СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1995 год Выпуск 154

УДК 519.687

О ВЫЧИСЛЕНИИ МНОГОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В.А. Леус

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности из N отсчетов может быть записано в m-мерной форме, когда N есть произведение m попарно взаимно простых целых чисел $N = \prod_{i=1}^{m} N_i$ [1]. Если к тому же значения множителей близки между собой, то можно говорить о замене преобразования длинной N-последовательности на множество преобразований коротких N_i-последовательностей. Это обстоятельство породило надежду на то, что параллельная реализация вообще снимет вопрос временно́й сложности вычисления одномерного ДПФ в силу произвольности увеличения размерности m, причем особая роль здесь отводится быстрому преобразованию Фурье (БПФ) как ускоряющему звену в технологии многомерной обработки. Эффективное вычисление многомерного ДПФ имеет, разумеется, и самостоятельное значение. В данной статье проведено исследование реалистических перспектив в этой области и найдена реализация двумерного ДПФ,которая без привлечения БПФ обеспечивает минимально возможную временну́ю сложность вычислительной задачи.

1. Двумерное преобразование

Дискретное преобразование Фурье прямоугольной таблицы отсчетов $f(j_1,j_2)$ размерами $N_1 x N_2$ в прямоугольную таблицу-образ отсчетов $d(k_1,k_2)$ записывается в виде:

$$d(k_1,k_2) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \sum_{j_2=0}^{N_2-1} f(j_1,j_2) w_1^{j_1 k_1} \cdot w_2^{j_2 k_2}; \tag{1}$$

$$k_1 = 0,\ldots,N_1-1, \quad k_2 = 0,\ldots,N_2-1,$$

где $w_1 = \exp\{-2\pi i/N_1\}$, $w_2 = \exp\{-2\pi i/N_2\}$. Вычисления по формулам (1) требуют выполнения $\sim N_1^2 x N_2^2$ операций комплексной арифметики. Строчно-столбцовые модификации

$$d(k_1,k_2) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} \left\{ \sum_{j_2=0}^{N_2-1} f(j_1,j_2) w_2^{j_2 k_2} \right\} w_1^{j_1 k_1}, \tag{2а}$$

$$d(k_1,k_2) = \sum_{j_2=0}^{N_2-1} \left\{ \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f(j_1,j_2) w_1^{j_1 k_1} \right\} w_2^{j_2 k_2} \tag{2б}$$

требуют выполнения лишь $N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1+N_2)$ операций.

Кратко рассмотрим выполнение двумерного ДПФ на двумерной кольцевой вычислительной системе (ВС). Предположим, что процессорное кольцо составлено из N_2 процессоров, каждый из которых имеет кольцевую память на N_1 слов, и пусть j_2-й столбец ($j_2 = 0,\ldots,N_2-1$) исходной таблицы отсчетов размещен в памяти j_2-го процессора в порядке возрастания номеров j_1. На ВС такой архитектуры выполнение двумерного ДПФ осуществляется в два этапа.

На первом этапе все процессоры выбирают из своих кольцевых памятей по одному отсчету $f(0,j_2)$ и, обмениваясь информацией по процессорному кольцу, производят одномерное преобразование Фурье согласно внутренним суммированиям формулы (2а).

Результат каждый k_2-й процессор записывает в свою кольцевую память на место считанного отсчета. Затем то же проделывается для всех остальных отсчетов $f(j_1,j_2)$ при $j_1 = 1,\ldots,N_1-1$.

На втором этапе каждый k_2-й процессор, прокручивая данные в своей кольцевой памяти, производит внешнее суммирование в (2а) для $k_1 = 0$, после чего все процессоры транслируют вычисленные отсчеты $d(0,k_2)$ на вывод из ВС. Затем внешние суммирования повторяются для $k_1 = 1,\ldots,N_1-1$, чередуясь с выводами из ВС соответствующих строк отсчетов $d(k_1,k_2)$ результирующей таблицы.

На первом этапе делаются N_1 оборотов по процессорному кольцу длины N_2. Во втором этапе производятся N_1 оборотов по памятям и N_1 оборотов по процессорному кольцу. Если соседствующие процессорные и запоминающие элементы взаимодействуют согласно асинхронно-локальному принципу, т.е. без глобального тактирования по мере готовности соседей к взаимодействию [2], то временна́я сложность реализации двумерного ДПФ согласно строчно-столбцовому алгоритму есть

$$T_A = O((N_1N_2 + N_1N_1 + N_1N_2)\log N),\ N = \max\{N_1,N_2\}. \tag{3}$$

Логарифмический множитель в (3) учитывает необходимость увеличения длины разрядной сетки, а следовательно и времени на обработку двоичного представления чисел при неограниченном росте размерности N. При формальной симметризации измерений ($N_1 = N_2 = N$) приходим к "квадратному" случаю, для которого (3) дает временну́ю сложность $O(N^2\log N)$. При $N_1 = 1$ из (3) имеем $O(N_2\log N_2)$ – время максимально распараллеленного одномерного ДПФ [3]. При $N_2 = 1$ получаем $O(N_1\log N_1)$ – время реализации одномерного ДПФ на однопроцессорной асинхронно-локальной вычислительной системе.

