ТЕОРИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ЯЗЫКИ СПЕЦИФИКАЦИЙ
(Вычислительные системы)
1995 год Выпуск 152

УДК 510

ОБ ОДНОМ РАСШИРЕНИИ ТЕОРИИ SCT НУДЕЛЬМАНА

В.А. Ганов

В настоящей работе строится формальная система T с переменными двух сортов: для C-объектов и M-объектов. Доказывается непротиворечивость этой системы относительно системы ZFC плюс схема аксиом Мало, выполнение аксиом теории SCT из работ [1] и существованием M-объекта, являющегося слабо недостижимым кардиналом. Доказывается также недоказуемость в SCT последнего факта.

1. Рассматривается язык теории множеств с переменными двух сортов: заглавные буквы X, Y, $X_1, X_2, \ldots$ будем называть C-переменными, строчные $x, y, x_1, x_2, \ldots$ – M-переменными. Допустимые значения C-переменных будем называть C-объектами, а значения M-переменных – M-объектами, при этом M-объекты могут быть значениями C-переменных. Атомные формулы имеют вид $x \in y$, $X \in Y$, $x \in Y$, $X \in y$; сложные формулы образуются обычным образом с помощью символов логических операций $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$. Формулы, содержащие только C-переменные, будем называть C-формулами, и формулы, содержащие только M-переменные, будем называть M-формулами. Если в C-формуле φ все C-переменные заменить на одноименные M-переменные, то полученную M-формулу будем называть двойственной φ и обозначать через $\bar{\varphi}$. Основная цель этого преобразования заключается в ограничении связанных C-переменных формулы φ совокупностью всех M-объектов, поэтому иногда такое преобразование будем применять к формулам, содержащим

свободные M-переменные, исключая случаи когда может возникнуть коллизия переменных. В этом языке строим формальную систему T, которая содержит три группы аксиом. Первая группа состоит из аксиом теории множеств ZF, сформулированных для C-объектов, т.е. с помощью C-формул. Но в схеме аксиом подстановки формула, задающая функцию на C-объектах, может содержать переменные обоих сортов. Вторая группа состоит из следующих аксиом:

$$\forall x \exists X (x = X), \tag{1}$$

$$\forall X \forall Y (Y \in x \rightarrow \exists y (y = Y)), \tag{2}$$

$$\forall X \forall Y (Y \subseteq x \rightarrow \exists y (y = Y)), \tag{3}$$

$$\exists Y \forall X (X \in Y \leftrightarrow \exists x (x = X)). \tag{4}$$

Содержательно эти аксиомы утверждают: каждый M-объект является C-объектом; C-объект, входящий или содержащийся в M-объекте, сам является M-объектом; совокупность всех M-объектов есть C-объект. Кроме того, во вторую группу включаем следующую схему аксиом подстановки для M-объектов:

$$\forall x \exists y \forall y_1 (y_1 \in y \leftrightarrow \exists x_1 (x_1 \in x \wedge \varphi(x_1, y_1))), \tag{5}$$

где φ - произвольная формула рассматриваемого языка, задающая одноместную функцию на M-объектах.

Третья группа состоит из аксиом, описываемых следующей схемой:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \overline{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)), \tag{6}$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает C-формулу, у которой все свободные переменные заменены M-переменными $x_1, \ldots, x_n$, и $\overline{\varphi}$ - двойственная ей формула. (Исключаются случаи коллизии переменных.)

Из (6) следует, что в T выполняются все аксиомы ZF для M-объектов. Действительно, любая аксиома ZF для C-объектов записывается замкнутой C-формулой, тогда двойственная ей M-формула описывает соответствующую аксиому для M-объектов, и в силу аксиом первой группы из (6) эта аксиома доказуема в T.

Правда, схема (6) применима не ко всем аксиомам подстановки из первой группы, и поэтому добавлена схема (5). Введение этой схемы аксиом является главным расширением теории SCT из [1].

