ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)
1995 год Выпуск 152

УДК 510.64

НЕМОНОТОННЫЕ ЛОГИКИ*)

(краткий обзор)

А.Л. Височан

Введение

В математике заключение, выведенное из набора предпосылок, может быть получено из любого бо́льшего набора предпосылок. Вывод остается выводом независимо от того, как увеличивается множество аксиом. Это свойство монотонного вывода. Такая природа этого типа вывода делает математические доказательства постоянными, не зависящими от поступления новой информации. Традиционные системы математической логики монотонны. А.Тарский [1] исследовал и описал исчисление дедуктивных систем и получил общую концепцию этих систем. Правда, он не связывал свое определение с прилагательным "монотонный", поскольку тогда не изучались системы другого типа.

М.Минский [2] пришел к мысли, что существует другой тип вывода, который не является монотонным. Это такой вывод, в котором мы выводим утверждение, основываясь на отсутствии доказательств против этого утверждения. (Простой пример - русская поговорка: "Не пойман - не вор". То есть мы считаем человека, может быть и зря, честным, пока у нас не появятся факты, этому противоречащие.) Часто цитируемый пример о Твити: рассматривая птиц "в общем", мы принимаем предположение, что все птицы мо-

*) Работа поддержана грантом РФФИ, № 093-01-01506.

гут летать. Мы узнаем, что Твити - птица и думаем: "Она может летать". Позднее мы узнаем, что Твити - домашний страус и, естественно, летать не может. Мы отвергаем наше предыдущее множество предположений и заключений, как базу для принятия решений, и строим новые. Такое случалось в истории каждой науки, исключая математику. Принципы физики, биологии изменялись с каждой научной революцией.

Зачем нам нужны предположения? Часто нам необходимо сделать конкретный выбор между несколькими альтернативами. Например, точно ответить на вопрос "Да или нет?". У нас может не быть дедуктивной или статистической базы, чтобы оправдать наш выбор, или такая база имеется, но нет времени ждать недостающей информации (а она может и не появиться), чтобы воспользоваться этой базой. Часто единственное, что мы имеем в качестве базы для рассуждений,- это догадки, т.е. вывод из предположений так же хорош, как истина или статистически полученные утверждения.

В настоящее время существует множество различных систем, реализующих немонотонность, полученных из различных вопросов информатики и искусственного интеллекта. Среди этого множества систем изучаются:

- теория с различными верующими, которую предложил Дж.Хинтикка [3];

- система поддержки истины Дж.Дойля [4];

- логика с умолчаниями Р.Райтера [5];

- теория индивидуальных и общих знаний и убеждений Дж.Хальрена и У.Мозеса [6];

- автоэпистемическая логика Р.Мура [7];

- логическое программирование с отрицаниями,рассматриваемыми как неудача [8].

§ 1. Формализация систем с немонотонными правилами

Рассмотрим подход, предложенный В.Мареком, А.Нероудом и Дж.Реммелом [9].

Предположим, что задано непустое множество U. В частном приложении U может быть набором всех утверждений или всех формул. Введем понятие системы с немонотонными правилами.

Правило немонотонного вывода - это тройка <P,G,φ>, где $P = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$, $G = \{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ - конечные множества объектов из U и $\varphi \in U$. Каждое правило записывается в виде:

$$r = \frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n : \beta_1,\ldots,\beta_m}{\varphi}\ ;$$

P называется *предпосылкой* правила r, G - *ограничением* и φ - *следствием*.

Каждое из множеств P или G может быть пустым. Если $P = G = \emptyset$, то правило r называют аксиомой.

Немонотонной системой называют пару <U,N>, где U - непустое множество и N - некоторое множество немонотонных правил.

Подмножество $S \subseteq U$ называется *дедуктивно — замкнутым*, когда для любого правила $r \in N$; если все предпосылки $\alpha_1,\ldots$ $\ldots,\alpha_n \in S$ и все ограничения $\beta_1,\ldots,\beta_m \notin S$, то заключение $\varphi \in S$.

