С П Л А Й Н Ы   И   И Х   П Р И М Е Н Е Н И Е
(Вычислительные системы)
1995 год   Выпуск 154

УДК 519.652

ПРИМЕНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВИГАТЕЛЯ

Ю.С.Волков

В статье [1] был предложен довольно простой и эффективный алгоритм расчета динамических скоростных характеристик автомобильных и тракторных двигателей. При запуске двигателя, измеряется время каждого полного цикла двигателя и вычисляется средняя скорость вращения маховика двигателя за каждый цикл. Скорость вращения $n(t)$ в любой момент времени t авторы предложили определять посредством интерполяции полученного таким способом множества дискретных значений скорости. В качестве аппарата интерполяции были выбраны локальные кубические рациональные сплайны класса C^1 [2], позволяющие определить также и ускорение $\varepsilon(t) = n'(t)$. При этом, в отличие от обычных кубических сплайнов, функция $n(t)$ получается плавной, без нежелательных осцилляций. Это достигается путем надлежащего выбора параметров рационального сплайна. Однако определить максимальную мощность двигателя при таком подходе не удается, так как функция мощности $k\cdot n(t)\cdot\varepsilon(t)$ не получается выпуклой, и максимальное значение сильно колеблется при разных запусках двигателя.

В настоящей заметке для расчета динамических скоростных характеристик двигателя предлагается использовать кубические рациональные сплайны класса C^2. Вычисляемые функции $n(t)$ и

$\varepsilon(t)$ получаются более гладкими, а максимум функции мощности в этом случае находится устойчиво.

Перейдем к постановке задачи. Во время запуска двигателя за период разгона измеряются значения y_i скорости $n(t)$ после каждого оборота двигателя, т.е. при некоторых $t = t_i$, $i = 1, 2,\dots,N$, причем t_1 и t_N – начальное и конечное время периода разгона двигателя. Требуется восстановить функцию $n(t)$ на отрезке $[t_1,t_N]$ по заданным в узлах сетки $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ значениям $n(t_i) = y_i$, $i = 1,2,\dots,N$. Так как отрезок $[t_1,t_N]$ является периодом разгона двигателя, то должно выполняться условие

$$n'(t_1) = n'(t_N) = 0. \tag{1}$$

Следуя [1], будем искать $n(t)$ в виде рационального кубического сплайна $S(t)$ [2], который на каждом промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ можно представить в виде

$$S(t) = y_i(1-\tau)+y_{i+1}\tau + C_i\left[\frac{\tau^3}{1+p_i(1-\tau)} - 1\right] + D_i\left[\frac{(1-\tau)^3}{1+q_i\tau} - 1\right]$$

или

$$S(t) = y_i(1-\tau)+y_{i+1}\tau - \tau(1-\tau)\left[C_i\frac{\tau+1+p_i}{1+p_i(1-\tau)} + D_i\frac{1-\tau+1+q_i}{1+q_i\tau}\right], \tag{2}$$

где $\tau = \dfrac{t-t_i}{h_i}$, $h_i = t_{i+1} - t_i$. Параметры C_i и D_i можно выразить либо через значения первой производной сплайна $S(t)$ в крайних точках рассматриваемого промежутка:

$$C_i = \frac{h_i}{(2+p_i)(2+q_i)-1}\left[(2+q_i)\left[S'(t_{i+1}) - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right] - \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - S'(t_i)\right]\right],$$

$$D_i = \frac{h_i}{(2+p_i)(2+q_i)-1}\left[(2+p_i)\left\{\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - S'(t_i)\right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{S'(t_{i+1}) - \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right\}\right], \qquad (3)$$

либо через значения второй производной:

$$C_i = \frac{S''(t_{i+1})h_i^2}{2(3+3p_i+p_i^2)}, \qquad D_i = \frac{S''(t_i)\, h_i^2}{2(3+3q_i+q_i^2)}. \qquad (4)$$

Во внутренних узлах сетки нам неизвестны значения ни первой, ни второй производных функции скорости $n(t)$. В статье [1] величины $S'(t_i), i = 2,3,\ldots,N-1$, задавались приближенно по формуле

$$S'(t_i) = \mu_i \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} + \lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}},$$

где $\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$, $\lambda_i = 1 - \mu_i$. Определенный таким образом сплайн $S(t)$ интерполирует функцию $n(t)$ и принадлежит классу C^1. При

$$p_i \geq \frac{w_{i+1}}{w_i} - 2, \quad q_i \geq \frac{w_i}{w_{i+1}} - 2, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \qquad (5)$$