В системе T доказуемо, что пустой C-объект совпадает с пустым M-объектом и что для любых M-объектов x,y образованные из них C-объекты такие, как пара $\{x,y\}$, объединение $x \cup y$, степень $P(x)$, совпадают с аналогичными M-объектами. Пусть C-формула $On(X)$ описывает отношение "X-ординал" и $\overline{On}(x)$ - двойственная ей формула. C-объект X, удовлетворяющий $On(X)$, будем называть C-ординалом, и M-объект x, удовлетворяющий $\overline{On}(x)$, - M-ординалом. В силу (6) каждый M-ординал является C-ординалом.

Следующее утверждение называется схемой аксом Мало: для любой формулы φ, определяющей монотонную ординальную функцию g, существует регулярный кардинал k, замкнутый относительно g, т.е. если ординал $\gamma < k$, то значение $g(\gamma)$ меньше, чем k.

ТЕОРЕМА 1. *Система* T *непротиворечива относительно* ZFC *плюс схема аксиом Мало.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U обозначает универсум множеств, в котором выполняются аксиомы ZFC, аксиома выбора и указанная схема аксиом Мало, и C-переменные пробегают U. Пусть $\varphi_1,\ldots$ $\ldots,\varphi_m$ – произвольный конечный список C-формул и $X_1,\ldots,X_n$ - свободные переменные этих формул. Для произвольного множества S через φ_i^S обозначим формулу, полученную из φ_i путем ограничения ее переменных множеством S. Согласно [2,с.32] в U выполняется следующий принцип отражения: для каждого множества S существует множество S' такое, что $S \subseteq S'$ и

$$(\forall X_1 \in S') \ldots (\forall X_n \in S') \bigwedge_{i=1}^{m} (\varphi_i \longleftrightarrow \varphi_i^{S'}). \tag{7}$$

При этом процесс построения S' не использует аксиому выбора и описывается формулой с параметром S, которая легко строится по исходному списку $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$.. Тогда в ZFC формульно определимы следующие две трансфинитные последовательности множеств:

$$S_o,S_1,\ldots,S_\gamma,\ldots,$$
$$S'_o,S'_1,\ldots,S'_\gamma,\ldots, \tag{8}$$

где $S_o = \emptyset$; S_γ и S'_γ связаны соотношениями (7); $S_{\gamma+1}$ есть транзитивное замыкание $S'_\gamma \cup \{P(X)/X \in S'_\gamma \cup \{S'_\gamma\}\}$; и если γ - предельный ординал, то S_γ есть объединение предыдущих множеств.

Пусть $|S|$ обозначает кардинал, равномощный S. Заметим, что $|S_\gamma|$ есть наименьший ординал α такой, что S_γ равномощно α, т.е. это понятие определимо в языке ZF, но для доказательства существования такого кардинала приходится привлекать аксиому выбора. Итак, в ZFC формульно определима монотонная ординальная фуекция g, отображающая γ в $|S_\gamma|$. По соответствующей аксиоме Мало найдется регулярный кардинал k, замкнутый относительно g. Полагаем $M = \bigcup\limits_{\gamma<k} S_\gamma$, и пусть M-переменные системы T принимают значения из M. Тогда в U будут выполняться аксиомы первой и второй групп системы T, а аксиомы (6) выполняются для $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$. Действительно, любая аксиома первой группы выразима либо C-формулой, либо C-формулой с дополнительным параметром M, обозначающим совокупность всех M-объектов. По предположению кардинал k принадлежит U, следовательно, M входит в U и выполняются все аксиомы первой группы, а также (4). Аксиома (1) очевидна. Пусть $x \in M$, тогда $x \in S_\gamma$ для некоторого $\gamma < k$ и по построению соотношения $X \in x$ и $X \subseteq x$ влекут $X \in S_{\gamma+1}$. Но $S_{\gamma+1} \subseteq M$, тем самым аксиомы (2),(3) доказаны.