В немонотонных системах пересечение дедуктивно—замкнутых множеств, в общем случае, не дедуктивно-замкнутое множество, в отличии от монотонного случая. Пересечение всех дедуктивно-замкнутых подмножеств множества U называется *гарантированным выводом*. Дедуктивно-замкнутое множество также называют представлением возможной "точки зрения". Пересечение всех дедуктивно-замкнутых множеств, включающих I, представляет общую информацию, даваемую всеми точками зрения, содержащими I ("рассуждения скептика").

ПРИМЕР. $U = \{\alpha,\beta,\gamma\}$.

а) $N_1 = \left\{\frac{:}{\alpha}, \frac{\alpha:\beta}{\beta}\right\}$ - здесь только одно минимальное дедуктивно-замкнутое подмножество: $S = \{\alpha,\beta\}$; таким образом, S - гарантированный вывод из $\langle U,N_1\rangle$ (т.е. из $\emptyset$);

б) $N_2 = \left\{\frac{:}{\alpha}, \frac{\alpha:\beta}{\gamma}, \frac{\alpha:\gamma}{\beta}\right\}$, в $\langle U,N_2\rangle$ два минимальных дедуктивно-замкнутых подмножества: $S_1 = \{\alpha,\beta\}$ и $S_2 = \{\alpha,\gamma\}$; $\{\alpha\}$ - гарантированный вывод из $\emptyset$ в $\langle U,N_2\rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для заданных $S,I \subseteq U$, $\varphi \in U$, последовательность $\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_k\rangle$ называется S-*выводом* φ из I в $\langle U,N\rangle$, если $\varphi = \varphi_k$,

$$\forall i \le k(\varphi_i \in I) \vee \left[\exists r \in N: r = \frac{P:G}{\varphi_i}, P \subseteq \{\varphi_1,\ldots,\varphi_{i-1}\}, G \cap S = \emptyset\right].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [10]. S-*заключением* из I называется любой элемент $\varphi \in U$, встречающийся в каком-либо S-выводе из I.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $C_s(I) = \{\varphi:\varphi$ - S-заключение из $I\}$.

Заметим, что S участвует в этом определении как ограничитель использования правил вывода. Таким образом, некоторые из правил не могут быть применены в силу ограничений, заданных множеством S, и, следовательно, их заключения не будут содержаться в S-выводе из I, даже если все предпосылки встречались ранее в выводе. Таким образом, элементы S непосредственно не попадают в $C_s(I)$, но элементы S могут оказаться в $C_s(I)$ после применения правила, чье заключение находится в S. В общем случае $C_s(I)$ не дедуктивно-замкнуто в $\langle U,N\rangle$. Вполне возможно, ограничения не принадлежат $C_s(I)$, но принадлежат S, предотвращая попадание заключения в $C_s(I)$.

СВОЙСТВА:

1) $I \subseteq C_s(I)$,

2) $C_s(C_s(I)) = C_s(I)$,

3) $\forall I,J \subseteq U$, $\forall S \subseteq U$ $(I \subseteq U) \Rightarrow C_s(I) \subseteq C_s(J)$,

4) $\forall I \subseteq U$ $\forall S_1,S_2 \subseteq U$ $(S_1 \subseteq S_2) \Rightarrow C_s(S_2) \subseteq C_s(S_1)$.

Пусть задано $S \subseteq U$, тогда рассмотрим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если* $\forall S$ $I \subseteq U$, $S \subseteq C_s(I)$, *то* $C_s(I)$ *дедуктивно-замкнуто.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $S,I \subseteq U$. Говорим, что S - *расширение* I, если $S = C_s(I)$.

Расширение множества I является очень важным понятием немонотонной логики. Оно является минимальным дедуктивно-замкнутым множеством, содержащим I, но не наоборот. Таким образом, минимальное дедуктивно-замкнутое надмножество I не обязательно является расширением. Расширение представляет "дедуктивно-замкнутое множество предположений", содержащее I.

