С П Л А Й Н Ы И И Х П Р И Л О Ж Е Н И Я
(Вычислительные системы)
1995 год Выпуск 154

УДК 519.65

ВЫПУКЛАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОБОБЩЕННЫМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ КЛАССА C^2

Ю.С.Завьялов

Введение

Статья продолжает цикл работ [1,2] по монотонной и выпуклой интерполяции обобщенными кубическими сплайнами $S_G(x)$ классов C^1 (эрмитова интерполяция) и C^2 (лагранжева интерполяция).

Как известно [3], для кубических сплайнов класса C^2 используются два представления звеньев сплайна: одно через значения его первой производной m_i в узлах сетки, а второе - через значения второй производной M_i, причем одно получается из другого и наоборот. В обоих случаях интерполяция сводится к системе линейных уравнений с трехдиагональной матрицей с диагональным преобладанием.

В теории обобщенных кубических сплайнов традиционно используется представление звеньев сплайна, идущее от формул рациональных сплайнов Шпета [4]. Его применение для выражения формул сплайна через значения m_i, как показано В.Л.Мирошниченко [5], приводит к системе уравнений, обладающей свойствами такой системы для кубических сплайнов, но переход в ней к значениям M_i в общем случае нарушает свойства диагонального преобладания у матрицы новой системы.

В работе [5], в частности, сформулирована задача выпуклой интерполяции, предложена методика ее решения и найдено одно из возможных решений. Главная трудность заключалась в выборе свободных параметров сплайна, при которых выполнялись бы необходимые условия выпуклости, $M_i \geq 0$ (≤ 0), $i = 0,\ldots,N$, после чего достаточные условия выпуклости на отрезке,т.е. $S''_G(x) \geq 0$ (≤ 0), также оказываются выполненными для любых выпуклых исходных данных.

Тем не менее, использование традиционного представления обобщенного сплайна имеет один недостаток: при интерполяции гладких функций в областях их больших градиентов звено интерполяционного сплайна при фиксированной сетке узлов в пределе приближается к линейной функции и аппроксимирует, кроме самой функции, только ее первую производную. При выпуклой интерполяции естественно стремиться к аппроксимации также и второй производной.

Предлагаемая здесь методика должна позволить это делать. Она основана на новых формулах обобщенного сплайна [6], при котором звено сплайна в пределе приближается к многочлену второй степени. С применением, в основном, методики работы [5] мы получаем необходимые условия выпуклости сплайна в виде системы неравенств. После этого доказываются две теоремы о достаточных условиях, представленных системами равенств и неравенств и предлагаются способы их решения.

Теоретические результаты применены к чисто кубическим сплайнам, для которых повторены результаты В.Л.Мирошниченко [5, 7], к кубическим сплайнам с дополнительными узлами и рациональным сплайнам [3]. Изложение проиллюстрировано примерами выпуклых сплайнов указанных типов по дискретным исходным данным. Интерполяция гладких функций будет предметом другой работы.

Автор благодарен В.В.Богданову, проверившему выкладки и построившему графики. Его замечания способствовали существенному улучшению работы.

§1. Новая формула интерполяционного обобщенного сплайна

Рассматриваются обобщенные сплайны на отрезке $[a,b]$ с сеткой узлов Δ: $a = x_0 < \dots < x_N = b$ с шагами $h_i = x_{i+1} - x_i$. Звено сплайна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ записывается в виде [6]:

$$S_G(x) = f_{i+1}t + f_i(1-t) + h_i^2\{C_i[\varphi_i(t) - t^2] +$$
$$+ D_i[\psi_i(t) - (1-t)^2] + E_i t(1-t)\}, \tag{1}$$

где $t = (x-x_i)/h_i$, $\varphi_i(t), \psi_i(t) \in C^2[0,1]$ – базовые функции, содержащие свободные параметры. Они подчиняются ограничениям

$$\varphi_i(1) = \psi_i(0) = 1, \quad \varphi_i^{(r)}(0) = \psi_i^{(r)}(1) = 0, \quad r = 0,1,2, \tag{2а}$$

$$\varphi_i'(1) > 2, \quad \psi_i'(0) < -2, \tag{2б}$$

$$\varphi_i''(1) > 0, \quad \psi_i''(0) > 0. \tag{2в}$$

При ограничениях (2а) выполняются условия интерполяции $S_G(x_j) = f_j$, $j = i, i+1$. Произвольные постоянные определяются из условий непрерывности второй производной сплайна в узлах сетки, $S_G''(x_j) = M_j$, $j = i, i+1$, в виде

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \{2M_i + [\psi_i''(0) - 2]M_{i+1} + 2\psi_i''(0)E_i\}/2\Delta_i, \\ D_i &= \{[\varphi_i''(1) - 2]M_i + 2M_{i+1} + 2\varphi_i''(1)E_i\}/2\Delta_i, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где предполагается

$$\Delta_i = \frac{1}{2}\varphi_i''(1)\psi_i''(0) - \varphi_i''(1) - \psi_i''(0) > 0. \tag{4}$$

Используем обозначения:

$$\alpha_i = [\varphi_i'(1) - 2]\Delta_i^{-1}, \qquad \beta_i = -[\psi_i'(0) + 2]\Delta_i^{-1},$$

$$\rho_i = \alpha_i \psi_i''(0) - 1, \qquad \sigma_i = \beta_i \varphi_i''(1) - 1. \quad \Big\} \tag{5}$$

Очевидно, в силу (2б) и (4) $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$.

Условия непрерывности первой производной сплайна в узлах сетки, $S'_G(x_i-0) = S'_G(x_i+0)$, дают уравнения:

$$\mu_i\{\alpha_{i-1}M_{i-1} + [\tfrac{1}{2}(\rho_{i-1} + 1) - \alpha_{i-1}]M_i + \rho_{i-1}E_{i-1}\} +$$
$$+ \lambda_i\{[\tfrac{1}{2}(\sigma_i + 1) - \beta_i]M_i + \beta_i M_{i+1} + \sigma_i E_i\} = \delta_i^2 , \tag{6}$$
$$i = 1,\ldots,N-1.$$

Здесь использованы обозначения: $\lambda_i = h_i(h_{i-1} + h_i)^{-1}$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$ и $\delta_{i+1/2} = (f_{i+1} - f_i)h_i^{-1}$, $\delta_i^2 = (\delta_{i+1/2} - \delta_{i-1/2})(h_{i-1} + h_i)^{-1}$ – первые и вторые разделенные разности соответственно.

Уравнения (6) имеют такую же структуру, как и соответствующие уравнения для кубических сплайнов [3], с точностью до величин E_{i-1}, E_i. Чтобы не изменять строения уравнений, положим

$$E_i = u_i M_i + v_i M_{i+1}, \tag{7}$$

где u_i, v_i – свободные параметры в дополнение к таковым в базовых функциях. Они связаны соотношениями

$$u_i + v_i = -\frac{1}{2} . \tag{8}$$

Тогда уравнения (6) приводятся к виду:

$$c_i M_{i-1} + a_i M_i + b_i M_{i+1} = d_i, \quad i=1,\ldots,N-1, \tag{9}$$

где

$$b_i = \lambda_i[\beta_i + (\sigma v)_i], \qquad c_i = \mu_i[\alpha_{i-1} + (\rho u)_{i-1}], \tag{10а}$$

$$a_i = \frac{1}{2} - b_i - c_i, \tag{10б}$$

$$d_i = \delta_i^2. \tag{10в}$$

К уравнениям (9) добавляются уравнения, порождаемые граничными условиями в задаче интерполяции.

Граничные условия типа I, $S'_G(x_i) = f'_i$, $i=0,N$, дают уравнения:

$$[\frac{1}{2}(\sigma_o + 1) - \beta_o]M_o + \beta_o M_1 + \sigma_o E_o = \delta^2_o,$$

$$\alpha_{N-1}M_{n-1} + [\frac{1}{2}(\rho_{n-1} + 1) - \alpha_{n-1}]M_N + \rho_{N-1}E_{N-1} = \delta^2_N,$$

где $\delta^2_o = (\delta_{1/2} - f'_o)h^{-1}_o$, $\delta^2_N = (f'_N - \delta_{N-1/2})h^{-1}_{N-1}$.

Подставляя сюда выражения E_o, E_{N-1} из (7) и учитывая (8), получаем граничные уравнения вида:

$$\left.\begin{aligned} a_oM_o + b_oM_1 &= d_o, \\ c_NM_{N-1} + a_NM_N &= d_N, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где

$$\left.\begin{aligned} b_o &= \beta_o + (\sigma v)_o, \quad a_o = \frac{1}{2} - b_o, \quad d_o = \delta^2_o, \\ c_N &= \alpha_{N-1} + (\rho u)_{N-1}, \quad a_N = \frac{1}{2} - c_N, \quad d_N = \delta^2_N. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Граничные условия типа II, $S''_G(x_i) = f''_i$, $i=0,N$, дают уравнения (11) с коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned} b_o &= c_N = 0, \qquad a_o = a_N = \frac{1}{2}, \\ d_o &= \delta^2_o = f''_o/2, \qquad d_N = \delta^2_N = f''_N/2. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

В общем случае линейных граничных условий в уравнениях (11) коэффициенты a_o, a_N, b_o, c_N зависят от параметров базовых функций подобно формулам (12). Будем нормировать их так, чтобы выполнялись равенства $a_o + b_o = \frac{1}{2}$, $a_N + c_N = \frac{1}{2}$.

Равенства (8), использованные при выводе уравнений (9) и (11), обеспечивают в них баланс по вторым производным, ибо в (9) сумма коэффициентов при M_j, $j = i-1, i, i+1$, слева есть $a_i + b_i + c_i = 1/2$, а $\delta_i^2 = f''(\zeta)/2$, $\zeta \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, для дважды непрерывно дифференцируемых функций. Условие баланса выполня - ется и для граничных условий. Этот факт позволяет обеспечивать приближение в узлах второй производной интерполируемой функции второй производной сплайна.

Выясним, в каком отношении используемое представление сплайна (1) находится к традиционному представлению (см., например, [1,2])

$$\tilde{S}_G(x) = f_{i+1}t + f_i(1-t) + h_i\{\tilde{C}_i[\varphi_i(t) - t] +$$

$$+ \tilde{D}_i[\psi_i(t) - 1 + t]\}, \qquad (14)$$

где $\tilde{C}_i$, $\tilde{D}_i$ - константы.

Выясним, когда (1) и (14) являются лишь разными представлениями одного и того же интерполяционного сплайна и когда это разные сплайны?

Если это один и тот же сплайн, т.е. $\tilde{S}_G(x) = S_G(x)$, то должно быть $\tilde{M}_j = M_j$, $j = i, i+1$. Вычисляя $\tilde{M}_j$ и M_j из (1) и (14), находим

$$\tilde{C}_i\varphi_i''(1) = h_i[C_i\varphi_i''(1) - 2(C_i + D_i + E_i)],$$

$$\tilde{D}_i\psi_i''(0) = h_i[D_i\psi_i''(0) - 2(C_i + D_i + E_i)].$$

Подставляя отсюда выражения для $\tilde{C}_i$, $\tilde{D}_i$ в (14), получаем

$$\tilde{S}_G(x) = S_G(x) - 2h_i^2(C_i + D_i + E_i)A_i(t),$$

где

$$A_i(t) = \frac{\varphi_i(t)-t}{\varphi_i''(1)} + \frac{\psi_i(t)-1+t}{\psi_i''(0)} + \frac{1}{2}\,t(1-t). \qquad (15)$$

Равенство $\tilde{S}_G(x) = S_G(x)$ возможно в двух случаях:

1) $C_i + D_i + E_i = 0$. Это, в силу (3), (7), сводится к равенствам $\varphi_i''(1)[1 + u_i\psi_i''(0)]M_i + \psi_i''(0)[1 + v_i\varphi_i''(1)]M_{i+1} = 0$, $i = 0,\dots,N-1$. Система таких равенств, вообще говоря, не совместна с системой (9),(11). Не удается ее выполнить и за счет выбора параметров u_i, v_i так, чтобы обращались в нуль коэффициенты при M_i, M_{i+1}, ибо при этом нельзя одновременно выполнить (4) и (8).

2) $A_i(t) = 0$. В силу (2а), из (15) имеем $A_i^{(r)}(0) = A_i^{(r)}(1) = 0$, $r = 0,2$. Согласно (5), $A_i'(0) = \sigma_i$, $A_i'(1) = \rho_i$. Очевидно, *если базовые функции таковы, что $\rho_i = \sigma_i = 0$ и $A_i'''(t) = 0$, то $A_i(t) = 0$ и (1) и (14) суть представления одного и того же сплайна.*

Примером таких базовых функций являются функции кубических сплайнов (см. §4, формулы (48)), для которых (1) и (14) равносильны, что соответствует известному факту [3, с.99]. Для сплайнов, рассмотренных в §5,6, $A_i(t) = 0$ только на некоторых многообразиях в пространстве свободных параметров.

В заключение параграфа рассмотрим предельные формулы обобщенного сплайна при больших $\varphi_i''(1)$, $\psi_i''(0)$ в предположении, что матрица системы (9),(11) с диагональным преобладанием, т.е. $r_i = a_i - |b_i| - |c_i| > 0$. Ранее такой анализ был проделан для рациональных сплайнов в традиционном их представлении [3, с.191].

Будем считать, что, как и в [3], $\varphi_i'(1) \sim O([\varphi_i''(1)]^{1/2})$, $-\psi_i'(0) \sim O([\psi_i''(0)]^{1/2})$. Тогда из (5) имеем предельные значения $\alpha_i = \beta_i = 0$, $\rho_i = \sigma_i = -1$, а из (10) $b_i = -\lambda_i v_i$, $c_i = -\mu_i u_{i-1}$. Значит, $r_i = \frac{1}{2} + \mu_i[u_{i-1} - |u_{i-1}|] + \lambda_i[v_i - |v_i|] > 0$. В частности, это гарантировано, если $\mu_i u_{i-1} + \lambda_i v_i > -\frac{1}{4}$.

