С П Л А Й Н Ы   И   И Х   П Р И Л О Ж Е Н И Я
(Вычислительные системы)
1995 год   Выпуск 154

УДК 519.651

О ПОСТРОЕНИИ СПЛАЙНОВ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ В ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ

В.В.Богданов*)

При решении многих практических задач,связанных с аппроксимацией функций и обработкой экспериментальной информации,когда не требуется высокая точность и гладкость, обычно достаточно ограничиться использованием простейших сплайнов первой степени. Аппроксимация такими сплайнами сеточных данных кроме простоты обладает еще одним очень важным свойством - возможностью объективно оценить характер поведения данных. В этом отношении сплайны первой степени значительно "надежнее" сплайнов более высоких степеней, особенно когда данные заданы на сильно неравномерных сетках и с большой погрешностью. Если для сеточных данных известен уровень погрешности, то при их аппроксимации (сглаживании) часто применяют так называемые сплайны в выпуклом множестве [1].

В данной статье предлагается эффективный алгоритм построения сплайнов первой степени в выпуклом множестве. Как показывают численные эксперименты, его применение не вызывает никаких проблем даже при работе с большими объемами исходных данных - тысячи и десятки тысяч точек. В этой связи укажем на возможность решения задачи сжатия информации с помощью сплайнов в выпуклом множестве.

---

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 94-01-01655).

Обозначим через W_2^1 класс абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций $f(x)$ таких, что $f'(x) \in L_2[a,b]$ и введем в рассмотрение функционал

$$\Phi(f) = \int_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

определенный на W_2^1.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана сетка Δ: $a=x_1<x_2<\ldots<x_n = b$. Рассмотрим множество M функций $f(x) \in W_2^1$, удовлетворяющих в узлах сетки двусторонним ограничениям

$$\alpha_i \le f(x_i) \le \beta_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

(Промежутки $[\alpha_i, \beta_i]$ часто называют коридором.) Тогда задача о сплайне в выпуклом множестве формулируется следующим образом. Требуется найти функцию $s(x)$ такую, что

$$s(x) = \arg\min_{f\in M} \Phi(f). \tag{2}$$

Известно [2,3], что решением этой задачи является сплайн первой степени, определенный единственным образом, если среди всех функций, принадлежащих множеству M, найдется не более одной, тождественно равной константе. Известна также теорема характеризации [2,3], согласно которой сплайн $s(x) \in M$ является решением задачи (2) тогда и только тогда, когда в каждой точке x_i, $i = 1,\ldots,n$, функция разрыва производной $d(x) = s'(x+0)-$ $- s'(x-0)$, $x \in [a,b]$ (полагаем $d(a) = s'(a+0)$, $d(b) = s'(b-0)$) удовлетворяет условиям:

$$\left.\begin{aligned} &d(x_i) = 0, \text{ если } \alpha_i < s(x_i) < \beta_i, \\ &d(x_i) \le 0, \text{ если } s(x_i) = \alpha_i, \\ &d(x_i) \ge 0, \text{ если } s(x_i) = \beta_i. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Таким образом, задача имеет решение, которое в принципе можно найти "точно" (если отвлечься от погрешностей округления) за конечное, хотя,вообще говоря, и очень большое число шагов, например, простым перебором всех 3^n интерполяционных сплайнов, для каждого из которых, во-первых, множество его узлов есть подмножество сетки Δ, и, во-вторых, если точка x_j является узлом сплайна,то в ней сплайн интерполирует либо α_j, либо β_j.

Разработанные, например, в [3,4] способы построения сплайнов в выпуклых множествах довольно эффективны , однако в них так или иначе используются методы выпуклого программирования. В [4] для решения этой задачи предложен метод штрафных функций. В [3] также используются методы выпуклого программирования, хотя и более рационально. А именно, в стремлении избежать решения задачи большой размерности сначала строится сплайн по данным на некотором небольшом подмножестве исходной сетки, а затем на каждом следующем шаге это подмножество модифицируется путем направленного перебора оставшихся данных, чтобы в итоге обеспечить сходимость процесса к искомому решению. Указанные методы носят итерационный ("бесконечный") характер, что порождает определенные трудности с определением момента окончания счета. Кроме того, им свойственен быстрый рост вычислительных затрат при увеличении размерности задачи. В [5] отказ от применения методов минимизации компенсирован сужением задачи - в некоторых узлах сетки обязательно задаются условия интерполяции исходных данных.

