкцию для семантики. Этой конструкцией будет понятие эксперимента.

Определим сначала понятие интерпретации и состояния как это обычно делается в языках первого порядка.

Пусть у нас есть некоторая генеральная совокупность объектов (стимулов) Γ. Под *интерпретацией* I будем понимать отображение, ставящее в соответствие каждому сигнатурному символу $\mathfrak{S}(\Sigma)$ набор $\Omega = \{ \langle P_1,\dots,P_k;\ f_1,\dots,f_l \rangle \}$, $k,l \geq 0$, эмпирических отношений и операций соответствующей местности, определенных на Γ. Это позволяет говорить об алгебраической системе $\langle \Gamma,\Omega \rangle$, хотя это не означает, что мы обязательно имеем ее актуально, мы можем предполагать, что она существует потенциально. Для нас интерпретация I это не просто отображение, она имеет эмпирическую интерпретацию. Если, например, испытуемый воспринимает одни и те же стимулы в разные моменты времени, то его ответы или действия в разные моменты времени могут быть различны. Интерпретация представляет собой готовность испытуемого (или экспериментальной процедуры) в данный момент времени отвечать или действовать тем или иным образом, т.е., с точки зрения интерпретации вероятности как предрасположенности к определенным ответам или действиям, интерпретация есть фиксация на момент проведения эксперимента некоторой предрасположенности всей экспериментальной процедуры.

Пусть S - множество всех возможных наборов $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ по m элементов из Γ. Под *состоянием* будем понимать отображение s: $x_i \to a_i$, $i = 1,\ldots,m$, ставящее в соответствие набору $\langle x_1,\ldots,x_m\rangle$ набор $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$. Это отображение распространяется до отображения s: $t_i \to a_i$, $i = 1,\ldots,n$, переводящего набор $\langle t_1,\ldots,t_n\rangle$ в набор $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, следующим образом: если t_i - переменная x_j, то $s(t_i) = a_j$; если t_i - индивидная константа $b \in \Gamma$, то $s(t_i) = b$; если $t = f^n(t_1,\ldots,t_j)$, то $s(t) = f(s(t_1),\ldots,s(t_j))$, где f - интерпретация на Γ функционального символа f^n.

Определим сначала неформально что такое эксперимент. Эксперимент состоит в том, что в определенный момент времени фиксируется некоторая интерпретация I; затем из множества Γ случайно и независимо выбирается набор объектов $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle$ (фиксируется некоторое состояние s) и подставляется вместо переменных $\{x_1,\ldots,x_m\}$ в термы из $T(\Sigma)$ (вместо констант в термы подставляются выделенные объекты; выбор осуществляется с возвращениями, либо в предположении, что есть много копий одного и того же объекта); проводятся все необходимые эмпирические операции (поиск,конструирование, создание и .т.д.) получения значений всех термов из $T(\Sigma)$; далее эмпирически определяются значения всех атомарных отношений из $U(\Sigma)$.

Результат *эксперимента* определим как набор $Exp(I,s) = \langle s(T(\Sigma)),U(\Sigma)\rangle$, где $s(T(\Sigma)) = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$.Запись $\langle s(T(\Sigma)), U(\Sigma)\rangle$, как и в случае алгебраических систем, предполагает,что значения истинности атомарных высказываний из $U(\Sigma)$ определены на $T(\Sigma)$. Обозначим через Exp множество всех возможных экспериментов, которые можно получить на Γ при различных состояниях из S и всевозможных интерпретациях.

В экспериментах есть несколько источников случайностей. Во-первых, случайный выбор объектов для эксперимента (выбор состояния), во-вторых, конструирование $T(\Sigma)$ может включать различные источники случайности (различные интерпретации для операций), в-третьих, определение значений атомарных высказываний может быть неоднозначным и, например, в случае ответов испытуемого, может содержать различные типы ошибок (различные интерпретации для отношений). Чтобы формально учесть все эти виды случайностей,определим вероятностную меру на булевой алгебре $\mathfrak{B}(\Sigma)$.