Известна оценка кубической нормы вектора решения системы [3, с. 334]: $\|M\| \le \max_i |\delta_i^2|/r_i = F$.

Из (3), (7) находим

$$|C_i| \le \psi_i''(0)[1 + 2(|u_i| + |v_i|)]F/2\Delta_i,$$

$$|D_i| \le \varphi_i''(1)[1 + 2(|u_i| + |v_i|)]F/2\Delta_i.$$

Так как $\Delta_i \to \infty$ как $O(\varphi_i''(1)\psi_i''(0))$, то в пределе $|C_i| = |D_i| = 0$.

Обращаясь к формуле (1), имеем на $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_G(x) = f_{i+1}t + f_i(1-t) + h_i^2(u_iM_i + v_iM_{i+1})t(1-t).$$

Система неравенств $\mu_i u_{i-1} + \lambda_i v_i > -1/4$, $i = 0,\ldots,N$, и равенств (8) имеет решение. В самом деле, исключая из неравенств v_i или u_i с помощью (8), получаем

$$\mu_i(u_{i-1} + \frac{1}{4}) > \lambda_i(u_i + \frac{1}{4}), \quad i = 0,\ldots,N,$$

или

$$\mu_i(v_{i-1} + \frac{1}{4}) < \lambda_i(v_i + \frac{1}{4}), \quad i = 0,\ldots,N.$$

Теперь достаточно выбирать одну из последовательностей $\{u_i\}$ или $\{v_i\}$ в соответствии с полученными неравенствами, а вторую вычислять согласно (8) и цель будет достигнута.

Отсюда, *если* $\varphi_i''(1) \to \infty$, $\psi_i''(0) \to \infty$ *и выполняются* $r_i > 0$ *и* (8) *для всех* i *одновременно, то* $S_G(x) \to S_2(x)$ *переходит в параболический сплайн класса* C^1.

§2. Существование и единственность интерполяционного обобщенного сплайна

Исследование ведется с использованием леммы В.Л.Мирошниченко [5], которая применительно к данному случаю звучит так:

ЛЕММА 1 [5]. *Пусть коэффициенты системы* (9),(11) *удовлетворяют условиям*

$$a_0 > 0,\ b_0 < a_0a_1/(b_1 + c_1), \tag{16a}$$

$$a_i > 0,\ b_i \ge 0,\ c_i \ge 0,\ a_i > b_i + c_i,\ i = 1,\dots,N-1, \tag{16б}$$

$$a_N > 0,\ c_N < a_{N-1}a_N/(b_{N-1} + c_{N-1}). \tag{16в}$$

Если

$$d_i \ge 0,\ i = 0,\dots,N, \tag{17}$$

$$d_0 - b_0 d_1/a_1 \ge 0, \tag{18а}$$

$$d_i - b_i d_{i+1}/a_{i+1} - c_i d_{i-1}/a_{i-1} \ge 0,\ i = 1,\dots,N-1, \tag{18б}$$

$$d_N - c_N d_{N-1}/a_{N-1} \ge 0, \tag{18в}$$

то система (9),(11) разрешима и

$$M_i \ge 0,\ i = 0,\dots,N. \tag{19}$$

Система (9),(11) имеет решение $M_i \le 0,\ i = 0,\dots,N,$ *если знаки в (17),(18) изменены на противоположные.*

В [5] показано, что для существования и единственности решения системы (9),(11) достаточно выполнения условий (16), которые представляют собой достаточные условия невырожденности трехдиагональной матрицы - критерий Адамара [3, с.333], но с измененными граничными неравенствами.

Согласно (10б), чтобы выполнялись (16б), должно быть, кроме $b_i \ge 0$, $c_i \ge 0$ также $b_i + c_i < 1/4$, $a_i > 1/4$. Так как $\lambda_i + \mu_i = 1$ то последние неравенства достаточно заменить на неравенства

$$0 \le b_i < \lambda_i/4,\ \ 0 \le c_i < \mu_i/4,\ i = 1,\dots,N-1. \tag{20}$$

В (16а),(16в) заменяем a_0, a_N через b_0, c_N и получаем

$$b_0 < a_1,\ c_N < a_{N-1}. \tag{20а}$$

Итак, *если выполняются неравенства (20),(20а),то интерполяционный обобщенный сплайн существует и единствен.*

После решения системы (9),(11) формулу обобщенного сплайна получаем из (1),(3),(7). Предварительно введем обозначения

$$U_i = 1 + u_i\psi_i''(0), \quad V_i = 1 + v_i\varphi_i''(1).$$

Из этих формул следует, что

$$u_i = (U_i-1)/\psi_i''(0), \quad v_i = (V_i-1)/\varphi_i''(1), \tag{21}$$

и согласно (8)

$$U_i\varphi_i''(1) + V_i\psi_i''(0) = -\Delta_i, \quad i = 0,\dots,N-1. \tag{22}$$

Формула сплайна имеет вид:

$$S_G(x) = f_{i+1}t + f_i(1-t) + h_i^2[\Phi_i(t)M_i + \Psi_i(t)M_{i+1}], \tag{23}$$

$$i = 0,\dots,N-1,$$

где в общем случае

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i(t) &= \Delta_i^{-1}\{U_i[\varphi_i(t)-t^2]-V_i[\psi_i(t)-(1-t)^2]\}+u_it(1-t), \\ \Psi_i(t) &= -\Phi_i(t) - \frac{1}{2}t(1-t). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Если в (15) $A_i(t) = 0$, то, исключая из $\Phi_i(t)$, например V_i, с помощью (22), получаем

$$\left.\begin{aligned} \Phi_i(t) &= \frac{\psi_i(t) - 1+t}{\psi_i''(0)}, \\ \Psi_i(t) &= \frac{\varphi_i(t) - t}{\varphi_i''(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

т.е. формулы в (14).

Трудность заключается в таком задании свободных парамет - ров сплайна, чтобы выполнялась система неравенств (20),(20а). Они входят в нее сложным образом через величины a_i, b_i,c_i согласно (10а),(10б) и граничных соотношений, например, (12), (13). В этой связи представляется целесообразным расщепить задачу так, чтобы нахождение параметров, входящих в базовые функции, отделить от параметров u_i, v_i, или U_i, V_i. Это будет особенно важно при построении выпуклого сплайна, где к (20), (20а) добавятся неравенства - условия выпуклости, в первую очередь, (18).

Обращаясь к неравенствам (20),(20а), введем, как это часто делается при решении систем неравенств, дополнительные переменные $b_0,\ldots,b_{n-1}$, $c_1,\ldots,c_N$. Нормируем их так: $\bar{b}_i = b_i/\lambda_i$, $\bar{c}_i = c_i/\mu_i$, где $\lambda_0 = \mu_N = 1$.

Тогда из (20) получаем

$$0 \le \bar{b}_i < 1/4, \quad 0 \le \bar{c}_i < 1/4, \quad i = 1,\ldots,N-1. \tag{25}$$

Учитывая, что для этих индексов $a_i > \frac{1}{4}$, заменяем (20а) более сильными неравенствами

$$\bar{b}_0 \le \frac{1}{4}, \qquad \bar{c}_N \le \frac{1}{4}. \tag{25а}$$

В силу (5),(10а),(12),(21) для сплайнов с граничными условиями типа I можно записать

$$\sigma_i V_i + 1 = \bar{b}_i \varphi_i''(1), \tag{26а}$$

$$\rho_i U_i + 1 = \bar{c}_{i+1} \psi_i''(0), \tag{26б}$$

$$i = 0,\ldots,N-1.$$

Здесь в дополнение к (25а) положено $\bar{b}_0 \ge 0$, $\bar{c}_N \ge 0$. В общем случае граничных условий выражения b_0 и c_N могут быть самыми различными и формулы (26а) при $i = 0$ и (26б) при $i = N-1$, вообще говоря, будут другими. В случае граничных условий типа II (13), где $b_0 = c_N = 0$, , таких формул по-просту нет. Но в этом особом случае мы вправе ввести новые неизвестные

$$0 \le \bar{b}_0^* < \infty, \qquad 0 \le \bar{c}_N^* < \infty \tag{25б}$$

и добавить в (26) недостающие формулы. В дальнейшем рассматриваются только такие случаи граничных условий, когда (26) существуют для всех индексов i.

Кроме того, ради сокращения изложения, будем принимать ограничения (25) для всех индексов без исключения. Но читатель должен помнить о возможности расширения условий для $\bar{b}_o$, $\bar{c}_N$ (25а) и $\bar{b}_o^*$, $\bar{c}_N^*$ (25б). Подчеркнем также, что (26) при как-то, определенных $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ задают соотношения между параметрами базовых функций и величинами U_i, V_i, и введение $\bar{b}_o^*$, $\bar{c}_N^*$ никак не касается уравнений (11).

Далее для данного индекса i рассматривается два случая.

а) $\rho_i = \sigma_i = 0$, как например, для базовых функций кубических сплайнов (§4). Из (26) получаем

$$\bar{b}_i\varphi_i''(1) = 1, \tag{27а}$$

$$\bar{c}_{i+1}\psi_i''(0) = 1, \tag{27б}$$

$$i \in \{0,\dots,N-1\}.$$

Здесь согласно (2в) необходимо, чтобы $\bar{b}_i > 0$, $\bar{c}_{i+1} > 0$. Тогда (25) и (27) обеспечивают выполнение условий (4). Отметим, что для параметров $\bar{b}_o^*$, $\bar{c}_N^*$ (25б) достаточно, чтобы $0 < \bar{b}_o^* + \bar{c}_1 < \frac{1}{2}$, $0 < \bar{b}_{N-1} + \bar{c}_N^* < \frac{1}{2}$.

Итак, *в данном случае выбором параметров базовых функций и* $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ *для индекса* i *нужно удовлетворить четыре равенства:* $\rho_i = \sigma_i = 0$, (27) *и четыре неравенства* (25);

б) $\rho_i \neq 0$, $\sigma_i \neq 0$. Будем обозначать

$$\left.\begin{aligned} F[\varphi_i] &= \frac{1}{2}\varphi_i''(1) - \varphi_i'(1) + 1, \\ G[\psi_i] &= \frac{1}{2}\psi_i''(0) + \psi_i'(0) + 1 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

и в дополнение к (2) предполагать

$$F[\varphi_i] \geq 0, \quad G[\psi_i] \geq 0. \tag{29}$$

ЛЕММА 2. *Справедливы тождества*

$$\varphi_i''(1) - \rho_i\Delta_i = \psi_i''(0)F[\varphi_i], \qquad (30а)$$

$$\psi_i''(0) - \sigma_i\Delta_i = \varphi_i''(1)G[\psi_i]; \qquad (30б)$$

$$\Delta_i(\rho_i G[\psi_i] + \sigma_i) = -\psi_i''(0)(F[\varphi_i]G[\psi_i] - 1), \qquad (31а)$$

$$\Delta_i(\sigma_i F[\varphi_i] + \rho_i) = -\varphi_i''(1)(F[\varphi_i]G[\psi_i] - 1). \qquad (31б)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (30) проверяются подстановкой в них выражений (4),(5) и (28). Равенства (31) проверяются подстановкой в их левые части $\rho_i\Delta_i$, $\sigma_i\Delta_i$ из (30).

Исключим из (26) U_i, V_i с помощью (22). Получаем

$$\sigma_i\varphi_i''(1) + \rho_i\psi_i''(0) - \rho_i\sigma_i\Delta_i = \varphi_i''(1)\psi_i''(0)(\bar{b}_i\rho_i + \bar{c}_{i+1}\sigma_i). \qquad (32)$$

Применяя к левой части (32) последовательно тождества (30а) и (31а) или (30б) и (31б) получаем

$$F[\varphi_i]G[\psi_i] - 1 + \Delta_i(\bar{b}_i\rho_i + \bar{c}_{i+1}\sigma_i) = 0, \ i \in \{0,\dots,N-1\}. \qquad (33)$$

Выполнение (33) в отличие от (27) не гарантирует выполнения условий (4). В теоремах §3 они предполагаются выполненными, но при практическом использовании теорем они выступают как дополнительные условия.

Итак, *в данном случае выбором параметров базовых функций и* $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ *для индекса* i *нужно удовлетворить одно равенство* (33) *и пять неравенств* (4),(25).

Порядок работы по построению интерполяционного сплайна в обоих случаях следующий: а) задаются параметры базовых функций так, чтобы выполнялись указанные равенства и неравенства; б) величины U_i,V_i находятся из (26). В частном случае, $\rho_i = \sigma_i = 0$,они задаются произвольно, лишь бы удовлетворялись (22). Если $A_i(t) = 0$, то можно пользоваться формулами (24а), где они не фигурируют. Величины u_i,v_i вычисляются из (21); в) решается система (9),(11) и находятся значения M_i, $i = 0,\dots,N$; г) значения сплайна вычисляются по формулам (23).

§3. Достаточные условия выпуклости интерполяционного сплайна

Пусть исходные данные выпуклы вниз (вверх), т.е. $\delta_i^2 \geq 0$ ($\delta_i^2 \leq 0$), $i = 0,\dots,N$. Требуется решить два вопроса: 1) Каковы необходимые условия выпуклости сплайна в терминах M_i и при каких ограничениях на базовые функции они выполняются? 2) Каковы достаточные условия выпуклости на отрезке $[a,b]$ и как можно выполнить их?