Предлагаемый в этой статье способ решения задачи (2) представляет собой, по-существу, алгоритм быстрого направленного поиска узлов сплайна, являющегося решением задачи. При его реализации используются только процедуры построения и вычисления интерполяционных сплайнов первой степени. Важным свойством алгоритма является то, что объем вычислительной работы растет линейно с увеличением количества исходных данных.

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи (2). В дальнейшем мы будем исходить из того, что ее решение единственно.

Отметим, что этот факт легко проверяем. А именно, достаточно найти множество $\bigcap_i [\alpha_i,\beta_i]$. Если оно содержит не более одной точки, то решение единственно. В противном случае в качестве решения может быть взят любой сплайн $s(x) = \gamma, x \in [a,b], \gamma \in \in \bigcap_i [\alpha_i,\beta_i]$.

<u>Шаг 1</u>. Найдем $\bar{\beta} = \min_i \beta_i$ и положим $s_1(x) = \bar{\beta}, x \in [a,b]$. Если $\bar{\beta} \in [\alpha_i,\beta_i], i = 1,\ldots,n,$ то $s_1(x)$ является искомым решением задачи. Если же для некоторых i оказалось $\bar{\beta} < \alpha_i$, то возьмем узел x_1 такой, что $\beta_1 = \bar{\beta}$ (если таких узлов несколько, то берется любой из них). Обозначим $\Delta_1 = \{y_1\}$, где $y_1 = x_1$. Ясно, что $\Delta_1 \subset \Delta$. Переходим к следующему шагу.

<u>Шаг 2</u>. Пусть при $k \geq 1$ построен сплайн $s_k(x)$ на сетке Δ_k: $a_k = y_1 < \ldots < y_k = b_k$, где все $y_i \in \Delta$, причем каждое из узловых значений сплайна $s_k(y_i), i = 1,\ldots,k$, попадет либо на нижнюю, либо на верхнюю границу соответствующего точке i ограничения (1). Кроме того, полагается, что $s_k(x) = s_k(a_k)$ при $x \in [a,a_k)$, и $s_k(x) = s_k(b_k)$ при $x \in (b_k,b]$.

Положим по определению

$$\rho_k(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ если } s_k(x_i) \in [\alpha_i,\beta_i], \\ \alpha_i - s_k(x_i), \text{ если } s_k(x_i) < \alpha_i, \\ \beta_i - s_k(x_i), \text{ если } s_k(x_i) > \beta_i \end{cases}$$

для всех $x_i \in \Delta$. Понятно, что $|\rho_k(x_i)|$ - это "отклонение" соответствующего значения сплайна $s_k(x_i)$ от интервала $[\alpha_i,\beta_i]$.

Вычислим наибольшее отклонение в узлах сетки $\bar{\rho}_k = \max_i |\rho_k(x_i)|$.

Если оказалось, что $\bar{\rho}_k = 0$, то процесс прекращается, и сплайн $s(x) = s_k(x)$ на сетке $\bar{\Delta} = \Delta_k$ считается искомым решением.

Если $\bar{\rho}_k \neq 0$, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Построение сплайна $s_{k+1}(x)$.