ЛЕММА. *Если* S *- расширение* I, *то:*

1) S *- минимальное дедуктивно-замкнутое надмножество* I*;*

2) для любого J *такого, что* $I \subseteq J \subseteq S$, $C_s(J) = S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Множество всех расширений* I *образует антицепь, т.е. если* S_1,S_2 *- расширения* I *и* $S_1 \subseteq S_2$, *то* $S_1 = S_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $r \in N$ называется *S-применимым*, если все предпосылки находятся в U, а все ограничения не принадлежат S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $N(S) = \{r \in N\colon r$ - S-применимо$\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $r \in N$, $r = \dfrac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n:\beta_1,\ldots,\beta_m}{\varphi}$. Правило $r' = \dfrac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\varphi}$, получаемое из r отбрасыванием ограничений, назовем *проекцией* правила r.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $M(S) = \{r'\colon r \in N(S)\}$.

Монотонную систему $\langle U,M(S)\rangle$ назовем проекцией системы $\langle U,N\rangle$ и обозначим через $\langle U,N\rangle|_S$. Таким образом, $\langle U,N\rangle|_S$ получается следующим образом: во-первых, не-S-применимые правила просто отбрасываются; во-вторых, у оставшихся правил ограничения тоже отбрасываются. При этом имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Множество* $S \subseteq U$ *является расширением* I *в* <U,N> *тогда и только тогда, когда* S *– дедуктивное замыкание* I *в* $\langle U,N\rangle|_S$.

Пусть S - немонотонная система, I - подмножество U, тогда обозначим через S(I) немонотонную систему, полученную из S добавлением к N всех правил вида $\frac{:}{\alpha}$, для всех α, принадлежащих I. Тогда имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. T *является расширением множества* I *в* S *тогда и только тогда, когда* T*–расширение* $\emptyset$ *в* S(I).

Таким образом, достаточно рассматривать свойства только расширений самой системы. Расширение $\emptyset$ называется расширением самой системы.

§ 2. Примеры логик, реализующих немонотонность

1. Логика умолчаний (Default Logic) [5]. *Теорией умолчаний* называется пара <D,W>, где D - множество *правил умолчания* вида $\frac{\alpha:\ M\beta_1,\ldots,M\beta_m}{\omega}$, а W - произвольное множество формул пропозициональной логики; W играет роль множества аксиом, на которые мы можем опираться в нашем выводе. Правило $r \in D$ обозначает следующее: если мы смогли доказать α и не можем доказать $\neg\beta_i$, то считаем доказанной ω. Оператор вывода C(S) с набором оправданий S определяется следующим образом: $C(S) = \bigcup_{i\in N} C_i$, где $C_0 = I$, а

$$C_i = \left\{ \omega:\ \exists\ \frac{\alpha:\ \beta_1,\ldots,\beta_m}{\omega} \in D\ \&\ \alpha \in C_{i-1}\ \&\ \neg\beta_j \notin S \right\}.$$

Расширением при умолчаниях (Default extension) называется минимальная неподвижная точка оператора C(S). Расширение E имеет следующие свойства [4]:

1) $W \subseteq E$;

2) $Th_L(E) = E$, т.е. оно дедуктивно-замкнуто в смысле классической логики;

3) для любого правила $\frac{\alpha:\ M\beta_1,\ldots,M\beta_m}{\omega} \in D$, если $\alpha \in E$ & & $\neg\beta_1,\ldots,\neg\beta_m \notin E$, то $\omega \in E$.

Теории при умолчаниях соответствует немонотонная система $\langle U,N\rangle$, где U - множество всех формул пропозициональной логики, а N является объединением трех множеств:

(I) $\left\{\frac{:}{\omega} : \omega \in W\right\}$;

(II) $\left\{\frac{\alpha:\ \neg\beta_1,\ldots,\neg\beta_m}{\omega} : \frac{\alpha:\ M\beta_1,\ldots,M\beta_m}{\omega} \in D\right\}$;

(III) множество монотонных правил вывода классической логики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Множество* $S \subseteq U$ *является расширением системы* $\langle U,N\rangle$ *тогда и только тогда, когда* S - *расширение при умолчаниях* $\langle D,W\rangle$.