Рассмотрим аксиому (5). Пусть f - определимая в данном языке функция на M-объектах и $y \in M$. Так как M входит в U, то f определима в U и порождает отображение h вида $x \to \beta$, где $x \in y$, β - наименьший ординал такой, что значение $f(x) \in S_\beta$. Для некоторого $\gamma < k$ $y \in S_\gamma$, и, следовательно, $y \subseteq S_{\gamma+1}$

и $|y| \leq |S_{\gamma+1}| = g(\gamma+1) < k$. Допустим, от противного, что $\lambda = k$, где $\lambda = \sup\{h(x)/x \in y\}$. Тогда функция h осуществляет отображение из y в k и $\sup\{h(x)/x \in y\} = k$, т.е. конфинальность k не превосходит $|y|$, что противоречит регулярности k. Следовательно, $\lambda < k$, и образ y при отображении f входит в $S_\lambda \in M$, т.е. является М объектом. Аксиома (5) доказана.

Выполнение (6) для формул $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ легко следует из

$$(\forall X_1 \in M)\ \ldots\ (\forall X_n \in M) \bigwedge_{i=1}^{m} (\varphi_i \leftrightarrow \varphi_i^M),$$

а доказательство этого утверждения аналогично доказательству принципа отражения [2,с. 32]. Таким образом, аксиомы первой и второй групп и любой конечный список аксиом третьей группы непротиворечивы относительно ZFC плюс схема аксиом Мало, следовательно, и вся система T относительно непротиворечива. Теорема доказана.

2. Покажем что в системе T доказуемо существование слабо недостижимого кардинала. Пусть $K(X)$, $R(X)$, $L(X)$ обозначают С-формулы, описывающие отношения "X-кардинал", "X-регулярный", "X-предельный" соответственно. Используя (6), легко доказать, что для любого М-объекта x С-формулы $K(x)$, $R(x)$, $L(x)$ эквивалентны своим двойственным М-формулам $\overline{K}(x)$, $\overline{R}(x)$, $\overline{L}(x)$ соответственно. С-объект X называется слабо недостижимым кардиналом, если выполняются три отношения $K(X)$, $R(X)$, $L(X)$.

ТЕОРЕМА 2. *В системе* T *доказуемо существование М-объекта* x *такого, что* $\overline{K}(x) \wedge \overline{R}(x) \wedge \overline{L}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью аксиом первой группы и (4) доказуемо существование С-объекта $Y = \{x/On(x)\}$. Легко показать, что Y есть С-ординал и не является М-объектом. Докажем $K(Y)$. Допустим, что существуют $X \in Y$ и функция, отображающая X на Y. Тогда X есть М-объект, и, по аксиоме (5), Y тоже М-объект, что невозможно. Следовательно, Y - кардинал. Допустим, Y - сингулярный, т.е. существуют С-ординал X и функция F из X в Y такие, что $X \in Y$ и $\sup Y_1 = Y$, где $y \in Y_1 \leftrightarrow (\exists x \in X)\ y = F(x)$. Из определения Y следует, что X и его элементы суть М-объекты, тогда, по аксиоме (5), Y_1 и его сумма тоже М-объекты. Ясно, что сумма Y_1 совпадает с Y, следовательно, Y - М-объект, что невозможно. Таким образом, Y - регулярный кардинал. В силу аксиомы (3), Y - предельный кардинал. Следовательно, доказана замкнутая С-формула $\exists X(K(X) \wedge R(X) \wedge L(X))$. Тогда согласно (6) в T выводима М-формула $\exists x(\overline{K}(x) \wedge \overline{R}(x) \wedge \overline{L}(x))$. Теорема доказана.