Пусть x_r - какой-нибудь из узлов, для которых $|\rho_k(x_r)| = \bar{\rho}_k$. Обозначим через Δ_{k+1} сетку, которая получается добавлением к сетке Δ_k узла x_r; a_{k+1}, b_{k+1} - наименьший и наибольший ее элементы. В качестве узловых значений сплайна $s_{k+1}(x)$ возьмем значения $s_{k+1}(x_i) = s_k(x_i)$ для $x_i \in \Delta_k$, а в точке x_r положим

$$s_{k+1}(x_r) = \begin{cases} \alpha_r, & \text{если} \quad \rho_k(x_r) > 0, \\ \beta_r, & \text{если} \quad \rho_k(x_r) < 0. \end{cases}$$

Далее, считаем $s_{k+1}(x) = s_{k+1}(a_{k+1})$ при $x \in [a, a_{k+1}]$ и $s_{k+1}(x) = s_{k+1}(b_{k+1})$ при $x \in [b_{k+1}, b]$. Таким образом, сплайн $s_{k+1}(x)$ определен на всем отрезке $[a,b]$. Переходим к шагу 2.

Сходимость алгоритма следует из того, что обращение к шагу 2, ввиду строгого вложения сеток $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_k \subset \ldots \ldots \subset \bar{\Delta} \subseteq \Delta$, выполняется не более n-1 раз. Докажем теперь, что построенный сплайн является решением задачи (2). Пусть сплайн $s(x)$ и его сетка узлов $\bar{\Delta}$ найдены, и число k таково, что $s(x) = s_k(x)$ и $\bar{\Delta} = \Delta_k$. Очевидно, сплайн $s(x)$ удовлетворяет ограничениям (1). Остается убедиться в выполнении условий (3) на сетке Δ. Обозначим $d_m(x) = s'_m(x+0) - s'_m(x-0)$, $m = 1,\ldots,k$. Очевидно, если $\alpha_i < s(x_i) < \beta_i$, то узел $x_i \notin \bar{\Delta}$, и, следовательно, $d(x_i) = d_k(x_i) = 0$. Поэтому достаточно проверить выполнение соотношений (3) только в узлах сетки $\bar{\Delta}$. Будем рассуждать, пользуясь методом индукции. На первом шаге, очевидно, имеют место условия (3). Предположим, что они выполняются при некотором m, $1 < m < k$, т.е. они справедливы для $d_m(x)$.

Пусть y_p, $1 < p \le m$, - тот из узлов сетки Δ_{m+1}: $a_{m+1} = y_1 < y_2 < \ldots < y_{m+1} = b_{m+1}$, который не принадлежит сетке Δ_m. О случаях $p=1$ и $p = m+1$ будет сказано отдельно.

Так как для всех $i \ne p$ имеем $s_{m+1}(y_i) = s_m(y_i)$, то, очевидно, равенство $d_{m+1}(y_i) = d_m(y_i)$ выполняется во всех узлах сетки Δ_{m+1}, кроме y_{p-1}, y_p, y_{p+1}.

Определим знак $d_{m+1}(y_p)$. Для удобства изложения нижняя граница коридора в узле y_i будет обозначаться $\alpha(y_i)$, а верхняя соответственно $\beta(y_i)$. По построению сплайна $s_m(x)$, имеем $s_{m+1}(y_p) = \alpha(y_p)$ (в случае $\rho_m(y_p) > 0$), либо $s_{m+1}(y_p) = \beta(y_p)$ (в случае $\rho_m(y_p) < 0$). Рассмотрим случай $\rho_m(y_p) > 0$ (все рассуждения легко переносятся на случай $\rho_m(y_p) < 0$). Обозначим $h_i = y_{i+1} - y_i$, $i = 1,\ldots,m$.

Вычислим величину $d_{m+1}(y_p)$. Вследствие линейности сплайна $s_m(x)$ на $[y_{p-1}, y_{p+1}]$, имеем

$$d_{m+1}(y_p) = s'_{m+1}(y_p+0) - s'_{m+1}(y_p-0) =$$

$$= \frac{h_{p-1} + h_p}{h_{p-1}h_p}\left[\frac{s_m(y_{p+1})h_{p-1} + s_m(y_{p-1})h_p}{h_{p-1} + h_p} - \alpha(y_p)\right] =$$

$$= \frac{h_{p-1} + h_p}{h_{p-1}h_p}\,(s_m(y_p) - \alpha(y_p)). \tag{4}$$

Следовательно, $d_{m+1}(y_p) < 0$. Если y_p - крайний узел, то по построению либо $s'_{m+1}(y_p-0) = 0$, либо $s'_{m+1}(y_p+0) = 0$ и требуемое неравенство получается сразу.