Вероятность в языке первого порядка обычно вводится различными способами. Например, в [6] она вводится в трех различных случаях:

1) как вероятность на области (алгебраической системе или эмпирической системе). В этом случае предполагается, что случайный выбор объектов производится из основного множества некоторой алгебраической или эмпирической системы. Эта вероятность учитывает только случайности, связанные с выбором состояний;

2) как вероятность на множестве возможных миров.Возможные миры определяются как множество алгебраических систем одной и той же сигнатуры, заданные на одном и том же основном множестве. Возможные миры различаются интерпретациями. В этом случае предполагается, что случайный выбор осуществляется между интерпретациями. Этот случай соответствует случайному выбору различных интерпретаций;

3) как совместная вероятность на области и возможных мирах. Эта вероятность получается определенным объединением двух предыдущих случаев - вероятностей на областях и вероятности на множестве возможных миров. Именно эта совместная вероятность учитывает все многообразие случайностей, возникающих в эксперименте. Понятие эксперимента, определенное выше,избавля-

ет нас от такой сложной конструкции, как совместное рассмотрение двух вероятностей: на областях и возможных мирах.

Во всех этих трех случаях вероятность удовлетворяет различным системам аксиом [6]. Но в этих системах аксиом есть общая часть. Воспользуемся ею для определения вероятностной меры на булевой алгебре $\mathfrak{B}(\Sigma)$. Пусть $\vdash$ - доказуемость в языке первого порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [7]. *Вероятностью* μ на множестве $\mathfrak{B}(\Sigma)$ называется отображение μ: $\mathfrak{B}(\Sigma) \to [0,1]$, удовлетворяющее для $\varphi,\psi \in \mathfrak{B}(\Sigma)$ условиям:

1. $\mu(\varphi \vee \psi) + \mu(\varphi \wedge \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$;
2. $\mu(\neg \varphi) = 1 - \mu(\varphi)$;
3. если $\vdash \varphi \equiv \psi$, то $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$;
4. если $\vdash \varphi$, то $\mu(\varphi) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Вероятностной моделью эксперимента* будем называть $\mathfrak{M} = \langle T(\Sigma),\mu \rangle$, где μ - вероятность на $\mathfrak{B}(\Sigma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Моделью эксперимента* Exp будем называть вероятностную модель эксперимента $\mathfrak{M} = \langle T(\Sigma), IF \rangle$, где IF: $\mathfrak{B}(\Sigma) \to \{0.1\}$ - частный случай вероятностной меры, когда вероятность принимает только два значения: 0 - false й 1 - true. Отображение IF также будем называть интерпретацией.

Заметим, что интерпретация I отображает сигнатурные символы в набор Ω эмпирических отношений и операций, а интерпретация IF (Int.Formal) чисто формально приписывает значения истинности утверждениям из $\mathfrak{B}(\Sigma)$. Определение 6 позволяет говорить о множестве всех возможных моделей экспериментов EXP.

Определим вероятность μ семантически как вероятностную меру на подмножествах экспериментов из EXP. Определим булеву алгебру $\mathfrak{D}$ подмножеств $EXP(B) = \{ \mathfrak{M} = \langle T(\Sigma), IF \rangle \mid \mathfrak{M} \in EXP, IF(B) = 1\}$, $B \in \mathfrak{B}(\Sigma)$, и на них вероятностную меру $\nu(EXP(B)) \overset{df}{=} \mu(B)$, $B \in \mathfrak{B}(\Sigma)$.

§ 3. Детерминированные закономерности

Определим понятие истинности системы аксиом Σ на множестве всех возможных экспериментов Exp.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Бескванторная формула C, содержащая только атомы из $U(\Sigma)$, истинна на $Exp(I,s) = \langle s(T(\Sigma)),U(\Sigma)\rangle$ (будем писать $Exp(I,s) \models C$) тогда и только тогда, когда она истинна на Γ при данной интерпретации I и состоянии s.