1. Очевидна

ЛЕММА 3. *Чтобы сплайн был выпуклым вниз, т.е.* $S_G''(x) \geq 0$ *на* $[a,b]$, *необходимо, чтобы*

$$M_i \geq 0, \text{ если } \delta_i^2 > 0, \ i \in \{1,\dots,N-1\}, \ \delta_0^2 \geq 0, \ \delta_N^2 \geq 0, \tag{34а}$$

$$M_{i-1} = M_i = M_{i+1} = 0, \text{если } \delta_i^2 = 0, \ i \in \{1,\dots,N-1\}. \tag{34б}$$

Для сплайна, выпуклого вверх, $S_G''(x) \leq 0$, *знаки неравенств в* (34а) *меняются на противоположные.*

Обратимся к неравенствам (17),(18) леммы 1.

"Сильный" вариант леммы 1, т.е. $M_i > 0$, $i = 0,\dots,N$, получается, если все $d_i > 0$. Если при одном $j \in \{0,\dots,N\}$ $d_j = \delta_j^2 = 0$, то согласно (18) должно быть $b_j = c_j = 0$. Из (9) имеем $M_j = 0$ и система распадается на две системы типа системы (9),(11) при $i = 0,\dots,j-1$ и $i = j+1,\dots,N$, для которых выполняется сильный вариант леммы 1. Значит, условия (34б) выполнены быть не могут. Исключение составляет тривиальный случай $d_i = 0$, $M_i = 0$, $i = 0,\dots,N$.

В главном случае $d_i > 0$, $i = 1,\dots,N-1$, т.е. исходные данные строго выпуклы вниз, $d_0 \geq 0$, $d_N \geq 0$, причем равенства возможны, если только $b_0 \leq 0$, $c_N \leq 0$. Здесь из необходимых условий выпуклости реализуются только (34а).

Подобные рассуждения справедливы и при выпуклых вверх исходных данных.

Неравенства (18б) выполняются, если

$$\lambda_i d_i \geq \frac{b_i d_{i+1}}{a_{i+1}}, \quad \mu_i d_i \geq \frac{c_i d_{i-1}}{a_{i-1}}, \quad i = 1,\dots,N-1. \tag{35}$$

Сюда добавляются (18а) и (18в)

$$d_o \geq \frac{(b_o)_+ d_1}{a_1}, \quad d_N \geq \frac{(c_N)_+ d_{N-1}}{a_{N-1}}, \tag{35а}$$

где $(z)_+ = \max(0,z)$.

Учитывая (20), из (35),(35а) получаем при обозначениях $\eta_i = d_{i+1}/d_i$

$$\frac{\bar{c}_1}{a_o} \leq \eta_o \leq \frac{\frac{1}{2} - \lambda_1 \bar{b}_1 - \mu_1 \bar{c}_1}{(b_o)_+}, \tag{36а}$$

$$\frac{\bar{c}_{i+1}}{\frac{1}{2} - \lambda_i \bar{b}_i - \mu_i \bar{c}_i} \leq \eta_i \leq \frac{\frac{1}{2} - \lambda_{i+1} \bar{b}_{i+1} - \mu_{i+1} \bar{c}_{i+1}}{\bar{b}_i}, \tag{36б}$$

$$i = 1,\dots,N-2,$$

$$\frac{(c_N)_+}{\frac{1}{2} - \lambda_{N-1} \bar{b}_{N-1} - \mu_{N-1} \bar{c}_{N-1}} \leq \eta_{N-1} \leq \frac{a_N}{\bar{b}_{N-1}}. \tag{36в}$$

Знаки в (36) сохраняются, даже если в (17), (18) и, значит, в (35) в случае выпуклых вверх исходных данных они изменены на противоположные.

Неравенства (36) выписаны для любых граничных условий. В случае условий типа I следует заменить $(b_o)_+ \to \bar{b}_o$; $(c_N)_+ \to c_N$, $a_o \to \frac{1}{2} - \bar{b}_o$, $a_N \to \frac{1}{2} - \bar{c}_N$. Для условий типа II $\bar{b}_o = \bar{c}_N = 0$, $a_o = a_N = \frac{1}{2}$. Отсюда правое неравенства в (36а) и левое в (36в) выполняются.

Существование решения системы неравенств (36) относительно $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$ очевидно. Достаточно заметить, что при $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i \in$

$\in (0,\frac{1}{4})$ $\frac{1}{2} - \lambda_i\bar{b}_i - \mu_i\bar{c}_i > \frac{1}{4}$. Поэтому при $\eta_i = 1$ соответствующие неравенства выполняются при любых допустимых $\bar{b}_i, \bar{c}_i$. При $\eta_i < 1$ достаточно взять $\bar{c}_{i+1} \leq \eta_i/4$, а при $\eta_i > 1$ достаточно взять $\bar{b}_i \leq \frac{1}{4}\eta_i$. И это не единственная возможность.

Неудобство использования неравенств (36) заключается в необходимости знать при решении левых неравенств значение $\bar{c}_i$, зависящее от данных на предыдущем звене сплайна, а при решении правых - $\bar{b}_{i+1}$, зависящее от данных на последующем звене. Кроме того, (36) - это только необходимые условия выпуклости. К ним будут добавляться неравенства, связанные с достаточными условиями выпуклости на $[a,b]$, также содержащие параметры $\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}$.

Проблем не возникает, если все $\eta_i \leq 1$ или все $\eta_i > 1$. В первом случае решаются левые неравенства (36) и к ним добавляющиеся в прямом порядке возрастания индексов i и находятся $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$. Во втором случае процесс организуется в обратном порядке. В общем случае можно предложить в качестве вынужденной меры такой порядок нахождения пар $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$. Сначала в прямом порядке рассматриваются левые неравенства, у которых $\eta_i \leq 1$. Если $\eta_{j-1} \leq 1$, то получаемое $\bar{c}_j$ учитывается на j-м шаге, если только $\eta_j \leq 1$. Если $\eta_{j-1} > 1$, то полагается $\bar{c}_j = \frac{1}{4}$, что усиливает j-е неравенство. Неравенства, у которых $\eta_i > 1$, рассматриваются в обратном порядке, причем теперь при решении правых неравенств учитываются предыдущие $\bar{b}_{i+1}$. Можно провести вторую итерацию по данной процедуре.

2. Следующий шаг состоит в обеспечении достаточных условий выпуклости на $[a,b]$.

Для этого, как и в [1,2], будем предполагать, что базовые функции являются обобщенными сплайнами класса C^2 на сетке δ: $0 = t_0 \leq \ldots \leq t_k \leq \ldots \leq t_n = 1$, $n \geq 1$, $\varphi_i(t), \psi_i(t) \in C^3[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0,\ldots,n-1$. При этом

$$\varphi_i^{(r)}(t) \geq 0, \quad (-1)^r \psi_i^{(r)}(t) \geq 0, \; r = \overline{0,3}. \tag{37}$$

Из (23) получаем

$$S''_G(x) = \Phi''_i(t)M_i + \Psi''_i(t)M_{i+1}, \tag{38}$$

причем $\Phi''_i(1) = \Psi''_i(0) = 0$, $\Phi''_i(0) = \Psi''_i(1) = 1$.

В случае кубических сплайнов $S_3(x)$, порождаемых базовыми функциями $\varphi_i(t) = t^3$, $\psi_i(t) = (1-t)^3$, по формулам (24а) находим

$$\Phi_i(t) = -\frac{1}{6}t(1-t)(2-t), \quad \Psi_i(t) = -\frac{1}{6}t(1-t)(1+t).$$

Это известные формулы [3,с. 99]. Из (38) в этом случае следует

$$S''_3(x) = M_i + (M_{i+1} - M_i)t,$$

т.е. $S''_3(x)$ монотонно изменяется от M_i до M_{i+1}, обеспечивая выпуклость сплайна.

Согласно (24) $\Phi''_i(t) + \Psi''_i(t) = 1$ и из (38) получаем на $[x_i,x_{i+1}]$

$$S''_G(x) = M_i + (M_{i+1} - M_i)\Psi''_i(t), \tag{39}$$

где

$$\Psi''_i(t) = -\{U_i\varphi''_i(t) + V_i[\psi''_i(0) - \psi''_i(t)]\} / \Delta_i. \tag{40}$$

В общем случае функция $S''_G(x)$ будет монотонной, если $\Psi''_i(t)$ будет монотонно возрастающей. Так как согласно (37) $\varphi''_i(t)$ и $\psi''_i(0) - \psi''_i(t)$ являются монотонно возрастающими функциями, то и $\Psi''_i(t)$ обладает этим свойством, если $U_i \leq 0$, $V_i \leq 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы интерполяционный обобщенный сплайн был выпуклым вниз,* $S''_G(x) \geq 0$ *(вверх,* $S''_G(x) \leq 0$*) на* $[a,b]$*, достаточно, чтобы для индексов* $i \in \{0,\dots,N-1\}$ *выполнялись* (36) *и одна из групп условий:*

а) $\rho_i = \sigma_i = 0$; (27);

б) $\rho_i \neq 0$, $\sigma_i \neq 0$; (33),

$$\sigma_i[\bar{b}_i\ \varphi_i''(1) - 1] \leq 0, \tag{41а}$$

$$\rho_i[\bar{c}_{i+1}\psi_i''(0) - 1] \leq 0. \tag{41б}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай "а" очевиден. Равенства (27), обеспечивающие существование и единственность сплайна при $\rho_i = \sigma_i = 0$, не налагают ограничений на U_i, V_i. Последние выбираются произвольными неположительными числами, удовлетворяющими (22).

В случае "б" равенства (33) суть условия совместности равенств (22), (26). Поэтому U_i, V_i можно вычислять из (26):

$$U_i = \rho_i^{-1}[\bar{c}_{i+1}\psi_i''(0)-1], \quad V_i = \sigma_i^{-1}[\bar{b}_i\varphi_i''(1)-1] . \tag{42}$$

Согласно (41) они неположительны. Теорема доказана.

Для популярных на практике видов базовых функций условия теоремы не удается выполнить при малых $\bar{b}_i$ (больших η_i) и малых $\bar{c}_{i+1}$ (малых h_i). Остается строить выпуклое звено сплайна, когда $\Psi_i''(t)$ не является монотонной функцией.

Напомним, что, согласно (37), вторые производные базовых функций неотрицательны на $[0,1]$. Будем далее предполагать, что они выпуклы вниз. Тогда согласно (40), если U_i, V_i имеют разные знаки, то функция $\Psi_i''(t)$ выпуклая и может иметь не более одного экстремума. Возможны две ситуации:

$$U_i \leq 0,\ V_i \geq 0; \tag{43а}$$

$$U_i \geq 0,\ V_i \leq 0. \tag{43б}$$

В первой из них при некотором $t = t^*$ функция $\Psi_i''(t)$ может иметь минимум, меньший нуля. Очевидно, при таком t функция $\Phi_i''(t)$ имеет максимум, больший единицы. Во второй ситуации, наоборот, $\Psi_i''(t)$ может иметь максимум, больший единицы, а $\Phi_i''(t)$ – минимум, меньший нуля.

Тогда согласно (38) для того, чтобы $S_G''(x) \geq 0$, достаточно, чтобы для (43а), (43б) соответственно было

$$M_{i+1} \leq M_i, \tag{44а}$$

$$M_{i+1} \geq M_i . \qquad (44б)$$

Чтобы выполнялось $S''_G(x) \leq 0$, неравенства (44а) и (44б) должны поменяться местами.

Попытаемся заменить неравенства (44) другими, выражающимися через базовые функции.

В [5] система (9),(11) преобразована к виду:

$$A_o M_o - B_o M_2 = D_o,$$

$$-C_i M_{i-2} + A_i M_i - B_i M_{i+2} = D_i, \quad i = 1,,..,N-1,$$

$$-C_N M_{N-2} + A_N M_N = D_N,$$

где

$$C_i = c_i c_{i-1}/a_{i-1}, \quad A_i = a_i - c_i b_{i-1}/a_{i-1} - b_i c_{i+1}/a_{i+1},$$

$$B_i = b_i b_{i+1}/a_{i+1}, \quad D_i = d_i - c_i d_{i-1}/a_{i-1} - b_i d_{i+1}/a_{i+1},$$

$$a_{-1} = a_{N+1} = 1, \quad c_o = c_{N+1} = b_{-1} = b_N = d_{-1} = d_{N+1} = 0.$$

При $b_o \geq 0$, $c_N \geq 0$ все $C_i \geq 0$, $B_i \geq 0$, $A_i \geq 0$. Из преобразованной системы имеем оценки $M_i \geq D_i/A_i$, а из системы (9), (11) - оценки $M_i \leq d_i/a_i$. Объединяя их, получаем

$$\frac{D_i}{A_i} \leq M_i \leq \frac{d_i}{a_i}, \quad i = 0,\ldots,N.$$

Отсюда ясно, что для выполнения (44а) достаточно потребовать, чтобы $d_{i+1}A_i \leq a_{i+1}D_i$. Учитывая, что $a_i = 1/2 - b_i - c_i$, получаем

$$\eta_i \left[\frac{1}{2} - c_i \left(1 + \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} \right) - b_i \frac{c_{i+1}}{a_{i+1}} \right] \leq a_{i+1} \left(1 - \frac{c_i}{a_{i-1}\eta_{i-1}} \right). \qquad (45а)$$

Для выполнения (44б) требуем, чтобы $d_i A_{i+1} \leq a_i D_{i+1}$, что дает

$$\eta_i^{-1} \left[\frac{1}{2} - b_{i+1} \left(1 + \frac{c_{i+2}}{a_{i+2}} \right) - c_{i+1} \frac{b_i}{a_i} \right] \leq a_i \left(1 - \frac{b_{i+1}\eta_{i+1}}{a_{i+2}} \right). \qquad (45б)$$

В дополнение к (36) введем неравенства: если $\eta_i < 1$, то

$$\eta_i \le 2(\frac{1}{2} - \lambda_{i+1}\bar{b}_{i+1} - \mu_{i+1}\bar{c}_{i+1})(1 - 4\mu_i\bar{c}_i/\eta_{i-1}), \qquad (46а)$$

если $\eta_i > 1$, то

$$\eta_i^{-1} \le 2(\frac{1}{2} - \lambda_i\bar{b}_i - \mu_i\bar{c}_i)(1 - 4\lambda_{i+1}\bar{b}_{i+1}\,\eta_{i+1}). \qquad (46б)$$

На практике к этому варианту выпуклости звена сплайна придется прибегать при $\eta_i \ll 1$ и $\eta_i \gg 1$. Тем не менее, в ряде случаев (46) будут выполняться уже при значениях $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$, удовлетворяющих (36). Если это не так, то для выполнения (46) эти величины приходится уменьшать, что не нарушает неравенств (36).