Покажем,теперь что $d_{m+1}(y_i)$ имеет тот же знак, что и $d_m(y_i)$ для $i = p-1, p+1$.

Рассмотрим узел y_{p-1} (для узла y_{p+1} схема рассуждений такая же). По аналогии с (4) находим

$$\delta\cdot d_m(y_{p-1}) = \lambda s_m(y_{p-2}) + \mu s_m(y_p) - s_m(y_{p-1}), \tag{5}$$

$$\delta\cdot d_{m+1}(y_{p-1}) = \lambda s_m(y_{p-2}) + \mu\alpha(y_p) - s_m(y_{p-1}), \tag{6}$$

где $\lambda = h_{p-1}/(h_{p-2} + h_{p-1})$, $\mu = 1 - \lambda$, $\delta = \mu h_{p-1}$. Согласно правилу выбора узла y_p имеем $\alpha(y_p) = s_m(y_p) + \bar{\rho}_m$. Поэтому из (5) и (6) следует, что $\delta\cdot d_{m+1}(y_{p-1}) = \delta\cdot d_m(y_{p-1}) + \mu\bar{\rho}_m$, и значит при $d_m(y_{p-1})\ge 0$ справедливо нужное неравенство $d_{m+1}(y_{p-1})\ge 0$. Следовательно, достаточно исследовать случай $d_m(y_{p-1})\le 0$.

Итак, пусть $d_m(y_{p-1})\le 0$, а число q таково, что точка y_{p-1} не является узлом сплайна $s_q(x)$, но есть узел сплайна $s_{q+1}(x)$. Тогда найдутся соседние узлы y_u, y_v сплайна $s_q(x)$ такие, что $y_u \le y_{p-2} < y_{p-1} < y_p < y_{p+1} \le y_v$, т.е сплайн $s_q(x)$ на отрезке $[y_u, y_v]$ является линейной функцией. Отсюда

$$s_q(y_{p-1}) = \lambda s_q(y_{p-2}) + \mu s_q(y_p). \tag{7}$$

Согласно условиям характеризации (3), имеем $s_m(y_{p-1}) = \alpha(y_{p-1})$, но в силу правила построения сетки Δ_{q+1}, имеем $\alpha(y_{p-1}) = s_q(y_{p-1}) + \bar\rho_q$. Таким образом,

$$s_m(y_{p-1}) = s_q(y_{p-1}) + \bar\rho_q . \tag{8}$$

В результате из (6)-(8) получаем

$$\delta \cdot d_{m+1}(y_{p-1}) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B, \tag{9}$$

где $A = s_m(y_{p-2}) - s_q(y_{p-2}) - \bar\rho_q$, $B = \alpha(y_p) - s_q(y_p) - \bar\rho_q$. По определению величины $\bar\rho_q$ для всех $\alpha(y_i)$, $u \le i \le v$, имеем $\alpha(y_i) - s_q(y_i) \le \bar\rho_q$ и, следовательно, $B \le 0$. Если к тому же $s_m(y_{p-2}) = \alpha(y_{p-2})$, то $A \le 0$, и в итоге $d_{m+1}(y_{p-1}) \le 0$. Кроме того, в случае $y_u = y_{p-2}$ имеем $A = -\bar\rho_q$, что также приводит к неравенству $d_{m+1}(y_{p-1}) \le 0$. Поэтому можно считать, что $y_u < y_{p-2}$. Докажем, что при $x \in [y_u, y_{p-1}]$ для $j = q, q+1, \dots, m$ выполняется неравенство $s_j(x) \le s_q(x) + \bar\rho_q$. В самом деле, при $j = q$ оно очевидно. Предположим, что $s_\nu(x) \le s_q(x) + \bar\rho_q$ для некоторого $\nu < m$. Покажем, что отсюда вытекает неравенство $s_{\nu+1}(x) \le s_q(x) + \bar\rho_q$. Действительно, это утверждение очевидно, если все узлы сплайна $s_{\nu+1}(x)$ при $x \in [y_u, y_{p-1}]$ совпадают с узлами сплайна $s_\nu(x)$. Пусть теперь $y_t \in [y_u, y_{p-1}]$ – узел сплайна $s_{\nu+1}(x)$, не являющийся узлом сплайна $s_\nu(x)$. Тогда, в соответствии с алгоритмом построения сплайна $s_{\nu+1}(x)$, в случае