Для вычисления значения истинности формулы C достаточно вместо всех атомов формулы C подставить их значения истинности из $\langle s(T(\Sigma)),U(\Sigma)\rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Бескванторная формула, содержащая только атомы из $U(\Sigma)$, истинна на множестве Exp всех возможных экспериментов тогда и только тогда, когда она истинна на каждом эксперименте из Exp.

Чтобы выяснить взаимосвязь между детерминированным и вероятностным случаями, будем предполагать (см. §3,4), что множество экспериментов Exp удовлетворяет системе аксиом Σ, т.е. каждая аксиома истинна на Exp. Обозначим через PR(Exp) множество всех правил вида (2), истинных на Exp.

Правила на Exp характеризуются не только истинностью, но и вероятностью. Обозначим через $PR\mu$ множество всех правил $C = (A_1 \& \ldots \& A_n \Rightarrow A_0)$, вероятность посылки которых больше 0, $\mu(A_1 \& \ldots \& A_n) > 0$. В этом случае для правила C определена условная вероятность $\mu(A_0/(A_1 \& \ldots \& A_n))$ истинности заключения при истинности посылки. При $n = 0$ под правилом $A \leftarrow$ будем подразумевать правило $A_0 \leftarrow true$ с $\mu(true) = 1$. Под вероятностью $\mu(C)$ правила C будем понимать условную вероятность $\mu(A_0/(A_1 \& \ldots \& A_n))$, при $n = 0$ условная вероятность $\mu(C)$ будет совпадать с безусловной $\mu(A_0)$.

ЛЕММА 3. *Для аксиом* $C \in \Sigma$, $C \in PR\mu$, $C = (A_1 \& \ldots \& A_n \Rightarrow A_0)$ *выполнено равенство* $\mu(A_1 \& \ldots \& A_n) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Частный случай отношения $\sqsupset$, когда ϑ - пустая подстановка, будем обозначать через $\succ$. Отношение $(A_1 \& \ldots \& A_n \Rightarrow A_0) \succ (B_1 \& \ldots \& B_{n'} \Rightarrow A_0)$, $n' > n \;\; 0$, имеет место тогда и только тогда, когда $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \{B_1, \ldots, B_{n'}\}$.

ЛЕММА 4. *Если* $C \in PR(Exp)$ *и* $C \succ C'$, *то* $C' \in PR(Exp)$ □

Пусть $PRM(Exp) \subset PR(Exp)$ - множество всех максимальных по отношению $\succ$ правил из $PR(Exp)$. Правила из $PRM(Exp)$ нельзя обобщить, сохраняя их истинность на Exp. Правила из $PRM(Exp)$ будем называть *детерминированными закономерностями* на Exp.

ЛЕММА 5. $PRM(Exp) \vdash PR(Exp)$ □

ЛЕММА 6. $\Sigma \subset PRM(Exp)$, *где* Σ *- система аксиом, полученная в результате обобщения* □

§ 4. Вероятностные закономерности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Определим как отношение *вероятностной выводимости* $C' > C \overset{df}{\Leftrightarrow} C' \succ C \;\&\; \mu(C') < \mu(C)$, $C, C' \in PR\mu$.

ЛЕММА 7. *Если* $C' > C$, *то* $C' \vdash C$ *и* $\mu(C') < \mu(C)$ □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Вероятностной закономерностью* будем называть правило $C \in PR\mu$ такое, что из $C' \succ C$, $C' \in PR\mu$ следует $C' > C$.

Если детерминированные закономерности нельзя обобщить (логически усилить, см. леммы 2,4,5), сохраняя истинность на множестве экспериментов Exp, то вероятностные закономерности нельзя обобщить, не уменьшая их условную вероятность, т.е. вероятностные закономерности - это все логически самые сильные правила среди сравнимых по отношению $\succ$ правил с одинаковой условной вероятностью. Обозначим множество всех вероятностных закономерностей для вероятностной модели эксперимента $\mathfrak{M}$ через $PR(\mathfrak{M})$.