с величинами

$$w_i = \frac{1}{h_{i-1}+h_i}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right], \; i = 2,3,\ldots,N-1, \qquad (6)$$

являющимися вторыми разделенными разностями от исходных данных, сплайн сохраняет выпуклость исходных данных. Именно для удовлетворения условий (5), полагалось

$$p_i = \max\left\{0, \frac{w_{i+1}}{w_i} - 2\right\}, \quad q_i = \max\left\{0, \frac{w_i}{w_{i+1}} - 2\right\}. \tag{7}$$

Теперь же мы не будем задавать ни $S'(t_i)$, ни $S''(t_i)$, а определим сплайн из условия $S(t) \in C^2$.

Пусть $M_i = S''(t_i)$, $i = 1,2,\ldots,N$. Из условий непрерывности $S'(t)$ в узлах $t_2,t_3,\ldots,t_{n-1}$ находим [3]:

$$M_{i-1}\frac{h_{i-1}}{3+3q_{i-1}+q_{i-1}^2} + M_i\left[\frac{h_{i-1}(2+p_{i-1})}{3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2} + \frac{h_i(2+q_i)}{3+3q_i+q_i^2}\right] +$$

$$+ M_{i+1}\frac{h_i}{3+p_i+p_i^2} = 2\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \quad i = 2,3,\ldots,N-1. \tag{8}$$

К полученным уравнениям относительно неизвестных M_i для замыкания системы добавим еще два уравнения

$$M_1\frac{h_1(2+q_1)}{3+3q_1+q_1^2} + M_2\frac{h_1}{3+3p_1+p_1^2} = 2\,\frac{y_2 - y_1}{h_1}, \tag{9}$$

$$M_{N-1}\frac{h_{N-1}}{3+3q_{N-1}+q_{N-1}^2} + M_N\frac{h_{N-1}(2+p_{N-1})}{3+3p_{N-1}+p_{N-1}^2} = -2\,\frac{y_N-y_{N-1}}{h_{N-1}}, \tag{10}$$

вытекающие из условия (1).

Хотя данная трехдиагональная система уравнений (8)-(10) не при любых значениях параметров p_i,q_i имеет диагональное преобладание, численное ее решение не вызывает особых затруднений. Параметры p_i,q_i можно опять-таки задавать по тем же формулам (7), но доказать в этом случае, что рациональный сплайн $S(t)$ будет выпуклым при интерполяции выпуклых исходных данных не удается. Тем не менее, если считать, что величины $S'(t_i)$ и

$\mu_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}$ довольно близки, то,поскольку выполнены условия (5), коэффициенты C_i и D_i в представлении (3) будут положительны, а, следовательно, с учетом (4), будут положительны и $S''(t_i)$.Это и обеспечивает выпуклость $S(t)$ в виду того, что

$$S''(t) = \frac{M_i}{3+3q_i+q_i^2} \cdot \frac{1-\tau}{1+q_i\tau}\left[1 + \frac{1+q_i}{1+q_i\tau} + \frac{(1+q_i)^2}{(1+q_i\tau)^2}\right] +$$

$$+ \frac{M_{i+1}}{3+3p_i+p_i^2} \cdot \frac{\tau}{1+p_i(1-\tau)}\left[1 + \frac{1+p_i}{1+p_i(1-\tau)} + \frac{(1+p_i)^2}{(1+p_i(1-\tau))^2}\right].$$

Однако строгое доказательство выпуклости нелокального сплайна мы можем провести лишь при наличии диагонального преобладания. С этой целью положим $p_i = q_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots,N-1$ (рассмотрение такого случая было предложено Мирошниченко В.Л.).

Перепишем систему уравнений (8)-(10) относительно новых неизвестных $\overline{M}_i = \frac{M_i}{2(3+3q_i+q_i^2)}$, $i = 1,2,\ldots,N$:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{M}_1(2+q_1) + \overline{M}_2 = w_1, \\ &\overline{M}_{i-1}\mu_i + \overline{M}_i(2+q_i) + \overline{M}_{i+1}\lambda_i = w_i, \quad i = 2,3,\ldots,N-1, \\ &\overline{M}_{N-1} + \overline{M}_N(2+q_N) = w_N, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где $w_2, w_3, \ldots, w_{N-1}$ определены соотношениями (6); $w_1 = \frac{y_2-y_1}{h_1^2}$, $w_N = -\frac{y_N-y_{N-1}}{h_{N-1}^2}$. Через эти же величины выразим и сплайн

$$S(t) = y_i(1-\tau) + y_{i+1}\tau -$$

$$- h_i^2\tau(1-\tau)\left[\bar{M}_i \frac{1-\tau+1+q_i}{1+q_i\tau} + \bar{M}_{i+1} \frac{\tau+1+q_{i+1}}{1+q_{i+1}(1-\tau)}\right]. \qquad (12)$$