Введем неравенства, противоположные (41),

$$\sigma_i[\bar{b}_i\varphi_i''(1) - 1] \ge 0, \qquad (47а)$$

$$\rho_i[\bar{c}_{i+1}\psi_i''(0) - 1] \ge 0. \qquad (47б)$$

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы интерполяционный обобщенный сплайн был выпуклым вниз,* $S_G''(x) \ge 0$, *достаточно, чтобы для индексов* i *выполнялись условия:* $\rho_i \ne 0$, $\sigma_i \ne 0$, (33), (36) *и одна из групп неравенств:*

а) $\eta_i < 1$, (41б), (46а), (47а);

б) $\eta_i > 1$, (41а), (46б), (47б).

Для сплайна, выпуклого вверх, $S_G''(x) \le 0$, *неравенства* (46а) *и* (46б) *меняются местами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема будет доказана для выпуклых вниз сплайнов, если при заданном η_i ее условия приводят к выполнению (43а), (45а) или (43б), (45б).

В случае "а", учитывая (25), видим, что выполнение (46а) влечет за собой выполнение (45а). Из (26), (41б), (47а) следует (43а).

Аналогично, в случае "б" из (46б) следует (45б), а из (26), (41а), (47б) вытекает (43б).

Аналогично доказывается теорема для сплайна, выпуклого вверх.

Очевидно, что вторая производная звена сплайна, построенного в соответствии с теоремой 2, на интервале (x_i, x_{i+1}) может сильно отличаться от M_i и M_{i+1}, и качество приближения второй производной интерполируемой функции под вопросом. Поэтому применять данную теорему следует, если только не могут быть выполнеными условия теоремы 1.

§4. Приложения теории

1. <u>Кубические сплайны</u> порождаются базовыми функциями

$$\varphi_i(t) = t^3, \quad \psi_i(t) = (1-t)^3. \tag{48}$$

Они не содержат свободных параметров, поэтому условия теорем 1 и 2 представляют для них ограничения на исходные данные и шаги сетки.

Из (48) имеем $\varphi_i'(1) = -\psi_i'(0) = 3, \varphi_i''(1) = \psi_i''(0) = 6, \Delta_i = 6$. Из (5) находим $\alpha_i = \beta_i = \frac{1}{6}$, $\rho_i = \sigma_i = 0$, а из (10) - $b_i = \lambda_i/6$, $c_i = \frac{\mu_i}{6}$, $a_i = \frac{1}{3}$. Условия (20) выполняются, а (16а) и (16в) дают ограничения $b_o < 2a_o$, $c_N < 2a_N$, что было показано еще в [8, с.64]. При принятой нормировке уравнений (11) из (20а) получаем $b_o < \frac{1}{3}$, $c_N < \frac{1}{3}$. Для сплайнов с граничными условиями типа I $b_o = c_N = \frac{1}{6}$, а для типа II $b_o = c_N = 0$, т.е. эти ограничения выполняются.

Теорема 1 о выпуклости сплайна имеет несколько следствий.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для того, чтобы интерполяционный кубический сплайн был выпуклым на* $[a,b]$ *достаточно, чтобы выпуклые исходные данные удовлетворяли неравенствам:*

$$\frac{1}{6a_o} \le \eta_o \le \frac{1}{3}(b_o)_+ \,, \tag{49а}$$

$$\frac{1}{2} \le \eta_i \le 2, \quad i = 1,\ldots,N-2, \tag{49б}$$

$$3(c_N)_+ \le \eta_{N-1} \le 6a_N \,. \tag{49в}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку здесь $\bar{b}_i = \bar{c}_i = \frac{1}{6}$, $i = 1,\ldots,N-1$, то, очевидно, условия "а" теоремы 1: $\rho_i = \sigma_i = 0$ и (27) выполнены. Неравенства (36) переходят в (49). Для граничных условий типа I все они имеют вид (49б), а для типа II, где $a_o = a_N = \frac{1}{2}$, граничные неравенства сводятся к $\frac{1}{3} \le \eta_o < \infty$, $0 \le \eta_{N-1} \le 3$.

Неравенства (49) получены в [7]. Там же для кубических сплайнов приведены непосредственно неравенства (18) без упрощающих предположений (35), (35а).

2. Обобщенные кубические сплайны. Их базовые функции таковы, что

а) при нулевых значениях свободных параметров они переходят в базовые функции кубических сплайнов (48);

б) в пространстве свободных параметров с индексом i существуют многообразия R_i, на которых, как в случае кубических сплайнов, одновременно $\rho_i = \sigma_i = 0$, что позволяет использовать теорему 1,а, в которой требуется выполнять достаточно простые равенства (27) и не требуется решать сложные равенства (33), как в теоремах 1,б и 2;

в) на R_i имеет место $A_i'''(t) = 0$, где $A_i(t)$ определяется (15). Согласно утверждению из §1 в этом случае (1), (14) суть два представления одного и того же сплайна.

Исследование начинается с системы неравенств (36). Если оказывается, что значения $\bar{b}_i = \bar{c}_{i+1} = \frac{1}{6}$ удовлетворяют (36), то соответствующее звено сплайна берется кубическим. Если одно из этих значений должно быть меньше $\frac{1}{6}$, то звено сплайна строится как обобщенное

При этом будем пытаться использовать теорему 1. Удается установить условия вида (49)

$$\frac{1}{\gamma} < \eta_i < \gamma \quad (\gamma > 2), \quad i = 0,\dots,N-1, \tag{50}$$

для которых это заведомо возможно. И только, когда теоремы 1 оказывается недостаточно, прибегнем к более универсальной теореме 2.

При применении теорем 1 и 2, как уже отмечалось, решение задачи выпуклой интерполяции неединственно. Среди множества решений можно выбирать наиболее близкое к кубическому сплайну в каком-либо смысле, например,

$$\min_{\{\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}\}} [(\bar{b}_i - \tfrac{1}{6})^2 + (\bar{c}_{i+1} - \tfrac{1}{6})^2], \tag{51}$$

где $\{\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}\}$ - множество точек, определяемое условиями теорем 1 или 2.

В двух последних параграфах рассматривается выпуклая интерполяция двумя видами обобщенных кубических сплайнов.

§5. Кубические сплайны с дополнительными узлами

Такие сплайны порождаются базовыми функциями

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(t) &= (1-m_i)t^3 + m_i \frac{(t-p_i)_+^3}{(1-p_i)^3}, \\ \psi_i(t) &= (1-n_i)(1-t)^3 + n_i \frac{(q_i-t)_+^3}{q_i^3}, \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

где p_i, q_i - координаты дополнительных узлов (не являющихся узлами интерполяции), которые вместе с параметрами m_i, n_i образуют совокупность свободных параметров сплайна, подчиняющихся естественным ограничениям $0 \le p_i < 1$, $0 < q_i \le 1$, $m_i \le 1$,

$n_i \leq 1$. Базовые функции кубических сплайнов получаются из (52), если $p_i m_i = 0$, $(1-q_i)n_i = 0$.

Нетрудно видеть, что для функций (52) выполняются условия (2а). Для проверки (2б), (2в) и (37) подсчитаем

$$\varphi_i'(1) = 3\left[1 + \frac{m_i p_i}{1-p_i}\right], \quad \psi_i'(0) = -3\left[1 + \frac{n_i(1-q_i)}{q_i}\right];$$

$$\varphi_i''(1) = 6\left[1 + \frac{m_i p_i(2-p_i)}{(1-p_i)^2}\right], \quad \psi_i''(0) = 6\left[1 + \frac{n_i(1-q_i^2)}{q_i^2}\right];$$

$$\varphi_i'''(t) = \begin{cases} 6(1-m_i), \text{ если } t \in [0,p_i), \\ 6\left[1 + \dfrac{m_i p_i(3-3p_i+p_i^2)}{(1-p_i)^3}\right], \text{если } t \in [p_i,1]; \end{cases}$$

$$\psi_i'''(t) = \begin{cases} -6\left[1 + \dfrac{n_i(1-q_i^3)}{q_i^3}\right], \text{ если } t \in [0,q_i), \\ -6(1-n_i), \text{ если } t \in [q_i,1]. \end{cases}$$

Для выполнения условий (2б),(2в) и (37) в общем случае положим, что для свободных параметров сплайна выполняются неравенства

$$m_i \geq -\frac{(1-p_i)^3}{p_i(3-3p_i+p_i^2)}, \qquad n_i \geq -\frac{q_i^3}{1-q_i^3}. \tag{53}$$

Нетрудно видеть, что при полученных значениях $\varphi_i'(1)$, $\psi_i'(0)$ и ограничениях (53) неравенства (2б) выполняются.

Для проверки условий (2в) и (37) заметим, что при выполнении (53) $\varphi_i''(1) > 0$, $\psi_i''(0) > 0$, $\varphi_i'''(t) \geq 0$, $\psi_i'''(t) \leq 0$. Так как $\varphi_i''(0) = \psi_i''(1) = 0$, то, следовательно, $\varphi_i''(t) \geq 0$, $\psi_i''(t) \geq$ ≥ 0 и $\varphi_i''(t)$ - монотонно возрастающая, а $\psi_i''(t)$ - монотонно убывающая функции. Продолжая рассуждения, приходим к выводам, что $\varphi_i'(t) \geq 0$, $\psi_i'(t) \leq 0$, $\varphi_i(t) \geq 0$, $\psi_i(t) \geq 0$, что и требовалось.

Вместо параметров m_i, n_i удобно использовать в этом качестве величины $\varphi_i''(1)$, $\psi_i''(0)$. Имеем формулы:

$$\left.\begin{aligned} m_i &= \frac{(1-p_i)^2}{p_i(2-p_i)}\left[\frac{\varphi_i''(1)}{6} - 1\right], \\ n_i &= \frac{q_i^2}{1-q_i^2}\left[\frac{\psi_i''(0)}{6} - 1\right]. \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Вместо (53) и $m_i \leq 1$, $n_i \leq 1$ с помощью (54) получаем

$$\frac{6}{R(1-p_i)} \leq \varphi_i''(1) \leq \frac{6}{(1-p_i)^2}, \quad (55а)$$

$$\frac{6}{R(q_i)} \leq \psi_i''(0) \leq \frac{6}{q_i^2}, \quad (55б)$$

где $R(z) = 1+z+z^2$.

В формулируемых ниже теоремах области изменения парамет - ров $\varphi_i''(1)$, $\psi_i''(0)$ будут такими, что $\varphi_i''(1) > 4$, $\psi_i''(0) > 4$, т.е. будет обеспечиваться выполнение условия $\Delta_i > 0$.

Далее

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i'(1) &= \frac{3}{2-p_i}\left[\frac{1-p_i}{6}\varphi_i''(1) + 1\right], \\ \psi_i'(0) &= -\frac{3}{1+q_i}\left[\frac{q_i}{6}\psi_i''(0) + 1\right]. \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

Обозначим

$$L(p_i, q_i) = \frac{1}{2}\varphi_i''(1)\psi_i''(0) - (2-q_i)\varphi_i''(1) - (1+p_i)\psi_i''(0). \quad (57)$$

Отметим тождества

$$\left.\begin{aligned} L(p_i,q_i) &= L(p_i,p_i)-(p_i-q_i)\varphi_i''(1), \\ L(p_i,q_i) &= L(q_i,q_i)-(p_i-q_i)\psi_i''(0). \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

По формулам (4),(5) находим

$$\rho_i = -L(p_i,p_i)/(2-p_i)\Delta_i, \qquad \sigma_i = -L(q_i,q_i)/(1+q_i)\Delta_i. \tag{59}$$

Пусть $\rho_i = \sigma_i = 0$. Тогда выполняется (27). Согласно (59), $L(p_i,p_i) = L(q_i,q_i) = 0$. Подставляя сюда $\varphi_i''(1),\psi_i''(0)$ из (27), получаем $K(p_i) = K(q_i) = 0$, где обозначено

$$K(z) = \frac{1}{2} - (2-z)\bar{c}_{i+1} - (1+z)\bar{b}_i. \tag{60}$$

Очевидно, $K(q_i) - K(p_i) = (p_i-q_i)(\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1}) = 0$. Это равенство может выполняться в двух случаях:

1) $\bar{b}_i = \bar{c}_{i+1}$. Тогда в силу (27) $\varphi_i''(1) = \psi_i''(0)$, $L(p_i,p_i) = \frac{1}{2}\varphi_i''(1)[\varphi_i''(1)-6] = 0$. Но тогда $m_i p_i = n_i(1-q_i) = 0$, что соответствует кубическому сплайну;

2) $p_i = q_i$. Доказывается аналог теоремы 1,а.