2. Логическое программирование (Propositional Logic Programming), общий случай [12]. *Логическая программа* - набор *предложений* вида: $p \leftarrow q_1,\ldots,q_n, \neg r_1,\ldots,\neg r_m$. Тогда p называется *заключением*, а правая часть *телом* предложения. Предложение с $m = 0$ называется хорновским предложением. Хорновская программа, состоящая только из хорновских предложений, имеет наименьшую модель, определяемую как наименьшая неподвижная точка оператора вывода в логике хорновских предложений [13].

Элементарным примером предложения называется предложение, в котором все вхождения переменных заменены на термы без переменных (*элементарные термы*). Предложение, являющееся элементарным примером, называется *элементарным*. Множество всех элементарных примеров программы P обозначим через ground(P). Пусть M - множество атомов. Говорят, что элементарное предложение M-применимо, если все отрицания в теле предложения не принадлежат M. Множество GL(P,M), состоящее из всех M-применимых предложений, содержащихся в ground(P), называется *монотонизацией* программы P в отношении M. Тогда M называют *устойчивой моделью* для программы P, если M - наименьшая модель хорновской программы GL(P,M).

С логической программой P свяжем немонотонную систему <U,tr(P)>, где U - множество всех рассматриваемых атомов, а tr(P) - перевод программы, состоящей из переводов предложений в виде:

$$p \leftarrow q_1,\ldots,q_n:\neg r_1,\ldots,\neg r_m \Rightarrow \frac{q_1,\ldots,q_n:r_1,\ldots,r_m}{p} .$$

Следующий результат доказан в [14,15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Множество* $M \subseteq U$ *является устойчивой моделью программы* P *тогда и только тогда, когда* M - *расширение системы* <U,tr(P)>.

§ 3. "Проблема женитьбы"

Обществом назовем тройку $S = \langle B,G,K\rangle$, где B - множество юношей, G - множество девушек, такое, что $B \cap G = \emptyset$ и отношение $K \subseteq B\mathrm{x}G$, обозначающее: $\langle b,g\rangle \in K$, если "b знает g". *Женитьбой* для множества S назовем отображение $M: B \to G$.Женитьба называется *правильной*, если M является взаимнооднознач - ным отображением и для любого $b \in B$ $M(b) = g \Rightarrow \langle b,g\rangle \in K$. То есть в правильной женитьбе каждый юноша женится только на той девушке,которую знает.Женитьба M-*симметрична*,если M - отоб - ражение B на G. Для конечного общества Ф.Холл [16] дал необходимое и достаточное условие существования правильной женитьбы, а именно:

(*) для любого конечного подмножества юношей $B' \subseteq B$ множество девушек,которых они знают,по мощности не меньше чем мощность B'.

М.Холл [17] показал, что условие (*) является также необходимым и достаточным условием существования правильной женитьбы в случае бесконечного общества S до тех пор, пока каждый юноша знает только конечно много девушек.

Мы говорим, что если $S = \langle B,G,K\rangle$ - общество, удовлетворяющее (*), в котором каждый юноша знает только конечно много девушек, то имеется немонотонная система $Z = \langle U(S),N(S)\rangle$, полученная следующим образом:

1) $U(S) = \{Mbg: b \in B \ \& \ g \in G \ \& \ K(b,g)\}$, где M - новый символ;

2) $\forall b \in B \quad \{g_1,\ldots,g_n\} = \{g \in G: K(b,g)\} \quad \forall k \leq n$

$$\frac{Mbg_1,\ldots,\overline{Mbg_k},\ldots Mbg_n}{Mbg_k} \in N(S),$$

где запись $s_1,\ldots,\overline{s_k},\ldots,s_n$ означает n-1 элементную последовательность, полученную из $s_1,\ldots,s_n$ удалением s_k;

3) $\forall g \in G \ \forall b_1,b_2 \in B$: $b_1 \neq b_2 \ \& \ K(b_1,g) \ \& \ K(b_2,g) \ \forall \varphi \in U(S)$

$$\frac{Mb_1g,Mb_2g:}{\varphi} \in N(S);$$

4) ничего другого в N(S) нет.