Коэффициенты системы уравнений для определения параметров сплайна и выражение для его вычисления значительно упростились, но самое главное, матрица системы (11) имеет строгое диагональное преобладание.

В [3,4] для систем уравнений с диагональным преобладанием установлены достаточные условия, гарантирующие положительность решения при положительной правой части. Предположим, что наши интерполируемые данные выпуклы, причем на концах рассматриваемого отрезка $[t_1,t_N]$ заданы производные y_1' и y_N', согласованные с выпуклостью данных, т.е. $\dfrac{y_2-y_1}{h_i} \geq y_1'$, $y_N' \geq \dfrac{y_N-y_{N-1}}{h_{N-1}}$. Тогда правые части первого и последнего уравнения системы (11) следует определять по формулам

$$w_1 = \frac{1}{h_1}\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - y_1'\right), \quad w_N = \frac{1}{h_{N-1}}\left(y_N' - \frac{y_N - y_{N-1}}{h_{N-1}}\right).$$

Применительно к системе (11) достаточные условия из [3,4] записываются в виде

$$\left.\begin{aligned}
& w_1 - \frac{w_2}{2+q_2} \geq 0, \\
& \mu_i\left(w_i - \frac{w_{i-1}}{2+q_{i-1}}\right) + \lambda_i\left(w_i - \frac{w_{i+1}}{2+q_{i+1}}\right) \geq 0, \\
& \qquad\qquad i = 2,3,\ldots,N-1, \\
& w_N - \frac{w_{N-1}}{2+q_{N-1}} \geq 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Выполнение неравенств (13) для выпуклых данных обеспечивает положительность значений $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots, \bar{M}_N$ и, следовательно, положительность $S''(t)$ на всем отрезке $[t_1, t_N]$.

Положим

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \max\left\{0,\ \frac{w_2}{w_1} - 2\right\}, \\ q_i &= \max\left\{0,\ \frac{w_{i-1}}{w_i} - 2,\ \ \frac{w_{i+1}}{w_i} - 2\right\},\ i = 2,3,\ldots,N-1 \\ q_N &= \max\left\{0,\ \frac{w_{N-1}}{w_N} - 2\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Такое задание величин q_i, с одной стороны, при положительных значениях w_i влечет выполнение неравенств (13), а с другой, корректирует обычный кубический сплайн класса C^2 практически только на тех промежутках сетки, где сильно меняется величина второй разделенной разности w_i.

Серия проведенных нами численных экспериментов в ОПКТБ СибИМЭ Сибирского отделения Россельхозакадемии с данными, "снятыми" с двигателей автомобиля "КамАЗ" и трактора "Беларусь", показала пригодность рациональных кубических сплайнов класса C^2, определяемых соотношениями (6),(11),(12),(14), для расчета динамических характеристик двигателя таких, как скорость вращения маховика двигателя $n(t)$, ускорение $\varepsilon(t) = n'(t)$ и мощность $N(t) = k \cdot n \cdot \varepsilon(t)$. При этом функция мощности $N(t)$ получается с четко выраженным максимумом. Усреднение функции скорости по 5-6 запускам двигателя стабилизирует все эти характеристики. Таким образом, предложенный в данной статье математический аппарат может быть использован при разработке устройств, предназначенных для проверки и регулировки двигателей.

Литература

1. Расчет динамических скоростных характеристик двигателя с применением сплайн-функций /Бобрышев Г.П., Волков Ю.С., Добролюбов И.П., Пятин С.П. //Повышение эффективности инженерно-технического обеспечения сельскохозяйственного производства. - Новосибирск, 1990. - Вып. 2: Научно-технический бюллетень СО ВАСХНИЛ. - С. 2-7.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

3. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline interpolation //Constructive theory of functions'84. - Sofia, 1984. - P. 610-620.

4. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 //Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып. 137: Вычислительные системы. - С. 31-57.

Поступила в редакцию
17 ноября 1994 года