$s_{\nu+1}(y_t) = \beta(y_t)$ имеем $s_{\nu+1}(y_t) \leq s_\nu(y_t)$, и поэтому $s_{\nu+1}(x) \leq$ $\leq s_\nu(x)$ при всех значениях $x \in [y_u, y_{p-1}]$. Если же $s_{\nu+1}(y_t) =$ $= \alpha(y_t)$, то $\alpha(y_t) \leq s_q(y_t) + \bar\rho_q$ и, следовательно, $s_{\nu+1}(x) \leq$ $\leq s_q(x) + \bar\rho_q$ при всех $x \in [y_u, y_{p-1}]$. Тем самым доказано требуемое неравенство, из которого при $x = y_{p-1}$ получаем $A \leq 0$ и в итоге $\delta \cdot d_{m+1}(y_{p-1}) \leq 0$, что и требовалось доказать.

Полученное утверждение остается в силе и в случае, когда y_{p-1} - крайний узел сетки Δ_{m+1}. В самом деле, при этом из (6) имеем $h_{p-1} d_{m+1}(y_{p-1}) = \alpha(y_p) - s_m(y_{p-1})$. Так как $s_m(y_{p-1}) =$ $= \alpha(y_{p-1})$ и узел y_{p-1} построен ранее узла y_p, то $\alpha(y_{p-1}) \geq$ $\geq \alpha(y_p)$, а следовательно, $d_{m+1}(y_{p-1}) \leq 0$. Обоснование алгоритма завершено.

Эффективность алгоритма обеспечивается тем, что на каждом шаге добавляется только один узел, который обязательно является узлом искомого сплайна. Алгоритмы, описанные в [3-5], не предполагают выполнения последнего утверждения, что приводит к более медленной их сходимости, а в [5], кроме того, и к необходимости задавать в некоторых узлах сетки интерполяционные условия.

Иллюстрацией работы предложенного здесь алгоритма могут служить результаты следующих численных экспериментов. Рассмотрим функции $F_1(x) = \exp(x)$, $F_2(x) = \exp(-10x)$, $F_3(x) =$ $= \sin(\pi x)$, $F_4(x) = 1/[1+100(x-0.5)^2]$ на отрезке $[0,1]$, которые использовались в качестве модельных примеров в [6]. Зададим серию равномерных сеток с количеством узлов $n = 10, 20, 50, 100, 1000, 10000$. В качестве сеточных данных будем использовать округленные до k-го знака после запятой значения функции $F_i(x)$ в узлах сетки. Коридор в каждом узле сетки задается в виде отрезка $\varepsilon = 10^{-k}$, середина которого проходит через заданное значение. Через $s_i(x)$ обозначим сплайн в выпуклом множестве (решение задачи (2)), а через $\bar s_i(x)$ - сплайн, интерполирующий сеточные данные. Расчеты выполнены на ЭВМ IBM 386DX в режиме двойной точности.