ТЕОРЕМА 3 [9]. *Пусть* $S = \langle B,G,K\rangle$ *- общество, удовлетворяющее (*), для которого каждый юноша знает только конечно много девушек. Тогда* E *является расширением для* $Z = \langle U(S),N(S)\rangle$ *тогда и только тогда, когда множество* $M_E = \{\langle b,g\rangle: Mbg \in E\}$ *- правильная женитьба для* S.

§ 4. Проблема существования расширений

В параграфе представлены результаты автора о существовании расширений в немонотонных системах.

Пусть в дальнейшем $S = \langle U,R\rangle$ - немонотонная система. Представим множество правил R как объединение двух множеств M и N, где M - все монотонные правила, входящие в R, а N - все остальные правила из R.

Как уже было сказано, достаточно рассматривать свойства только расширений системы.

Пусть $X \subseteq R$, $\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_n\rangle$ - вывод в $\langle U,N\rangle$, так как исходное множество $\emptyset$, то $\forall i \le n \varphi_i$ получено только по правилу вывода из предыдущих φ (обозначим это правило через r_i). Таким образом, можно записать вывод $\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_n\rangle$ как $\emptyset \xrightarrow{r_1} \varphi_1 \xrightarrow{r_2} \ldots$
$\ldots \xrightarrow{r_n} \varphi_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть

$S_\emptyset ::= \langle U,M\rangle$;

$S_X ::= \langle U,M \cup X\rangle$, где X - множество монотонных правил;

$t_X ::= C(\emptyset)$ в S_X, где X - множество монотонных правил;

$X \subseteq R$, $X' ::=$ проекция X;

$X \subseteq R$, $E \subseteq U$, тогда

1) $Non_x(E) ::= X \cap N(E)$, E - применимые правила из X,

2) $Mon_x(E) ::= (Non_x(E))'$ - проекция правил;

$X \subseteq U$, $\varphi \in U, X \mapsto \varphi ::= \varphi$.

Таким образом, $\forall E \subseteq U$,

$$Non_R(E) = Non_N(E) \cup Non_M(E),$$
$$Mon_R(E) = Mon_N(E) \cup Mon_M(E).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $T_S = \{t_X\colon X \subseteq N\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если* $X \subseteq U$, $t_{X'} \subseteq U$, *то из* $t_{X'} = Mon_N(t_{X'})$ *следует, что* $\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_n\rangle$ *является выводом в* $S_{X'}$ *тогда и только тогда, когда* $\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_n\rangle$ *является выводом в* $\langle U,Mon_R(t_{X'})\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было предложено выше,

$\emptyset \xrightarrow{r'_1} \varphi_1 \xrightarrow{r'_2} \ldots \xrightarrow{r'_n} \varphi_n$ - вывод φ_n, где r'_i - проекция r_i.

Таким образом, нужно доказать, что правила, встречающиеся в любом выводе, принадлежат $M \cup X'$ тогда и только тогда, когда принадлежат $Mon_R(t_{X'})$.

Необходимость. $Mon_R(t_{X'}) \subseteq M \cup X'$.

Достаточность. Для любого правила r_i' возможен один из двух вариантов:

1) если $r_i' \notin M$, то $r_i' \in Mon_R(t_{X'})$;

2) если $r_i' \in M$, то имеется равенство $r_i' = r_i$.

Индукцией по длине вывода n докажем формулу $\forall n\, \forall i \leq n$ r_i' - $t_{X'}$-применимо.

Докажем базу индукции: $n = 1$, тогда $i = 1$.

Случай 1: $r_i' \in Mon_R(t_{X'})$.

Случай 2: r_i' - аксиома и, следовательно, является $t_{X'}$-применимой.