Покажем, что в T доказуемы все аксиомы теории SCT из работы [1]. Аксиомы группы A теории SCT входят непосредственно в первую и вторую группы аксиом, а аксиомы группы B являются частными случаями (6). Аксиомы группы C представляют собой схему аксиом свертывания и являются следствиями аксиом (4) и аксиомы подстановки из первой группы. Выполнение последней группы аксиом SCT утверждает следующая

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\varphi(X)$ – *С-формула с одной свободной переменной* X *и параметрами, являющимися* М-*объектами,* $\overline{\varphi}(x)$ - *ее двойственная* М-*формула и* $Y_0=\{x/\overline{\varphi}(x)\}$. *Тогда* Y_0 *является* М-*объектом в том и только том случае, когда*

$$\forall X(\varphi(X) \to X \in Y_0). \tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие теоремы. Из (9) получаем замкнутую формулу $\exists Y \forall X(\varphi(X) \to X \in Y)$. Отсюда, согласно (6), выполняется $\exists y \forall x(\overline{\varphi}(x) \to x \in y)$. Теперь, если М-объект y удовлетворяет формуле $\forall x(\overline{\varphi}(x) \to x \in y)$, то $Y_0 \subseteq y$, и из (3) получаем, что Y_0 есть М-объект. Обратно, пусть Y_0 является М-объектом, тогда $\forall x(\overline{\varphi}(x) \to x \in Y_0)$. Отсюда с помощью (6) получаем $\forall X(\varphi(X) \to X \in Y_0)$. Теорема доказана.

В теории SCT из [1] отсутствует аксиома подстановки, но утверждается существование слабо недостижимого кардинала. Приведенное доказательство этого утверждения содержит ошибку, более того, покажем, что это утверждение невыводимо из аксиом SCT. Для этого рассмотрим систему T', получающуюся из T отбрасыва -

нием схемы аксиом (5). В T' по-прежнему будут выполняться все аксиомы SCT. Допустим, что в теории SCT доказуемо существование слабо недостижимого М-кардинала. Тогда в T' выводима М-формула $\exists x\overline{\psi}(x)$, где $\overline{\psi}(x) = \overline{K}(x) \wedge \overline{R}(x) \wedge \overline{L}(x)$. Вывод $\exists x\overline{\psi}(x)$ использует конечное число аксиом третьей группы, и пусть $\varphi_1,\ldots$ $\ldots,\varphi_m$ - список С-формул, вошедших в отмеченные аксиомы из (6). Добавим в этот список С-формулу $\psi(x)$.

Согласно [2,с.41], мы можем взять стандартную модель U' теории ZFC такую, чтобы в ней выполнялась формула $\neg\exists X\psi(x)$. Будем считать, что С-переменные пробегают U', и в этой модели описанным в п.1 способом построим последовательности множеств (8) для взятого списка формул. Пусть $M' = \bigcup_{n<\omega} S_n$ и М-переменные пробегают M'. Аналогично предыдущему доказывается, что в модели (U',M') выполняются аксиомы первой и второй групп системы T', а из третьей группы истинны аксиомы с С-формулами $\varphi_1,\ldots,\varphi_m,\psi(X)$. В частности, в (U',M') истинна $\overline{\psi}(x) \leftrightarrow \psi(x)$ для каждого $x \in M'$. Кроме того, в (U',M') будут верны все следствия из этих аксиом, в том числе верна $\exists x\overline{\psi}(x)$. Значит, для некоторого $x_o \in M'$ истинны М-формула $\overline{\psi}(x_o)$ и С-формула $\psi(x_o)$. Отсюда следует, что в модели (U',M') истинна С-формула $\exists X\psi(X)$, а это противоречит выбору модели U'. Таким образом, в SCT не может быть доказано существование слабо недостижимого кардинала.

Л и т е р а т у р а

1. НУДЕЛЬМАН А.С. Об одном уточнении "наивной" теории множеств Г.Кантора //Логические методы в программировании. - Новосибирск, 1990. - Вып. 133: Вычислительные системы.-С.153-185.

2. ЙЕХ Т. Теория множеств и метод форсинга. - М.: Мир, 1973. - 150 с.

Поступила в редакцию
22 марта 1993 года