ЛЕММА 8. *Если для правила* C *существует правило* C', $C' \succ C$, $\mu(C') \geq \mu(C)$, *то* $C \notin PR(\mathfrak{M})$ □

ЛЕММА 9. *Если для правила* $C \in PR(Exp) \setminus PRM(Exp)$ *существует правило* $C' \in PR(Exp)$, $C' \succ C$, $C' \in PR\mu$, *то* $C \notin PR(\mathfrak{M})$ □

ТЕОРЕМА 1. *Детерминированная закономерность* $C = (A_1 \& \ldots \& A_n \Rightarrow A_o)$, $C \in PRM(Exp)$, $C \in PR\mu$ (в частности, аксиома) *является вероятностной закономерностью, если из* $C' \vdash C$, $C' \in PR\mu$ *следует* $\nu(\{\mathfrak{M} = \langle T(\Sigma), IF\rangle \mid \mathfrak{M} \models \neg C'\}) > 0$.

Смысл теоремы в том, что детерминированная закономерность является вероятностной закономерностью, если она не просто перестает быть истинной при попытке ее обобщения, но и мера тех случаев, где она становится ложной, больше 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3, $\mu(A_o/A_1 \& \ldots \& A_n) = 1$. Докажем, что из $C' \vdash C$, $C' \in PR\mu$, $C' = (B_1 \& \ldots \& B_{n'} \Rightarrow A_o)$, следует, что $\mu(A_o/B_1 \& \ldots \& B_{n'}) < \mu(A_o/A_1 \& \ldots \& A_n) = 1$. По условию $\nu(\{\mathfrak{M} = \langle T(\Sigma), IF\rangle \mid \mathfrak{M} \models \neg C'\}) > 0$. Отсюда следует, что $\nu(\{\mathfrak{M} = \langle T(\Sigma), IF\rangle \mid \mathfrak{M} \models (B_1 \& \ldots \& B_{n'}) \& \neg A_o\}) > 0$ и $\mu((B_1 \& \ldots \& B_{n'}) \& \neg A_o) > 0$. Тогда $\mu((B_1 \& \ldots \& B_{n'}) \& A_o) < \mu(A_o)$ и $\mu(A_o/B_1 \& \ldots \& B_{n'}) < 1$ □

§ 5. Метод тестирования систем аксиом

Пусть дана некоторая система аксиом Σ. Мы не будем предполагать далее, что эта система аксиом истинна на всем множестве экспериментов Exp. Опишем метод тестирования аксиом, который проверяет, является ли каждая аксиома данной системы аксиом вероятностной закономерностью. Если да, то, ввиду устойчивости вероятностных закономерностей относительно шумов и теоремы 1, мы вправе предположить, что данная система аксиом истинна (является множеством детерминированных закономерностей) на некото -

рой гипотетической незашумленной генеральной совокупности, зашумлением которой является наша генеральная совокупность.

Понятие вероятностной закономерности сформулировано в терминах вероятностных неравенств. Проверить выполнимость этих вероятностных неравенств можно на выборке из серии экспериментов с помощью определенных статистических критериев.

Предположим, что случайно и независимо в соответствии с вероятностной мерой μ проведена серия экспериментов и получена выборка экспериментов $Samp \subset Exp$.

Для статистической проверки любой аксиомы из Σ нам достаточно иметь статистику - число повторений каждого события булевой алгебры $\mathfrak{B}(\Sigma)$. Получение этой статистики упрощается тем, что нам достаточно знать только статистику для всех атомов булевой алгебры. Статистика любого события является суммой статистик тех атомов, из которых состоит событие. Статистику для атомов можно представить в виде специального массива.

Определим массив M объема 2^{n+1} (в соответствии с числом атомов $P_o, P_1, P_2, \ldots, P_n$ в $U(\Sigma)$). Значения истинности каждого отношения зададим числами 1 или 0 (1 - "истина", 0 - "ложь"). Каждый элемент массива $M[i_1,\ldots,i_{n+1}]$, $i_1,\ldots,i_{n+1} \in \{0,1\}$, равен числу случаев, сколько раз встретилось сочетание значений истинности $i_1,\ldots,i_{n+1}$ отношений $P_o, P_1, \ldots, P_n$ в экспериментах $Samp$. В дальнейшем мы будем предполагать, что статистика любого события $C \in \mathfrak{B}(\Sigma)$ нам известна, и обозначать ее через $n(C)$.