Шаг индукции. Пусть индукционное предположение для $n \leq k$ верно. Докажем его для $n = k + 1$.

Случай 1: из определения $Mon_R(t_{X'})$ и того, что $r_i' \notin M$, следует, что r_i' - $t_{X'}$-применимо.

Случай 2: пусть правило $r_n \in M$ имеет вид $\frac{P:}{\varphi}$, следовательно, $P \subseteq \{\varphi_1,\ldots,\varphi_k\} \subseteq t_{X'}$, откуда получаем, что r_i - $t_{X'}$-применимо.

Индукционное предположение доказано для $n = k + 1$, следовательно, доказана формула $\forall n\, \forall i \leq n$ r_i' - $t_{X'}$-применимо. Отсюда: все правила, которые встречаются в любом выводе в системе $S_{X'}$, принадлежат $Mon_R(t_{X'})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если* $X \subseteq N$, $t_{X'} \subseteq U$, *то из* $X' = Mon_N(t_{X'})$ *следует, что* $t_{X'}$ *является расширением* S.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\varphi \in t_{X'}$ тогда и только тогда, когда существует $\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_n\rangle$ - вывод в $S_{X'}$, что равносильно тому, что $\langle\varphi_1,\ldots,\varphi_n\rangle$ - вывод φ в $S|_{t_{X'}}$. По определению, это равносильно $\varphi \in C(\emptyset)$ в $S|_{t_{X'}}$, следовательно, $t_{X'} = C(\emptyset)$ в $S|_{t_{X'}}$. Далее воспользуемся теоремой 1, положив в ней $I = \emptyset$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если* $E \subseteq U$ *является расширением* S, *то* $\forall X \subseteq N$ $E = C(\emptyset)$ *в* $\langle U, Mon_R(t_{X'}) \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $E_1 = C(\emptyset)$ в $\langle U, X \cup Mon_R(E) \rangle$; $E \subseteq E_1 \subseteq C(\emptyset)$ в $S_{Mon_N(E)}$. Но, по утверждению 2, $t_{Mon_N(E)} = E$. Таким образом, утверждение 3 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Если* $t \in T_s$, *то* $t_\emptyset \subseteq t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. t получено с использованием большого количества правил вывода в немонотонной системе.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Если* $E \subseteq U$ *- расширение* S, *то* $E \in T_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E - расширение, возьмем $X = M$, и тогда, по утверждению 3, $E = t_{Mon_N(E)}$, откуда следует $E \in T_s$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* $E \subseteq U$ *- расширение* S, *то* $t_\emptyset \subseteq E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E - расширение, тогда, по утверждениям 5 и 4, имеем, что $t_\emptyset \subseteq E$.

УТВЕРЖЕНИЕ 6. *Если множество* T_s *содержит единственный элемент* (обозначим его E), *то* E *является расширением* S.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия утверждения 6 и определения T_s следует, что для любого подмножества X множества N $E = C(\emptyset)$ в $S_{X'}$. Возьмем $X = Non_N(E) \subseteq N$, тогда $X' = Mon_N(E)$ (по определению) и, следовательно, $E = t_{X'}$ (по определению); в этом случае (по утверждению 2) $t_{X'}$ - расширение S.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если не существует такого подмножества* X *множества* N, *что* $X' \neq Mon_N(t_{X'})$, *то в системе* S *нет расширений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть найдется подмножество $X \subseteq N$ такое, что $X' = Mon_N(t_{X'})$; в этом случае (по утверждению 2) $t_{X'}$ - расширение S.

Рассмотрим простейший случай, когда немонотонная система получается из монотонной добавлением одного немонотонного правила вывода. Обозначим его в дальнейшем r.