ТЕОРЕМА 3. *Для того, чтобы интерполяционный кубический сплайн с одним дополнительным узлом* $(p_i = q_i)$ *на* $[x_i,x_{i+1}]$, $i \in \{0,\dots,N-1\}$, *был выпуклым на* $[a,b]$, *достаточно, чтобы выполнялись условия* (27),

$$p_i = g(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}) = \frac{\frac{1}{2} - \bar{b}_i - 2\bar{c}_{i+1}}{\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1}} \tag{61}$$

и одна из двух групп условий в плоскостях $(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1})$:

a) $\eta_i < 1$, A_1: $P(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}) \equiv \left(\frac{1}{2} - \bar{b}_i + \bar{c}_{i+1}\right)^2 - \frac{3}{2}\bar{c}_{i+1} = 0$, (62a)

$$B_1:\quad \lambda_i\eta_i\bar{b}_i + c_{i+1} \le \eta_i\left(\frac{1}{2} - \mu_i\bar{c}_i\right), \tag{63a}$$

б) $\eta_i > 1$, A_2: $Q(\bar b_i, \bar c_{i+1}) \equiv (\frac{1}{2} + \bar b_i - \bar c_{i+1})^2 - \frac{3}{2}\bar b_i = 0$, (62б)

$$B_2: \quad \eta_i \bar b_i + \mu_{i+1}\bar c_{i+1} \le \frac{1}{2} - \lambda_{i+1}\bar b_{i+1}, \qquad (63б)$$

$$i \in \{0,\dots,N-1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства состоит в проверке условия "а" теоремы 1 и (55). Равенства (61) равносильны $K(p_i) = 0$. Последние и (27) дают $L(p_i, p_i) = 0$, т.е. $\rho_i = \sigma_i = 0$. Неравенства (63) - это неравенства (36) и, следовательно, условия "в" теоремы 1 выполнены.

Проверим неравенства (55).

а) Пусть $\eta_i < 1$. Неравенства (55) могут нарушаться, если только $\bar c_{i+1} < \frac{1}{6}$ или $\bar b_i < \frac{1}{6}$. В данном случае возможно только $\bar c_{i+1} < \frac{1}{6}$ и согласно (62а) $\bar b_i > \frac{1}{6}$. Очевидно, что правое неравенство в (55а) и левое в (55б) выполняются, а оставшиеся дают ограничения $6\bar b_i - R(1-p_i) \le 0$, $p_i^2 - 6\bar c_{i+1} \le 0$. Из (61) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &1-p_i = -\frac{\frac{1}{2} - 2\bar b_i - \bar c_{i+1}}{\bar b_i - \bar c_{i+1}}, \\ &2 - p_i = \frac{6\bar b_i - 1}{2(\bar b_i - \bar c_{i+1})}, \quad 1 + p_i = \frac{1 - 6\bar c_{i+1}}{2(\bar b_i - \bar c_{j+1})}. \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Используя эти формулы, находим

$$6\bar b_i - R(1-p_i) = \frac{6\bar b_i - 1}{(\bar b_i - \bar c_{i+1})^2} P(\bar b_i, \bar c_{i+1}) \qquad (65)$$

$$p_i^2 - 6\bar{c}_{i+1} = \frac{1 - 6\bar{c}_{i+1}}{(\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1})^2} P(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}).$$

Отмеченные ограничения выполняются с равенствами в силу (62а).

Должны выполняться неравенства $0 < p_i < 1$. Из них левое равносильно неравенству

$$\frac{1}{2} - \bar{b}_i - 2\bar{c}_{i+1} > 0, \qquad (66а)$$

а правое равносильно

$$\frac{1}{2} - 2\bar{b}_i - c_{i+1} < 0. \qquad (66б)$$

Оба неравенства (66) выполняются вследствие (62а).

б) Пусть $\eta_i > 1$. Здесь (55) следует проверять для $\bar{c}_{i+1} > \frac{1}{6}$, $\bar{b}_i < \frac{1}{6}$. Левое неравенство в (55а) и правое в (55б) выполняются с очевидностью, а остальные дают ограничения $(1 - p_i)^2 - 6\bar{b}_i \le 0$, $6\bar{c}_{i+1} - R(p_i) \le 0$. С помощью (64) находим

$$\left.\begin{aligned} (1 - p_i)^2 - 6\bar{b}_i &= \frac{1 - 6\bar{b}_i}{(\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1})^2} Q(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}), \\ 6\bar{c}_{i+1} - R(p_i) &= \frac{6\bar{c}_{i+1} - 1}{(\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1})^2} Q(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}). \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Указанные ограничения выполняются с равенствами в силу (62б). Неравенства $0 < p_i < 1$ выполняются, если выполняются неравенства $(\overline{66})$, противоположные (66). Они справедливы вследствие (62б). Теорема доказана.

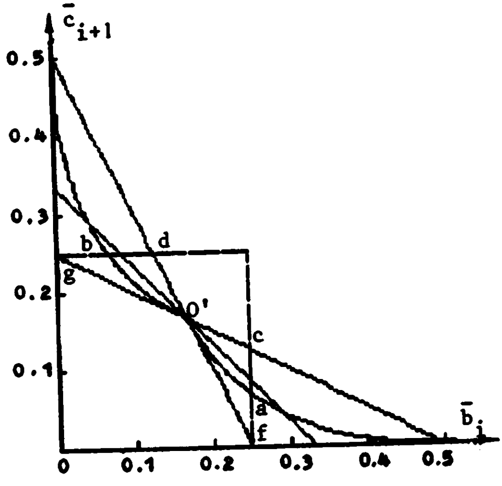

Рис.1

Для завершения анализа осталось показать, что пересечения множеств A_j и B_j, о которых идет речь в теореме, не пусты. В случае "а" множество A_1 есть парабола с вершиной C (7/32, 3/32) и главной осью, составляющей с осью $\bar b_i$ угол $\pi/4$ (рис.1). Парабола касается оси $\bar b_i$ в точке $\bar b_i = \frac{1}{2}$ и прямой $\bar b_i = \frac{1}{8}$ при $\bar c_{i+1} = \frac{3}{8}$. Она проходит через точку $0'(1/6,1/6)$. Условия $\frac{1}{6} < \bar b_i < \frac{1}{4}$ выделяют на параболе открытую дугу $0'a$. Точка $a\left(\frac{1}{4}, \frac{(2-\sqrt{3}}{4}\right)$ является точкой $\inf \bar c_{i+1}$. Ей отвечает значение $\sup p_i = (3-\sqrt{3})/2$.

В случае "б" картина симметрична относительно прямой $\bar b_i = \bar c_{i+1}$. Точке b, соответствующей $\inf \bar b_i$, отвечает значение $\inf p_i = (\sqrt{3}-1)/2$.

Неравенства (63) определяют треугольники в плоскостях $(\bar b_i, \bar c_{i+1})$. Точка пересечения гипотенузы треугольника (63а) с осью $\bar b_i$ лежит правее $\bar b_i = \frac{1}{2}$, а гипотенузы треугольника (63б) с осью $\bar c_{i+1}$ лежит выше $\bar c_{i+1} = \frac{1}{2}$.

В обоих случаях возможны варианты: 1) дуги $0'a$ и $0'b$ целиком попадают в соответствующие треугольники и звено сплайна можно взять кубическим, чему отвечает точка $0'$; 2) гипотенуза треугольника отсекает от дуги меньшую дугу, и это главный вариант теоремы; 3) при малых и больших η_i у треугольников и дуг общих точек нет и данная теорема не применима.

При решении неравенств (63) следуем рекомендациям, сделанным в §3. Без решения можно указать пределы, когда теорема заведомо применима. Если в (63) брать $\bar{c}_i$, $\bar{b}_{i+1}$ равными или супремальным значениям, равным $\frac{1}{4}$, то для точки a из (63а) получаем $2-\sqrt{3} \le \eta_i$, а для точки b из (63б) – $\eta_i \le 2+\sqrt{3}$. Объединяя неравенства, имеем (50) при $\gamma = 2+\sqrt{3}$ (ср. с (49)).

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 сформулирована и доказана для общего случая граничных условий, при которых (26) имеют место для всех индексов i, а $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ подчиняются ограничениям (25). В частности, при граничных условиях типа I согласно (25а) в плоскостях $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$ к допустимым дугам принадлежат при $i = 0$ точка a, а при $i = N-1$ – точка b. Для условий типа II, во-первых, согласно (25б) к допустимым дугам для этих индексов будут принадлежать продолжения дуг O'a и O'b до их пересечений с осями $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_{i+1}$ и, во-вторых, в (63) мы не вводили "фиктивных" переменных $\bar{b}_0^*$, $\bar{c}_N^*$. Поэтому вместо треугольников для этих индексов будут в случае "а" горизонтальная полоса, а в случае "б" – вертикальная. Это замечание следует иметь ввиду также при применении теорем 4,5 из данного параграфа и следствий 2-4 (см. § 6).

В §4 мы отмечали, что будем рассматривать обобщенные сплайны, для которых при $\rho_i = \sigma_i = 0$ имеет место также $A_i'''(t) = 0$, где $A_i(t)$ определено формулой (15). Покажем, что это так в данном случае. Тогда формулы (1) и (14) представляют один и тот же сплайн.

В выражения $\varphi_i'''(t)$, $\psi_i'''(t)$ подставляем m_i, n_i из (54). Получаем

$$\varphi_i'''(t) = \frac{6 - (1-p_i)^2\varphi_i''(1)}{p_i(2-p_i)};$$

$$\psi_i'''(t) = \frac{6 - R(p_i)\psi''(0)}{p_i(1+p_i)}, \text{ если } t \in [0,p],$$

$$\varphi_i''(t) = \frac{R(1-p_i)\varphi_i''(1) - 6}{(1-p_i)(2-p_i)},$$

$$\psi_i''(t) = \frac{p_i^2\psi_i''(0) - 6}{(1-p_i)^2}, \text{ если } \quad t \in [p_i, 1].$$

Подставляя каждую из этих пар значений в выражение $A_i''(t)$, находим, что $A_i''(t) = 0$ вследствие $L(p_i, p_i) = 0$.

В таком случае можно воспользоваться частным видом представления функций $\Phi_i(t)$, $\Psi_i(t)$ (24а). Отсюда

$$\Phi_i''(t) = \psi_i''(t)/\psi_i''(0), \quad \Psi_i''(t) = \varphi_i''(t)/\varphi_i''(1). \tag{68}$$

Функции $\varphi_i''(t)$, $\psi_i''(t)$ – кусочно-линейные. Поэтому для описания функций (68) достаточно вычислить $\varphi_i''(t)$, $\psi_i''(t)$ в точке $t = p_i$. Легко видеть, что $\varphi_i''(p_i) = 6(1 - m_i)p_i$, $\psi_i''(p_i) = 6(1 - n_i)(1-p_i)$. Подставляя сюда выражения m_i, n_i из (54), находим

$$\varphi_i''(p_i) = \frac{6 - (1-p_i)^2\varphi_i''(1)}{2-p_i}, \quad \psi_i''(p_i) = \frac{6 - p_i^2\psi_i''(0)}{1 + p_i}. \tag{69}$$

Из доказательства теоремы 3 нетрудно видеть, что в случае "а" $\varphi_i''(1) = 1/\bar{b}_i = 6/R(1-p_i)$, $\psi_i''(0) = 1/\bar{c}_{i+1} = 6/p_i^2$, а в случае "б" $\varphi_i''(1) = 6/(1-p_i)^2$, $\psi_i''(0) = 6/R(p_i)$. Но тогда из (69) имеем а) $\varphi_i''(p_i) = \varphi_i''(1)$, $\psi_i''(p_i) = 0$, б) $\varphi_i''(p_i) = 0$, $\psi_i''(p_i) = \psi_i''(0)$.

Из (68) следует, что в случае "а" $\Phi_i''(p_i) = 0$, $\Psi_i''(p_i) = 1$, а в случае "б" $\Phi_i''(p_i) = 1$, $\Psi_i''(p_i) = 0$. Поставив в соответствие эти значения значениям функций при $t = 0,1$, можем записать

$$\text{а)} \quad \Phi_i''(t) = \frac{(p_i - t)_+}{p_i}, \quad \Psi_i''(t) = 1 - \Phi_i''(t), \tag{70а}$$

б) $\Phi_i''(t) = 1 - \dfrac{(t - p_i)_+}{1 - p_i}$, $\Psi_i''(t) = 1 - \Phi_i''(t)$ (70б)

Вторая производная сплайна вычисляется по формулам (38) или (39).

Рассмотрим далее ситуацию, когда величины ρ_i, σ_i, а значит, $L(p_i,p_i)$, $L(q_i,q_i)$ отличны от нуля. По формулам (28), (56), (57) находим

$$F[\varphi_i] = \frac{1}{2-p_i}\left[\frac{1}{2}\varphi_i''(1)-1-p_i\right], \quad G[\psi_i] = \frac{1}{1+q_i}\left[\frac{1}{2}\psi_i''(0) - 2 + q_i\right],$$

$$F[\varphi_i]G[\psi_i] - 1 = [L(p_i,q_i) + 6(p_i-q_i)]/2(2-p_i)(1+q_i).$$

Подставляя последнее выражение и (59) в (33), получаем

$$\frac{1}{2}L(p_i,q_i) - L(p_i,p_i)(1 + q_i)\bar{b}_i -$$

$$- L(q_i,q_i)(2-p_i)\bar{c}_{i+1} + 3(p_i-q_i) = 0. \qquad (71)$$

Исключая отсюда с помощью (58) сначала $L(p_i,q_i)$ и $L(q_i, q_i)$, а затем $L(p_i,q_i)$ и $L(p_i,p_i)$ и учитывая (60), получаем эквивалентные равенства

$$K(q_i)L(p_i,p_i) + (p_i - q_i)\left[\frac{1}{2}\varphi_i''(1)-3\right][\bar{c}_{i+1}\psi_i''(0) - 1] = 0, \qquad (71')$$

$$K(p_i)L(q_i,q_i) + (p_i- q_i)[\bar{b}_i\varphi_i''(1) - 1]\left[\frac{1}{2}\psi_i''(0) - 3\right] = 0. \qquad (71'')$$

Теперь можно сформулировать аналог теоремы 1,б (и здесь ограничимся случаем одного дополнительного узла).