В табл. 1 приведено количество узлов сплайна в выпуклом множестве. Чем меньше ширина коридора, тем большее число узлов исходной сетки являются информативными. Отметим, что при больших n число информативных узлов относительно невелико: для n = = 1000 число последних составляет 30-40%, а для n = 10000 - всего 5-13%. Таким образом, налицо четко выраженный эффект сжатия информации. В табл. 2-5 для каждого значения n приведены следующие величины: отклонение сплайна $s_i(x)$ от функции $F_i(x)$ (первая строчка); отклонение его производной (вторая строчка); отклонение производной интерполяционного сплайна $\bar{s}_i(x)$

Т а б л и ц а 1

Число узлов сплайна $s_i(x)$ в коридоре ширины $\varepsilon = 10^{-k}$

Данные	k	Количество узлов, n					
		10	20	50	100	1000	10000
F_1	1	4	4	9	10	19	19
	2	10	11	12	16	32	71
	3	10	20	30	35	68	142
	4	10	20	50	94	150	314
	5	10	20	50	100	331	666
F_2	1	5	5	7	7	11	12
	2	7	10	15	17	30	59
	3	9	15	26	40	78	145
	4	10	18	38	62	175	343
	5	10	20	46	82	393	759
F_3	1	6	6	6	13	18	22
	2	10	14	24	22	50	94
	3	10	20	46	66	86	205
	4	10	20	50	96	219	472
	5	10	20	50	100	565	970
F_4	1	8	10	12	12	20	20
	2	10	18	30	30	67	124
	3	10	20	44	66	144	308
	4	10	20	50	94	316	620
	5	10	20	50	100	666	1356

Т а б л и ц а 2

Погрешность аппроксимации функции $F_1(x)$

ε	Количество узлов, n					
	10	20	50	100	1000	10000
10^{-1}	0.077 0.22 0.82	0.068 0.17 1.4	0.068 0.4 3.8	0.068 0.33 8.8	0.068 0.09 99.0	0.068 0.05 999.0
10^{-2}	0.011 0.16 0.16	0.0084 0.11 0.19	0.0051 0.13 0.49	0.0075 0.17 0.82	0.005 0.087 9.0	0.005 0.035 99.0
10^{-3}	0.004 0.11 0.11	0.0016 0.061 0.061	0.001 0.061 0.061	0.00092 0.054 0.1	0.00078 0.047 0.96	0.00078 0.22 9.0
10^{-4}	0.004 0.1 0.1	0.0009 0.05 0.05	0.0002 0.025 0.025	0.0001 0.016 0.016	0.0001 0.022 0.097	0.00005 0.015 1.0
10^{-5}	0.0039 0.1 0.1	0.0009 0.053 0.053	0.00014 0.022 0.022	0.00004 0.011 0.011	0.00001 0.0065 0.011	0.00001 0.0067 0.099

Т а б л и ц а 3

Погрешность аппроксимации функции $F_2(x)$

ε	Количество узлов, n					
	10	20	50	100	1000	10000
10^{-1}	0.077 0.5 0.5	0.06 0.62 1.5	0.05 1.1 4.4	0.05 1.1 9.4	0.05 1.1 99.4	0.05 0.59 99.6
10^{-2}	0.091 0.34 0.34	0.026 0.65 0.65	0.01 0.63 0.63	0.008 0.83 1.02	0.005 0.55 9.9	0.005 0.28 99.9
10^{-3}	0.09 0.32 0.32	0.027 0.6 0.6	0.0045 0.49 0.49	0.0018 0.37 0.37	0.0009 0.32 0.94	0.0005 0.22 9.99
10^{-4}	0.091 0.32 0.32	0.027 0.6 0.6	0.0047 0.5 0.5	0.0012 0.32 0.32	0.0001 0.1 0.12	0.0001 0.095 1.0
10^{-5}	0.091 0.32 0.32	0.027 0.6 0.6	0.0047 0.5 0.5	0.0012 0.32 0.32	0.00002 0.044 0.044	0.00001 0.04 0.1