Проверим сначала для всех аксиом $C \in \Sigma$, выполнено ли условие $C \in PR\mu$, т.е. $\mu(A_1 \& \ldots \& A_n) > 0$, $C = (A_1 \& \ldots \& A_n \Rightarrow A_o)$. Для этого проверим, что $n(A_1 \& \ldots \& A_n) > 0$.

Рассмотрим сначала правила вида $P_1^{\varepsilon_1} \Rightarrow P_o^{\varepsilon_o}$. Так как в посылке стоит только один предикат $P_1^{\varepsilon_1}$, который можно удалить в процессе обобщения, то условие $C' \succ C$, $C' \in PR\mu$ из определе -

ния вероятностных закономерностей означает, что $C' = P_0^{\varepsilon_0}$. Из этого должно следовать, что $C' > C$, т.е. $\mu(P_0^{\varepsilon_0}/P_1^{\varepsilon_1}) > \mu(P_0^{\varepsilon_0})$.

Последнее неравенство можно переписать в виде $\mu(P_0^{\varepsilon_0}\&P_1^{\varepsilon_1}) > \mu(P_0^{\varepsilon_0}) * \mu(P_1^{\varepsilon_1})$.

Для проверки этого неравенства сформулируем гипотезу H_0 о независимости отношений $P_1^{\varepsilon_1}$ и $P_0^{\varepsilon_0}$:

$$H_0:\ \mu(P_0^{\varepsilon_0}\& P_1^{\varepsilon_1}) = \mu(P_1^{\varepsilon_1})*\mu(P_0^{\varepsilon_0})$$

против альтернатив:

$$H_1:\ \mu(P_0^{\varepsilon_0}\& P_1^{\varepsilon_1}) \neq \mu(P_1^{\varepsilon_1})*\mu(P_0^{\varepsilon_0}).$$

Эта гипотеза является сложной с одним ограничением и двумя степенями свободы [9]. Если гипотеза H_0 верна, то отношения $P_1^{\varepsilon_1}$ и $P_0^{\varepsilon_0}$ независимы и неравенство для условной вероятности не выполнено. Тогда формула $P_1^{\varepsilon_1} \Rightarrow P_0^{\varepsilon_0}$ не является вероятностной закономерностью. Если гипотеза H_0 неверна, то верна одна из альтернативных гипотез H_1, и тогда значения $P_1^{\varepsilon_1}$ и $P_0^{\varepsilon_0}$ зависимы между собой.

Гипотезу H_0 можно переформулировать также следующим образом. Пусть числа $n(P_1^{\varepsilon_1})$ и $n(P_1^{1-\varepsilon_1})$ фиксированы, а числа $n(P_1^{\varepsilon_1}\ \&\ P_0^{\varepsilon_0})$ и $n(P_1^{1-\varepsilon_1}\&\ P_0^{\varepsilon_0})$ являются независимыми случайными величинами. Тогда гипотеза H_0 является гипотезой о равенстве вероятностей в двух совокупностях и может быть представлена в виде гипотезы:

$$H_0:\ \mu(P_0^{\varepsilon_0}/P_1^{\varepsilon_1}) = \mu(P_0^{\varepsilon_0})$$

против альтернатив:

$$H_1:\ \mu(P_0^{\varepsilon_0}/P_1^{\varepsilon_1}) \neq \mu(P_0^{\varepsilon_0}).$$