ТЕОРЕМА 4. *Для того, чтобы интерполяционный кубический сплайн с одним дополнительным узлом* $(p_i = q_i)$ *на* $[x_i,x_{i+1}]$ *был выпуклым на* $[a,b]$, *достаточно, чтобы для* $i \in \{0,\ldots,N-1\}$ *выполнялись условия* $p_i = g(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1})$ (61),

$$\frac{1}{\bar{b}_i} < \varphi_i''(1) \le \frac{6}{(1-p_i)^2}, \qquad (72а)$$

$$\frac{1}{\bar{c}_{i+1}} < \psi_i''(0) \le \frac{6}{p_i^2}, \qquad (72б)$$

и одна из групп условий в плоскостях $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$:

а) $\eta_i < 1$, (63а), (66а),

$$A_3:\ P(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) < 0; \tag{73а}$$

б) $\eta_i > 1$, (63б), $(\overline{66б})$,

$$A_4:\ Q(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) < 0. \tag{73б}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (61) следует, что $K(p_i) = 0$ и, значит (71) выполняются. В силу левых неравенств (72) $L(p_i, p_i) > K(p_i)/\bar{b}_i\bar{c}_{i+1} = 0$ и согласно (59) выполняются (41). Условия "б" теоремы 1 выполнены.

Проверяем условия (55). Это осуществляется так же, как в доказательстве теоремы 3.

а) $\eta_i < 1$, $\bar{c}_{i+1} < \frac{1}{6}$, $\bar{b}_i > \frac{1}{6}$. Множество значений $\varphi_i''(1)$, $\psi_i''(0)$ (72) не пусты. Относительно (72а) это очевидно, а (72б) имеют смысл вследствие (65) и (73а). В силу (72) правые неравенства в (55) выполняются. Выполнение левого неравенства в (55б) очевидно, а в (55а) оно следует из (73а).

б) $\eta_i > 1$, $\bar{c}_{i+1} > \frac{1}{6}$, $\bar{b}_i < \frac{1}{6}$. Доказывается аналогично.

Теорема доказана.

В плоскости $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$ имеем следующие области: в случае "а" - это открытая область $aO'c$, а в случае "б" - открытая область $bO'd$ (см.рис.1). Условия (63) отсекают от них подобласти.

Теоремой 4 в сравнении с теоремой 3 мы расширили возможности выбора параметров $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$, $\varphi_i''(1)$, $\psi_i''(0)$. Но мы не расширили диапазон величины η_i. Этого можно достичь, только используя точки в плоскостях $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$ из внешностей парабол.

В этом случае не удается использовать теорему 1,б при $p_i = q_i$. Действительно, из доказательства теоремы 4 следует, что, например, в случае "а" допустимы только точки $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1}) \in A_5$, где

$$A_5:\quad P(\bar b_i,\bar c_{i+1}) > 0. \tag{74а}$$

На A_5 $\frac{1}{\bar b_i} < \frac{6}{R(1-p_i)}$, $\frac{6}{p_i^2} < \frac{1}{\bar c_{i+1}}$. Тогда согласно (55),

должно быть $\frac{1}{\bar b_i} < \varphi_i''(1)$, $\psi_i''(0) < \frac{1}{\bar c_{i+1}}$. Отсюда для выполнения (41а) должно быть $L(p_i,p_i) > 0$, а для выполнения (41б) - $L(p_i,p_i) < 0$, что невозможно. Аналогично, в случае "б" должно быть $(\bar b_i,\bar c_{i+1}) \in A_6$, где

$$A_6:\quad Q(\bar b_i,\bar c_{i+1}) > 0, \tag{74б}$$

и снова $L(p_i,p_i) < 0$, $L(p_i,p_i) > 0$, что невозможно.

Те же трудности возникают и при использовании схемы с двумя дополнительными узлами. Не привела к успеху и попытка использования теоремы 2.

Осталась последняя возможность - это использовать непосредственно вид функций $\Psi_i''(t)$ в (39), учитывая, что это кусочно-линейные функции. При этом мы отказываемся от выполнения условий (37) или (55), которые были существенны в формулировках теорем 1,2, но,разумеется,сохраняем условия (2),(4).

Так как $\Psi_i''(0) = 0$, $\Psi_i''(1) = 1$, то согласно (39) $S_G''(x)$ будет знакопостоянной, если $\Psi_i''(p_i) = \xi_i$, $\Psi_i''(q_i) = \chi_i$, где ξ_i, $\chi_i \in [0,1]$ при любых знакопостоянных M_i, M_{i+1}. Если $\chi_i \notin [0,1]$ или $\xi_i \notin [0,1]$, то требуется выполнение одного из неравенств (46).

ТЕОРЕМА 5. *Для того, чтобы кубический сплайн с двумя дополнительными узлами на* $[x_i,x_{i+1}]$ *был выпуклым на* $[a,b]$, *достаточно, чтобы для* $i \in \{0,\ldots,N-1\}$ *выполнялись условия* (71), $p_i > q_i$,

$$(1-q_i)(q_i\xi_i - p_i\chi_i) = 2K(p_i), \tag{75а}$$

$$p_i[(1-q_i)\xi_i - (1-p_i)\chi_i] = 2K(q_i) + p_i(p_i-q_i) \qquad (75б)$$

и одно из условий в плоскостях $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$:

а) $\eta_i < 1$, $\bar{c}_{i+1} < \frac{1}{6}$, $\bar{b}_i > \bar{c}_{i+1}$, (63а), (74а);

б) $\eta_i > 1$, $\bar{b}_i < \frac{1}{6}$, $\bar{c}_{i+1} > \bar{b}_i$, (63б), (74б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к демонстрации того, что условия теоремы обеспечивают выполнение $\Psi''_i(p_i) = \xi_i$, $\Psi''_i(q_i) = \chi_i$. Присоединяем к ним также $\Psi''_i(1) = 1$, иначе (22), и согласно (40) получаем

$$\bar{U}_i\varphi''_i(p_i) + \bar{V}_i[\psi''_i(0) - \psi''_i(p_i)] = -\xi_i, \qquad (76а)$$

$$\bar{U}_i\psi''_i(q_i) + \bar{V}_i[\psi''_i(0) - \psi''_i(q_i)] = -\chi_i, \qquad (76б)$$

$$\bar{U}_i\varphi''_i(1) + \bar{V}_i\psi''_i(0) = -1, \qquad (76в)$$

где $\bar{U}_i = U_i/\Delta_i$, $\bar{V}_i = V_i/\Delta_i$.

Подставляем в эти выражения $\bar{U}_i, \bar{V}_i$, $\varphi''_i(\bar{t})$, $\psi''_i(\bar{t})$, где $\bar{t} = p_i, q_i$. Из (26) и (59) получаем

$$\bar{U}_i = -(2-p_i)\frac{\bar{c}_{i+1}\psi''_i(0) - 1}{L(p_i,p_i)}, \quad \bar{V}_i = -(1+q_i)\frac{\bar{b}_i\varphi''_i(1) - 1}{L(q_i,q_i)} .$$

Подставляя сюда $L(p_i,p_i)$, $L(q_i,q_i)$ из (71), находим

$$\bar{U}_i = \frac{2(2-p_i)K(q_i)}{(p_i-q_i)[\varphi''_i(1) - 6]}, \qquad (77а)$$

$$\bar{V}_i = \frac{2(1+q_i)K(p_i)}{(p_i - q_i)[\psi''_i(0) - 6]} . \qquad (77б)$$

Из (52), (54) находим при $p_i > q_i$

$$\varphi_i''(\bar t) = \frac{6-(1-p_i)^2\varphi_i''(1)}{2-p_i}\cdot\frac{\bar t}{p_i}, \quad \psi_i''(\bar t) = \frac{6-q_i^2\psi_i''(0)}{1+q_i}\cdot\frac{1-\bar t}{1-q_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_i''(q_i) = \varphi_i''(p_i)\frac{q_i}{p_i}, \quad p_i\varphi_i''(1) - \varphi_i''(p_i) = \frac{\varphi_i''(1)-6}{2-p_i}, \tag{78а}$$

$$\psi_i''(p_i) = \psi_i''(q_i)\,\frac{1-p_i}{1-q_i}, \quad (1-q_i)\psi_i''(0) - \psi_i''(q_i) = \frac{\psi_i''(0)-6}{1+q_i}. \tag{78б}$$

Из (76а), (76б), (78) получаем

$$\bar U_i\varphi_i''(p_i)(1-q_i) + \bar V_i[\psi_i''(0)(1-q_i) - \varphi_i''(q_i)(1-p_i)] = -(1-q_i)\xi_i,$$

$$\bar U_i\varphi_i''(p_i)q_i + \bar V_i p_i[\psi_i''(0) - \psi_i''(q_i)] = -p_i\chi_i.$$

Из этой пары равенств исключаем сначала $\bar U_i\varphi_i''(p_i)$, а затем $\bar V_i\psi_i''(q_i)$. Получаем

$$(p_i-q_i)\bar V_i[(1-q_i)\psi_i''(0) - \psi_i''(q_i)] = (1-q_i)(q_i\xi_i - p_i\chi_i),$$

$$-(p_i-q_i)[\bar U_i\varphi_i''(p_i) + \bar V_i\, p_i\psi_i''(0)] = p_i[(1-q_i)\xi_i - (1-p_i)\chi_i].$$

Первое равенство выполняется вследствие (75а),(77б),(78б). Ко второму сначала применяем (76в), а затем его выполнение обеспечивают (75б), (77а), (78а).

Равенство (71) при заданных $\bar b_i, \bar c_{i+1}, p_i, q_i$ в плоскости $(\varphi_i''(1), \psi_i''(0))$ при $\varphi_i''(1) > 0$, $\psi_i''(0) > 0$ определяет гиперболу, проходящую через точку (6,6), с асимптотами $\varphi_i''(1) = 2(1+p_i)$, $\psi_i''(0) = 2(2-q_i)$. Условиям "а" теоремы отвечает ее ветвь при $\varphi_i''(1) < 6$, $\psi_i''(0) > 6$, а условиям "б" - ветвь при $\varphi_i''(1) > 6$, $\psi_i''(0) < 6$. Задавая в первом случае $\varphi_i''(1) > 4$, а во втором -

$\psi_i''(0) > 4$, согласно (56), обеспечиваем выполнение (2) и (4). Теорема доказана.

Множества параметров p_i, q_i, ξ_i, χ_i принадлежат четырех - мерному единичному кубу, открытому по переменным p_i, q_i и замкнутому по переменным ξ_i, χ_i. Покажем, что пересечение множеств, определяемых равенствами (75), с кубом не пусто.

Из (75) исключаем сначала χ_i, а затем ξ_i. Получаем

$$(p_i-q_i)(1-q_i)\xi_i = 2(1-q_i)K(q_i) - 2(1-p_i)K(p_i)+(p_i-q_i)p_i(1-q_i),$$

$$(p_i-q_i)p_i\chi_i = 2q_iK(q_i) - 2p_iK(p_i) + (p_i-q_i)p_iq_i.$$

Упрощаем эти равенства, учитывая (60):

$$(1-q_i)(\xi_i-p_i) = 1 - 2(p_i+q_i)\bar{b}_i - 2(3-p_i-q_i)\bar{c}_{i+1},$$

$$-p_i(\chi_i-q_i) = 1 - 2(1+p_i+q_i)\bar{b}_i - 2(2-p_i-q_i)\bar{c}_{i+1}.$$

Преобразуем равенства к виду:

$$(\tilde{p}_i-\xi_i)(\tilde{q}_i-1) = 4Q(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}) - 2(\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})\xi_i, \tag{79а}$$

$$\tilde{p}_i(\tilde{q}_i-\chi_i) = 4Q(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}) - 2(\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})\chi_i, \tag{79б}$$

где введены обозначения: $\tilde{p}_i = p_i+2(\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})$, $\tilde{q}_i = q_i+2(\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})$. Из сравнения левых и правых частей равенств также следует, что $\chi_i + \xi_i > 0$.

Исключаем из (79) один из параметров p_i, q_i, например p_i, Получаем квадратное уравнение

$$\xi_i\tilde{q}_i^2 - 2B_i\tilde{q}_i + C_i = 0, \tag{80}$$

где

$$B_i = \frac{1}{2}\xi_i(1+\chi_i) + (\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})(\xi_i-\chi_i),$$

$$C_i = [1+2(\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})]\xi_i\chi_i + 4Q(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1})(1-\chi_i) - 2(\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})\chi_i.$$

Чтобы оно имело вещественные корни, необходимо, чтобы $B_i^2 - \xi_iC_i \geq 0$. Это дает неравенство:

$$D_i \equiv [\frac{1}{2}\xi_i(1-\chi_i) + (\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})(\xi_i-\chi_i)]^2 -$$

$$- 4\xi_i(1-\chi_i)[Q(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}) - \frac{1}{2}(\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1})\chi_i] \geq 0.$$

Левая часть неравенства есть выпуклая вниз функция переменных ξ_i, χ_i. Ее локальные максимумы в вершинах квадрата. Из них нам интересен отвечающей точке $\xi_i = 1$, $\chi_i = 0$, где

$$D_i \equiv (\frac{1}{2} + \bar{b}_i - \bar{c}_{i+1})^2 - 4Q(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}) \geq 0.$$

Учитывая вид $Q(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1})$, приходим к условию

$$-\frac{1}{4} + \bar{b}_i + \bar{c}_{i+1} - (\bar{b}_i - \bar{c}_{i+1})^2 \geq 0.$$

При фиксированном $\bar{c}_{i+1}$ левая часть монотонно возрастает по $\bar{b}_i$ и ее супремальное значение достигается при $\bar{b}_i = \frac{1}{4}$ и равно $\bar{c}_{i+1} - (\frac{1}{4} - \bar{c}_{i+1})^2$. Чтобы это было больше нуля, необходимо, чтобы $\bar{c}_{i+1} > (3-2\sqrt{2})/4$. Аналогично при $\bar{b}_i < \bar{c}_{i+1}$ имеем ограничение $\bar{b}_i > (3-2\sqrt{2})/4$. Как и выше, мы можем получить оценки (50) при $\gamma = 3+2\sqrt{2}$. Значения $\tilde{p}_i, \tilde{q}_i$ вычисляются из (79), а затем находятся p_i, q_i. Неравенства $0 < q_i < p_i < 1$ выполняются.