Таблица 4

Погрешность аппроксимации функции $F_3(x)$

ε	Количество узлов, n					
	10	20	50	100	1000	10000
10^{-1}	0.06 0.58 0.57	0.09 1.1 1.1	0.05 0.87 4.0	0.05 0.92 9.0	0.05 0.98 99.0	0.05 0.98 999.0
10^{-2}	0.025 0.48 0.48	0.0092 0.3 0.3	0.0068 0.31 0.46	0.0071 0.28 1.02	0.005 0.31 9.7	0.005 0.31 99.7
10^{-3}	0.015 0.44 0.44	0.0039 0.22 0.22	0.0015 0.12 0.12	0.001 0.11 0.11	0.001 0.14 0.94	0.0005 0.14 9.9
10^{-4}	0.015 0.44 0.44	0.0034 0.21 0.21	0.00056 0.081 0.081	0.0002 0.048 0.048	0.0001 0.037 0.1	0.0001 0.041 1.0
10^{-5}	0.015 0.44 0.44	0.0034 0.21 0.21	0.0052 0.081 0.081	0.00034 0.041 0.041	0.00001 0.013 0.013	0.00001 0.013 0.1

Таблица 5

Погрешность аппроксимации функции $F_4(x)$

ε	Количество узлов, n					
	10	20	50	100	1000	10000
10^{-1}	0.25 6.2 6.2	0.15 3.9 3.9	0.065 2.52 4.6	0.05 2.7 9.7	0.05 4.1 99.0	0.05 4.1 999.6
10^{-2}	0.25 6.2 6.2	0.065 3.86 3.86	0.015 1.6 1.6	0.01 0.89 0.89	0.0065 1.3 9.8	0.0065 1.4 99.8
10^{-3}	0.24 6.2 6.2	0.065 3.86 3.86	0.01 1.6 1.6	0.0034 0.84 0.84	0.001 0.55 0.98	0.0005 0.42 9.9
10^{-4}	0.24 6.2 6.2	0.065 3.86 3.86	0.01 1.6 1.6	0.0026 0.8 0.8	0.0001 0.14 0.14	0.00009 0.014 0.98
10^{-5}	0.24 6.2 6.2	0.065 3.86 3.86	0.01 1.6 1.6	0.0025 0.8 0.8	0.00003 0.088 0.088	0.00001 0.053 0.1

Таблица 6

Время вычисления (сек) сплайна в выпуклом множестве

k	Количество узлов, n					
	1000	2000	4000	6000	8000	10000
2	0.39	0.77	1.60	2.42	3.30	4.06
3	0.44	0.88	1.87	2.80	3.79	4.73
4	0.49	1.10	2.19	3.35	4.45	5.61

(третья строчка). Вычисление отклонений производилось на равномерной сетках, десятикратно загущенных по сравнению с исходными. При этом погрешность производной определялась только на отрезке между крайними узлами сетки $\bar{\Delta}$ сплайна $s_i(x)$. В табл. 6 приведено время (в секундах), затраченное на вычисление сплайна в выпуклом множестве в коридоре ширины $\varepsilon = 10^{-k}$, $k = 2,3,4$, на серии равномерных сеток из n узлов для функции $\sin(\pi x)$. Четко прослеживается линейная зависимость от количества узлов, а скорость вычисления тем больше, чем шире коридор.

Благодарю Ю.С.Волкова и В.Л.Мирошниченко за полезные замечания.

Литература

1. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация.-М.: Мир,1975. - 496 с.

2. ВЕРШИНИН В.В., ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ПАВЛОВ Н.Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. - Новосибирск: Наука, Сиб.отд., 1988. - 102 с.

3. ВАСИЛЕНКО В.А., ЗЮЗИН М.В., КОВАЛКОВ А.В. Сплайн-функции и цифровые фильтры. - Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1984. - 156 с.

4. ПАВЛОВ Н.Н. Сглаживающие сплайны первой степени //Сплайн-аппроксимация и численный анализ.-Новосибирск, 1985. - Вып. 108: Вычислительные системы. - С. 31-36.

5. ИГНАТОВ М.И., ПЕВНЫЙ А.Б. Натуральные сплайны многих переменных. - Л.: Наука, 1991. - 124 с.

6. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

Поступила в редакцию
27 октября 1995 года