Если гипотеза H_o неверна, то верна одна из гипотез H_1, и либо $\mu(P_o^{\varepsilon_o}/P_1^{\varepsilon_1}) > \mu(P_o^{\varepsilon_o})$, либо $\mu(P_o^{\varepsilon_o}/P_1^{\varepsilon_1}) < \mu(P_o^{\varepsilon_o})$. Если верно первое неравенство, то тестируемая формула

$$P_1^{\varepsilon_1} \Rightarrow P_o^{\varepsilon_o} \tag{3}$$

является вероятностной закономерностью, если второе, то - не является. По соотношениям

$$n(P_1^{\varepsilon_1} \& P_o^{\varepsilon_o}) > (n(P_1^{\varepsilon_1}) * n(P_o^{\varepsilon_o}))/n,$$
$$n(P_1^{\varepsilon_1} \& P_o^{\varepsilon_o}) < (n(P_1^{\varepsilon_1}) * n(P_o^{\varepsilon_o}))/n,$$

где n - общее количество экспериментов, можно определить, какое из неравенств, первое или второе, имеет место.

Чтобы проверить гипотезу H_o против альтернатив H_1, воспользуемся точным критерием независимости Фишера [9, с.739]. Этот критерий является равномерно наиболее мощным, несмещенным критерием как в случае проверки гипотезы о двумерной независимости, так и в случае проверки гипотезы о равенстве вероятностей в двух совокупностях [9,с.742]. Применив этот критерий с некоторым доверительным уровнем α, мы получим, что либо гипотеза H_o верна и, следовательно, значения истинности отношений $P_1^{\varepsilon_1}$ и $P_o^{\varepsilon_o}$ независимы, и, значит, нет никакой закономерности, либо H_o не верна, и мы принимаем одну из гипотез H_1. Если гипотеза H_1 означает, что $\mu(P_o^{\varepsilon_o}/P_1^{\varepsilon_1}) > \mu(P_o^{\varepsilon_o})$, то тестируемая формула (3) является вероятностной закономерностью с доверительным уровнем α.

Рассмотрим в общем случае произвольную аксиому $C = (P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n} \Rightarrow P_o^{\varepsilon_o}) \in \Sigma$. Сведем этот случай к предыдущему. Введем обозначения: $DC \overset{df}{=} \{P_1^{\varepsilon_1}, \ldots, P_n^{\varepsilon_n}\}$, $D \subset DC$ (включение строгое), $DC\& \overset{df}{=} P_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& P_n^{\varepsilon_n}$, $D\&$ – конъюнкция литер из D. Надо проверить, выполняется ли для любого подмножества D соотношение $\mu(P_o^{\varepsilon_o}/DC\&) > \mu(P_o^{\varepsilon_o}/D\&)$.

Будем рассматривать конъюнкцию $D\&$ как одно отношение R_1, а конъюнкцию литер из $DC\setminus D$ как другое отношение R_2. Тогда получим неравенство $\mu(P_o^{\varepsilon_o}/R_1\& R_2) > \mu(P_o^{\varepsilon_o}/R_1)$.

Так как $\mu(P_o^{\varepsilon_o}/R_1 \& R_2) = \mu(P_o^{\varepsilon_o} \& R_1 \& R_2)/\mu(R_1 \& R_2) = \mu(P_o^{\varepsilon_o} \& R_2/R_1)/\mu(R_2/R_1)$, то предыдущее неравенство перейдет в неравенство $\mu(P_o^{\varepsilon_o}\& R_2/R_1) > \mu(R_2/R_1)*\mu(P_o^{\varepsilon_o}/R_1)$.

Так как $C \in PR\mu$ и, значит, $\mu(DC\&) > 0$, то $\mu(R_1) > 0$ и $\mu(R_2 \& R_1) > 0$, в силу включений $D \subset DC$ и $DC\setminus D \subset DC$. Отсюда следует, что все проделанные преобразования корректны, так как ни одна вероятность в знаменателе не равна 0.