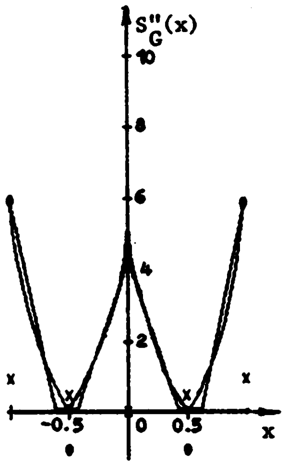

Рис. 2

До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда $0 \leq \Psi''_i(t) \leq 1$ и в (39) соотношение между M_i, M_{i+1} было не существенно. Теперь же допускаем, что при $\eta_i < 1$ возможно $\Psi''_i(q_i) = \chi_i < 0$. Тогда должно быть $M_{i+1} < M_i$. При $\eta_i > 1$ допускаем $\Psi''_i(p_i) = \xi_i > 1$ и должно быть $M_{i+1} > M_i$ Такие неравенства обеспечиваются условиями (46). Тогда в случае "а" $\eta_i < 1$ и выполняется

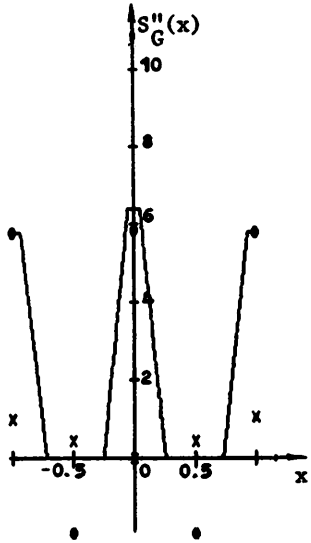

Рис.3

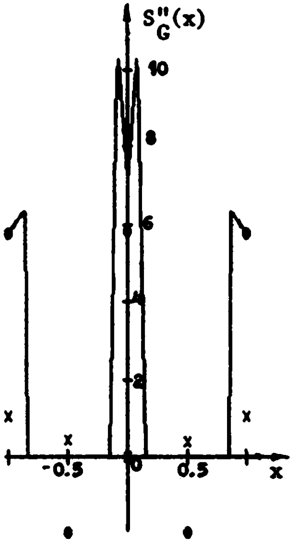

Рис. 4

(46а). В (80), как и выше, полагаем $\xi_i = 1$, а для χ_i получаем неравенство:

$$(1-\chi_i)\left(\frac{1}{2}-\bar{b}_i+\bar{c}_{i+1}\right)^2 \geq$$

$$\geq 4P(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}).$$

В случае "б" $\eta_i > 1$ и выполняется (46б). В (80) сохраняем значение $\chi_i = 0$, а для ξ_i получаем неравенство:

$$\xi_i\left(\frac{1}{2}+\bar{b}_i-\bar{c}_{i+1}\right)^2 \geq$$

$$\geq 4Q(\bar{b}_i,\bar{c}_{i+1}).$$

Здесь никаких ограничений на значения η_i нет.

Приведем три примера выпуклой интерполяции кубическими сплайнами с дополнительными узлами на $[x_i,x_{i+1}]$, построенных на сетке Δ: -1, -0.5, 0, 0.5, 1 с симметричными относительно $x = 0$ исходными данными и граничными условиями типа II.

В первом примере исходные данные суть $f_0 = f_4 = 1$, $f_1 = f_3 = 0{,}35$, $f_2 = 0$, $f''_0 = f''_4 = 5.8$. Здесь достаточно применять схему с одним дополнительным узлом, как описано в теореме 3. Сплайн строился ближайшим к кубическому в смысле задачи (51). Это значит, что точки $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ выбирались на пересечении прямых, даваемых равенствами в (63), и парабол (62). На рис.2 приведены график второй производной сплайна с дополнительным узлом $S''_G(x)$ (ломаная) и значения $S''_3(x_i)$ чисто кубического сплайна (точки). Для последнего в окрестности точек $x = \pm 0.5$ условия выпуклости не выполняются.

Во втором примере исходные данные исправлены в точках $x = \pm 0,5$, где положено $f_1 = f_3 = 0,415$. Здесь приходится применять схему с двумя дополнительными узлами, как описано в теореме 5. Значения $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ выбирались на пересечениях прямых в (63) с прямыми $\bar{b}_i = 0,25 - \varepsilon$, $\bar{c}_{i+1} = 0,25 - \varepsilon$, $\varepsilon = 0,001$. Полагалось $\chi_i = 0$, $\xi_i = 1$. График $S''_G(x)$ и значения $S''_3(x_i)$ приведены на рис.3.

В третьем примере $f_1 = f_3 = 0,44$. Снова применялась теорема 5, причем значения $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ выбирались, как в примере 2 и проверялись неравенства (46). Но теперь χ_0, χ_2 меньше нуля, $\xi_0 = \xi_2 = 1$, $\chi_1 = \chi_3 = 0$, ξ_1, ξ_3 больше единицы. График $S''_G(x)$ и значения $S''_3(x_i)$ показаны на рис.4.

§6. Рациональные сплайны

В качестве базовых функций возьмем рациональные функции

$$\varphi_i(t) = \frac{t^3}{1 + p_i(1-t)}, \quad \psi_i(t) = \frac{(1-t)^3}{1 + q_i t}, \tag{81}$$

где $-1 < p_i$, $-1 < q_i$ – свободные параметры.

Для проверки условий (2), (4), (37) удобно воспользоваться другой формой базовых функций [1]:

$$\varphi_i(t) = \frac{(1+p_i)^3}{p_i^3[1+p_i(1-t)]} - \frac{(1-t)^2}{p_i} + \frac{(1+3p_i)(1-t)}{p_i^2} - \frac{1+3p_i+p_i^2}{p_i^3},$$

$$\psi_i(t) = \frac{(1+q_i)^3}{q_i^3(1+q_i t)} - \frac{t^2}{q_i} + \frac{(1+3q_i)t}{q_i^2} - \frac{1+3q_i+q_i^2}{q_i^3},$$

откуда легко вычисляются

$$\varphi_i'(1) = 2 + \tilde{p}_i, \quad \psi_i'(0) = -(2+\tilde{q}_i),$$

$$\varphi_i''(1) = 2(1 + \tilde{p}_i + \tilde{p}_i^2), \quad \psi_i''(0) = 2(1 + \tilde{q}_i + \tilde{q}_i^2),$$

$$\Delta_i = 2[\tilde{p}_i\tilde{q}_i(1 + \tilde{p}_i)(1 + \tilde{q}_i) - 1],$$

где $\tilde{p}_i = 1 + p_i$, $\tilde{q}_i = 1 + q_i$, $\tilde{p}_i > 0$, $\tilde{q}_i > 0$.

Нетрудно видеть, что условия (2) для функций (81) выполняются. Условие (4) выполняется в части плоскости $(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i)$ "выше" кривой d, описываемой уравнением $\Delta_i(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i) = 0$ (рис.5). Из выражений для производных функций (81) легко проверяются условия (37).

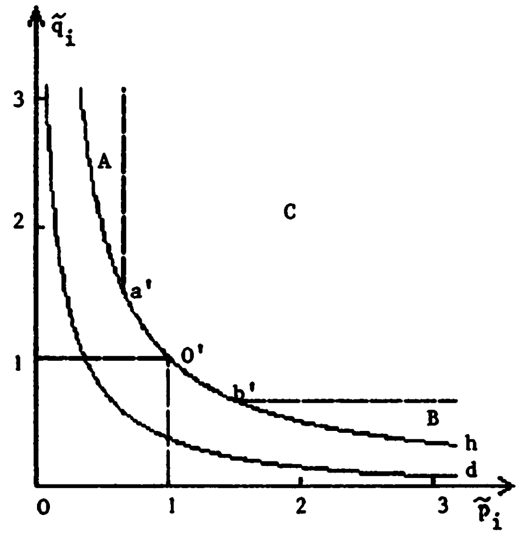

Рис. 5

Введем обозначения

$$H(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i) = \tilde{p}_i\tilde{q}_i - 1. \tag{82}$$

Тогда по формулам (5) находим

$$\left.\begin{aligned}\rho_i &= -2\Delta_i^{-1}H(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i)(\tilde{p}_i\tilde{q}_i + \tilde{p}_i+1),\\ \sigma_i &= -2\Delta_i^{-1}H(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i)(\tilde{p}_i\tilde{q}_i + \tilde{q}_i + 1).\end{aligned}\right\} \tag{83}$$

В плоскости $(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i)$ уравнение $H(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i) = 0$ описывает гиперболу h с асимптотами $\tilde{p}_i = 0$, $\tilde{q}_i = 0$. Эти прямые являются и асимптотами кривой четвертого порядка d.

Применим к этим сплайнам теорему 1. Из условий "а" вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для того, чтобы интерполяционный рациональный сплайн был выпуклым на* $[a, b]$, *достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$2\bar{b}_i(1 + \tilde{p}_i + \tilde{p}_i^2) = 1, \tag{84а}$$

$$2\bar{c}_{i+1}(1 + \tilde{q}_i + \tilde{q}_i^2) = 1, \quad i \in \{0,\dots,N-1\}; \tag{84б}$$

$$(\frac{1}{2} - \bar{b}_i - \bar{c}_{i+1})^2 = \bar{b}_i\bar{c}_{i+1}, \quad i \in \{0,\dots,N-1\}; \tag{85}$$

и неравенства (63).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (84) - это (27) при подстановке в них $\varphi_i''(1), \psi_i''(0)$. По сравнению с теоремой 1 здесь условия $\rho_i = \sigma_i = 0$ заменены условиями (85). Покажем, что они эквивалентны в силу (84). Действительно, из (83) при $\rho_i = \sigma_i = 0$ следует $H(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i) = 0$, т.е. точки в плоскости $(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i)$ должны лежать на гиперболе h. Но тогда равенства (84) должны выполняться при замене $\tilde{p}_i = 1/\tilde{q}_i$, $\tilde{q}_i = 1/\tilde{p}_i$, т.е. должно быть

$$2\bar{b}_i(1 + \tilde{q}_i + \tilde{q}_i^2) = q_i^2, \tag{86а}$$

$$2\bar{c}_{i+1}(1 + \tilde{p}_i + \tilde{p}_i^2) = p_i^2, \tag{86б}$$

$$i \in \{0,\dots,N-1\};$$

Исключая из пар (84а), (86б) или (84б), (86а) $\tilde{p}_i$ или $\tilde{q}_i$, получаем (85). Или, наоборот, подставляя в (85) $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ из (84) получаем $H(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i) = 0$. Следствие доказано.

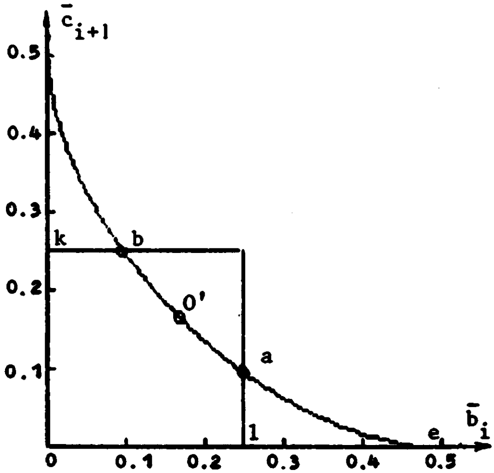

Рис. 6

Множество точек (85) - это эллипс, симметричный относительно прямой $\bar{b}_i = \bar{c}_{i+1}$, с центром в точке $E(1/3, 1/3)$, касающийся осей координат в точке $e(1/2,0)$ и ей симметричной на оси $\bar{c}_{i+1}$ и проходящий через точку $O'(1/6,1/6)$, отвечающую звену кубического сплайна (рис.6).

Условия (25) определяют прямые, отсекающие от эллипса дугу ab с координатами точек $a(1/4,(3-\sqrt{5})/8)$, $b((3-\sqrt{5})/8,1/4)$. Это точки инфимумов $\bar{c}_{i+1}$ и $\bar{b}_i$ соответственно. Если в (63) принять $\bar{c}_i$ и $\bar{b}_{i+1}$ равными их супремальным значениям 1/4, то в точке a $(3-\sqrt{5})/2 \le \eta_i$, а в точке b $\eta_i \le$ $\le (3+\sqrt{5})/2$. Объединяя строгие неравенства получаем ограничения (50) при $\gamma = (3+\sqrt{5})/2$. Если сравнить их с аналогичным случаем сплайнов с дополнительными узлами, то они оказываются более жесткими, чем там, но более свободными, чем в случае кубических сплайнов (формулы (49)).

Множество, определяемое (63в), а) либо содержит дугу O'a целиком и тогда можно строить звено кубического сплайна, б) либо отделяет от дуги O'a меньшую дугу и звено, ближайшее к звену кубического сплайна, дает точка пересечения прямой в (63а) и дуги, в) либо общих точек с дугой $0'a$ не имеет и данная схема оказывается недостаточной.