При принятых обозначениях:

$$N = \left\{ r = \frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n:\beta_1,\ldots,\beta_m}{\gamma} \right\} \text{ и } N' = \left\{ \frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\gamma} \right\},$$

$T_s = \{t_\emptyset, t_{N'}\}$. Так как $t_\emptyset \subseteq t_{N'}$, следовательно, если расширение существует, то оно единственно. То есть или $t_\emptyset$ - расширение, или $t_{N'}$ - расширение. Таким образом,

1) если $t_\emptyset$ является расширением, то r - $t_\emptyset$-не применимо;

2) если $t_{N'}$ - расширение, то r - $t_{N'}$-применимо;

3) если правые части пп. 1 и 2 ложны, то расширения не существует.

Правая часть п.1 эквивалентна $F = (\exists i \neg(\emptyset \mapsto \alpha_i)) \vee \vee (\exists j\ \emptyset \mapsto \beta_j)$, правая часть п.2 эквивалентна $G = (\forall i\ \{\gamma\} \mapsto \alpha_i) \wedge \wedge (\forall j \neg(\{\gamma\} \to \beta_j))$. Таким образом, приняв обозначения:

$\Phi_1 = (\forall i\ \emptyset \mapsto \alpha_i)$,

$\Phi_2 = (\forall j \neg(\emptyset \mapsto \beta_j))$,

$\Phi_3 = (\exists k\ \{\gamma\} \mapsto \alpha_i)$,

получим следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Предложение* $\Phi_1 \& \Phi_2 \& \Phi_3$ *истинно тогда и только тогда, когда в системе* S *не существует расширений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула $\Phi_1 \& \Phi_2$ - отрицание формулы F. Отрицание формулы G: $(\exists i \neg(\{\gamma\} \mapsto \alpha_i)) \& \Phi_3$ истинно, когда $t_{N'}$ не является расширением. Если множество $t_\emptyset$ не является расширением, то формула Φ_1 истинна и, следовательно, отрицание формулы G эквивалентно Φ_3.

Литература

1. TARSKI A. Logic, Semantics, Metamathematics. - Oxford, 1956.

2. MINSKY M. A framework for representing knowledge// The Psychology of Computer Vision.-McGrow Hill, 1975.- P.211-272.

3. HINTIKKA J. Knowledge and Belief. - Cornell University Press,1962.

4. DOYLE J. A truth maintenance system// Artif. Intell. - 1979.- Vol.12.- P.231-272.

5. REITER R. A logic for default reasoning//Artif.Intell.- 1980.- Vol.13.- P.81-132.

6. HALPERN J.Y., MOSES Y.O. Knowledge and common knowledge in a distributed environment// 3rd ACM Comference on the Principles of Distributed Computing, 1984.- P.50-61.

7. MOORE R.C. Semantical considerations on nonmonotonic logic // Artif. Intell.- 1985.- Vol.25.- P.75-94.

8. ART K.R. Introduction to Logic Programming. TR-87-35.- University of Texas, 1988.

9. MAREK W., NERODE A., REMMEL J. A theory of nonmonotonic rule system // Tech.Rep., 1990.- N 31.

10. MAREK V., TRUSZCZYNSKI M. Relating autoepistemic and default logic // Tech.Rep.144-89, Computer Science, University of Kentucky, Lexington,1989.

11. ETHERINGTON D. Formalizing nonmonotonic reasoning system // Artif.Intell.- 1987.- Vol.31.- P.41-85.

12. GELFOND M., LIFSCHITZ V. Stable semantics for logic program //Proceedings of 5th International Simposium.Conference on Logic Programming. Seattle, 1988.

13. LLOYD J. Foundation of Logic Programming. - Springer-Verlag,1989.

14. BIDOIT N., FROIDEVAUX C. General logical databases and programs, default logic semantics, and stratification // J. Inform. Comput.- 1991.- Vol.91, N 1. - P.15-54.

15. MAREK V., TRUSZCZYNSKI M. Stable models for logic programs and default logics // Tech.Rep.144-89. Computer Science, University of Kentucky, Lexington, 1989.

16. HALL P. On represantatives of subsets // J.London Math. Soc.- 1935.- N 10.

17. HALL M. Distinct representatives of subsets//Bull.Amer. Math.Soc.- 1948.- N 54.- P.922-926.

Поступила в редакцию

21 апреля 1995 года