Для проверки последнего неравенства также сформулируем гипотезу о независимости:

$$H_o: \ \mu(P_o^{\varepsilon_o}\& R_2/R_1) = \mu(R_2/R_1)*\mu(P_o^{\varepsilon_o}/R_1)$$

против альтернатив:

$$H_1: \ \mu(P_o^{\varepsilon_o}\& R_2/R_1) \neq \mu(R_2/R_1)*\mu(P_o^{\varepsilon_o}/R_1).$$

Ограничиваясь рассмотрением только тех событий, для которых отношение R_1 истинно, можно определить подалгебру $\mathfrak{B}(\Sigma)(R_1)$ булевой алгебры $\mathfrak{B}(\Sigma)$, рассматривая только события $E\&R_1$. На этих событиях определим вероятностную меру $\mu'(E) \overset{df}{=} \mu(E\&R_1)/\mu(R_1)$. Тогда гипотезы H_o и H_1 примут вид:

$$H_o: \ \mu'(P_o^{\varepsilon_o}\& R_2) = \mu'(R_2)*\mu'(P_o^{\varepsilon_o}),$$

$$H_1: \ \mu'(P_o^{\varepsilon_o}\& R_2) \neq \mu'(R_2)*\mu'(P_o^{\varepsilon_o}).$$

Гипотеза H_o проверяется также с помощью критерия Фишера с некоторым доверительным уровнем α.

Аксиома C будет вероятностной закономерностью с доверительным уровнем α, если гипотеза H_o отвергается с уровнем α для любого подмножества D DC и принимаемая гипотеза H_1 имеет неравенство >.

Для правил (A ← true) ∈ Σ понятие вероятностной закономерности вырождается. Если предложение о том, что вероятностные закономерности C ∈ Σ истинны на некоторой гипотетической генеральной совокупности, где $\mu(C) = 1$, то среднее значение λ нижних доверительных границ $\lambda(C)$ для условных вероятностей $\mu(C)$, вычисленных по всем вероятностным закономерностям с доверительным уровнем α, даст нам оценку уровня шумов. Так как для правил (A ← true) на гипотетической генеральной совокупности также должно быть выполнено равенство $\mu(A) = 1$, то для таких правил мы потребуем, чтобы нижняя доверительная граница вероятности $\mu(A)$, вычисленная с доверительным уровнем α,была больше λ. Проверить это условие можно одним из известных статистических критериев. Этого вырожденного случая можно было бы избежать, если определить понятие вероятностной закономерности через отношение ⊐ , как это делается в [3], но это привело бы к неоправданному усложнению определений.

Литература

1. KRANTZ D.H., LUCE R.D., SUPPES P., TVERSKY A. Foundations of measurement. Vol.1. - NY-London: Acad.Press,1971. - 577 p.

2. KRANTZ D.H., LUCE R.D., SUPPES P., TVERSKY A. Foundations of measurement.Vol.3.-NY-London: Acad.Press,1990.-356 p.

3. ВИТЯЕВ Е.Е. Семантический подход к созданию баз знаний. Семантический вероятностный вывод наилучших для предсказания ПРОЛОГ-программ по вероятностной модели данных// Логика и семантическое предсказание.- Новосибирск.-1992.- Вып.146: Вычислительные системы.- С.19-49.

4. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания // Эмпирическое предсказание и распознавание образов. - Новосибирск - 1976. - Вып.67: Вычислительные системы.- С.54-68.

5. ВИТЯЕВ Е.Е., МОСКВИТИН А.А. Введение в Теорию Открытий. Программная система DISCOVERY // Логические методы в информатике.- Новосибирск.- 1993.- Вып.148: Вычислительные системы.- С.117-163.

6. HALPERN J.Y. An analysis of first-order logics of probability // Artif.Intell.- 1990. - Vol.46.-P.311-350.

7. FENSTAD J.I. Representation of probabilities defined on first-order languages // Ed.J.N.Crossley. Sets, Models and Recursion Theory: Proceedings of the Summer School in Mathematical Logic and Tenth Logic Colloguium.-1967.- P.156-172.

8. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т.1 /Под ред. С.В.Яблонского, О.Б.Лупанова.- М.: Наука, 1974.- 311 с.

9. КЕНДАЛ М., СТЬЮАРТ А. Статистические выводы и связи. - М.: Наука,1973.- 899 с.

Поступила в редакцию

21 ноября 1994 года