Аналогично обстоит дело с множеством (63б) и дугой $0'b$.

После выбора $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ значения $\tilde{p}_i, \tilde{q}_i$ находятся из (84):

$$\tilde{p}_i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{b}_i} - \frac{3}{4}}\,, \tag{87а}$$

$$\tilde{q}_i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{c}_{i+1}} - \frac{3}{4}}\,. \tag{87б}$$

В плоскости $(\tilde{p}_i, \tilde{q}_i)$ дуге ab соответствует дуга $a'b'$, концам которой отвечают значения $a'((\sqrt{5}-1)/2, (\sqrt{5}+1)/2)$, $b'((\sqrt{5}+1)/2, (\sqrt{5}-1)/2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для базовых функций (81) для $A(t)$ (15) выполняются условия $\rho_i = \sigma_i = 0$, $A''(t) = 0$ (§1). В этом случае $A(t) = 0$ и (1), (14) суть два разных представления одного и того же сплайна.

В случае $\rho_i \neq 0$, $\sigma_i \neq 0$ требуется выполнять (33). Согласно (28) $F[\varphi_i] = \tilde{p}_i^2$, $G[\psi_i] = \tilde{q}_i^2$, $F[\varphi_i]G[\psi_i]-1 = H(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i)(\tilde{p}_i\tilde{q}_i + 1)$. Так как здесь $H(p_i,q_i) \neq 0$, то из (33) получаем

$$\frac{1}{2}(\tilde{p}_i\tilde{q}_i+1) - \bar{b}_i(\tilde{p}_i\tilde{q}_i+\tilde{p}_i+1) - \bar{c}_{i+1}(\tilde{p}_i\tilde{q}_i+\tilde{q}_i+1) = 0. \tag{88}$$

Это равенство можно представить в виде:

$$(\tilde{p}_i T_i - \bar{c}_{i+1})(\tilde{q}_i T_i - \bar{b}_i) = \bar{b}_i\bar{c}_{i+1} - T_i^2, \tag{89}$$

где $T_i = \frac{1}{2} - \bar{b}_i - \bar{c}_{i+1}$.

В плоскости $(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i)$ – это гипербола с горизонтальной и вертикальной асимптотами. Для значений $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$, отвечающих эллипсу (85), она вырождается в пару пересекающихся прямых.

Для точек, не лежащих на эллипсе, в (89) правая часть отлична от нуля и, значит, оба сомножителя слева отличны от нуля.

Из условий "б" теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для того, чтобы интерполяционный рациональный сплайн был выпуклым на* $[a, b]$*, достаточно, чтобы выполнялись условия* $\rho_i < 0$, $\sigma_i < 0$, (63),

$$\bar{b}_i\bar{c}_{i+1} - T_i^2 > 0, \quad i \in \{0,\dots,N-1\}; \tag{90}$$

$$p_i > \frac{\bar{c}_{i+1}}{T_i}, \quad q_i = \frac{\tilde{p}_i\bar{b}_i - T_i}{\tilde{p}_iT_i - \bar{c}_{i+1}}, \tag{91а}$$

или

$$q_i > \frac{\bar{b}_i}{T_i}, \quad \tilde{p}_i = \frac{\tilde{q}_i\bar{c}_{i+1} - T_i}{\tilde{q}_iT_i - \bar{b}_i}, \tag{91б}$$

$$i \in \{0,\dots,N-1\};$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверяем условия "б" теоремы 1. Из них (33), иначе (88), выполняется вследствие любого из равенств (91). Выполнение (41) требует, чтобы было

$$2\bar{b}_i(1 + \tilde{p}_i + \tilde{p}_i^2) \geq 1,$$

$$2\bar{c}_{i+1}(1 + \tilde{q}_i + \tilde{q}_i^2) \geq 1,$$

$$i \in \{0,\dots,N-1\};$$

Отсюда

$$\tilde{p}_i \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{b}_i} - \frac{3}{4}}, \tag{92а}$$

$$\tilde{q}_i \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{c}_{i+1}} - \frac{3}{4}}, \tag{92б}$$

$i \in \{0,\dots,N-1\};$

Согласно (90) справедливы неравенства

$$\frac{T_i}{\bar{b}_i} < -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{b}_i} - \frac{3}{4}} < \frac{\bar{c}_{i+1}}{T_i}, \tag{93а}$$

$$\frac{T_i}{\bar{c}_{i+1}} < -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\bar{c}_{i+1}} - \frac{3}{4}} < \frac{\bar{b}_i}{T_i}, \tag{93б}$$

и поэтому (91) обеспечивают выполнение (92), а значит, и (41). В плоскости (p_i, q_i) точки лежат в открытой области C (см. рис. 5). Следствие доказано.

Этой схемой мы расширили область значений параметров ($\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$), что может иметь смысл в конкретных практических задачах. Но мы не расширили диапазон значений η_i. Расширение возможно только за счет использования точек ($\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$) вне эллипса, удовлетворяющих неравенству $(\overline{90})$, противоположному неравенству (90).

К сожалению, теорема 1,б здесь оказывается недостаточной. Действительно, при $(\overline{90})$, с одной стороны, получаются цепочки неравенств $(\overline{93})$, а, с другой, - сомножители слева в (89) разных знаков, т.е. неравенства в (91) должны быть противоположными. Поэтому при $\rho_i < 0$, $\sigma_i < 0$, если выбрать, например, $\tilde{p}_i > T_i/\bar{b}_i$ и обеспечить выполнение $(\overline{93а})$, то должно быть $\tilde{q}_i < \bar{b}_i/T_i$. Но тогда не выполняется (92б). Ничего не меняется и в случае $\rho_i > 0$, $\sigma_i > 0$, когда должны выполняться $(\overline{92})$. Здесь при $\tilde{p}_i > T_i/\bar{b}_i$, $\tilde{q}_i < \bar{b}_i/T_i$ выполняется $(\overline{92б})$, но не выполняется $(\overline{92а})$.

Остается использовать теорему 2. Она имеет

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для того, чтобы интерполяционный рациональный сплайн был выпуклым на* [a,b], *достаточно, чтобы выполнялись условия* $\rho_i < 0$, $\sigma_i < 0$, (89), $(\overline{90})$

и одна из групп неравенств:

а) $\eta_i < 1$, (46а), (63а), $\tilde{p}_i < \bar{c}_{i+1}/T_i$ *и равенство* (91а) *или* $\tilde{q}_i > T_i/\bar{c}_{i+1}$ *и равенство* (91б);

б) $\eta_i > 1$, (46б), (63б), $\tilde{p}_i > T_i/\bar{b}_i$ *и равенство* (91а) *или* $\tilde{q}_i < \bar{b}_i/T_i$ *и равенство* (91б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствии $(\overline{90})$ имеют место $(\overline{93})$.

а) При $p_i < \bar{c}_{i+1}/T_i$ выполняется $(\overline{92а})$, т.е. (47а) теоремы 2. Так как здесь $q_i > T_i/\bar{c}_{i+1}$, то выполняется (92б), т.е. (41б) теоремы 2. На рис.5 этому отвечает открытая область A.

б) При $p_i > T_i/\bar{b}_i$ выполняется (92а), т.е. (41а) теоремы 2. Так как здесь $q_i < b_i/T_i$, то выполняется (92б), т.е. (47б) теоремы 2. На рис. 5 этому отвечает открытая область B.

Все условия теоремы 2 выполнены и следствие доказано.

При его использовании для нахождения $\bar{b}_i$, $\bar{c}_{i+1}$ требуется решать совместно неравенства (46), (63), $(\overline{90})$. Неравенство $(\overline{90})$ выделяет на плоскости $(\bar{b}_i, \bar{c}_{i+1})$ область aO'bkO1 (см.рис.6) а (46а), (63а) или (46б), (63б) подобласть в ней.

Сделаем два замечания о применении следствия 4.

При выполнении (46а), (63а) или (46б), (63б) нельзя рассчитывать всегда обеспечить это только за счет выбора $\bar{c}_{i+1}$ или $\bar{b}_i$.

В случае "а" в (46а) величина $1-4\mu_i\bar{c}_i/\eta_{i-1}$ может оказаться малой, и придется уменьшать $\bar{c}_i$, т.е. исправлять результаты для предыдущего звена сплайна. Отметим один из возможных приемов. Мы условились применять теорему 2 только когда исчерпываются возможности применения теоремы 1,5, в данном случае следствия 3, т.е., когда $\eta_i < (3+\sqrt{5})/2$. Учитывая еще, что $\bar{b}_i < \frac{1}{4}$, $\bar{c}_{i+1} < (3-\sqrt{5})/8$ из (46а) получаем

$$\frac{\bar{c}_i}{\eta_{i-1}} \le \frac{2(\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}-1)\mu_{i+1}}{4\mu_i[2 + (\sqrt{5}-1)\mu_{i+1}]} \cdot$$

В случае "б" порядок действия такой же. Здесь малой может оказаться величина $1-\mu_{i+1}\bar{b}_{i+1}\eta_{i+1}$ и придется уменьшать $\bar{b}_{i+1}$. Учитывая, что в (46б) $\eta_i^{-1} < (3-\sqrt{5})/2$, можно получить аналогично неравенство

$$\bar{b}_{i+1}\eta_{i+1} \leq \frac{2(\sqrt{5}-2) + (\sqrt{5}-1)\lambda_i}{4\lambda_{i+1}[2+(\sqrt{5}-1)\lambda_i]} .$$

Это во-первых. Во-вторых,в формулировке следствия имеются условия $\rho_i < 0$, $\sigma_i < 0$, т.е. $H(\tilde{p}_i,\tilde{q}_i) = \tilde{p}_i\tilde{q}_i - 1 > 0$. Чтобы обеспечить выполнение этого условия, помимо (91), придется налагать ограничения, а именно:

$$\tilde{p}_i \frac{\tilde{p}_i\bar{b}_i - T_i}{\tilde{p}_i T_i - \bar{c}_{i+1}} > 1, \tag{94а}$$

$$\tilde{q}_i \frac{\tilde{q}_i\bar{c}_{i+1} - T_i}{\tilde{q}_i T_i - \bar{b}_i} > 1. \tag{94б}$$

Если в случае "а" мы выбираем $\tilde{p}_i < \bar{c}_{i+1}/T_i$, а $\tilde{q}_i$ вычисляем из (91а), то из (94а) следует, что

$$\frac{T_i - \sqrt{T_i^2 - \bar{b}_i\bar{c}_{i+1}}}{\bar{b}_i} < \tilde{p}_i < \frac{\bar{c}_{i+1}}{T_i} .$$

Если $\tilde{q}_i > T_i/\bar{c}_{i+1}$, а $\tilde{p}_i$ вычисляется из (91б), то из (94б) следует, что

$$\tilde{q}_i > \frac{T_i + \sqrt{T_i^2 - \bar{b}_i\bar{c}_{i+1}}}{\bar{c}_{i+1}} .$$

Аналогичные формулы имеем в случае "б", где по сравнению с данными меняются местами $\tilde{p}_i$ и $\tilde{q}_i$, $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_{i+1}$

В заключение параграфа приведем числовые примеры выпуклой интерполяции рациональными сплайнами. На рис.2 дан график второй производной сплайна (криволинейные дуги), построенного по тем же исходным данным, что и в первом примере из §5. Исполь - зовано следствие 2.

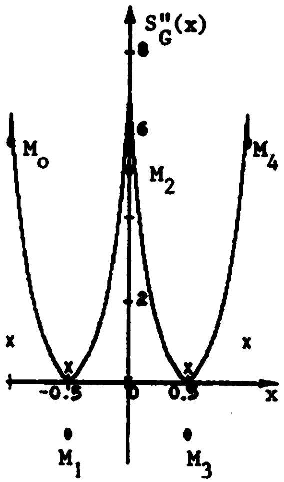

Рис. 7

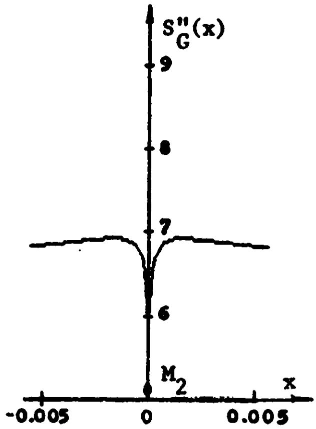

Рис. 8

На рис.7 представлена функция $S''_G(x)$ для изменных исход - ных данных, а именно: $f_1 = f_3 = 0.375$. Использовалось следст- вие 4. При этом проверялись условия (46).В точках $x = -1, 0, 1$ имеют место большие градиенты $S''_G(x)$. Это иллюстрируется ее графиком в окрестности $x = 0$ на рис.8, выполненном в большем масштабе по оси x.

Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., БОГДАНОВ В.В. Изогеометрическая эрмитова интерполяция обобщенными кубическими сплайнами //Сплайны и их приложения. - Новосибирск, 1991. - Вып. 142: Вычислительные системы. - С. 15-46.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Монотонная интерполяция обобщенными ку - бическими сплайнами класса C^2 //Интерполяция и аппроксимация

сплайнами. - Новосибирск, 1992. - Вып. 147: Вычислительные системы. - С. 44-67.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

4. SPÄTH H. Spline Algorithmen zur Konstrukzion glatter Kurven und Flächen. - München: P.Oldenburg Verlag, 1973.

5. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline interpolation //Constructive Theory of Function. - Sofia, 1984. - P. 610-620.

6. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. О теории обобщенных кубических сплайнов //Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып. 137: Вычислительные системы. - С. 58-90.

7. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 // Там же. - С. 31-57.

8. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э.,УОЛШ Дж. Теория сплайнов и их приложения. - М.: Мир, 1972. - 318 с.

Поступила в редакцию

17 мая 1994 года