Оценка (3) не является нижним пределом временно́й сложности. В рассмотренной вычислительной архитектуре двумерность самого преобразования используется слабо,так как почти все элементы системы запоминающие,а вычисляющие элементы образуют одномерную структуру. Проект вычислительной модели, в которой двумерность, по нашему мнению, используется даже чрезмерно, предложен в [4]. Это систолическая матрица из $N_1 x N_2$ процессорных элементов, принимающая из внешней среды сихронно организованные данные и выдающая во внешнюю среду такт за тактом результирующую таблицу отсчетов.

Вычисления ведутся следующим образом. Через крайний левый столбец, составленный из N_1 процессорных элементов вводится (в темпе систолики и с необходимыми синхронизирующими сдвигами на один такт от строки к строке) квадратная матрица W_1, составленная из степеней константы w_1, для получения внутренних сумм по формулам (2б). Через N_2 процессорных элементов крайней верхней строки систолической матрицы вводится таблица входных отсчетов $f(j_1,j_2)$, и процессорные элементы производят внутренние суммирования. Вслед за таблицей отсчетов в том же направлении вводится матрица W_2, процессорные элементы осуществляют внешние суммирования и результирующая таблица отсчетов $d(k_1,k_2)$ выводится столбцами в "горизонтальном" направлении из крайних правых процессорных элементов систолической матрицы.

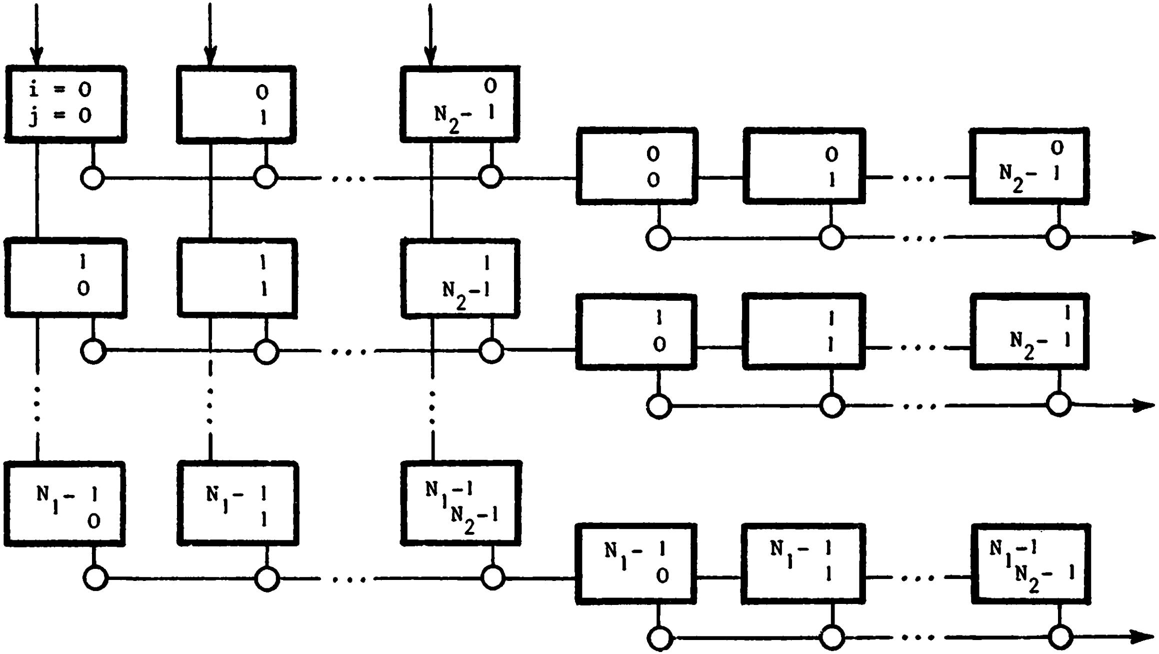
Максимальная глубина "вертикально" вводимой информации с учетом синхро-сдвигов составляет в дискретных единицах величину $N_1 + 2N_2$. После ввода последнего слова нужно произвести еще N_1 систолических тактов для достижения им нижнего ряда процессорных элементов, так что для выполнения преобразования требуется $2(N_1 + N_2)$ систолических тактов. Однако из этого отнюдь не следует, что систолическая матрица "способна выполнить $O(N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2))$ операций алгоритма двумерного $N_1 x N_2$-точечного ДПФ за время $O(N_1 + N_2)$ ", как это утверждается в [4]. Во-первых, длительность систолического такта в силу непременного условия глобальной синхронизации растет не медленнее габаритного линейного размера матричной системы, который пропорционален величине $N = \max\{N_1, N_2\}$. Во-вторых, с ростом размера задачи, как уже отмечалось выше, необходимо увеличивать разрядную сетку представимых в системе чисел пропорционально $\log N$. Таким образом, правильная оценка времени однократной систолической реализации строчно-столбцового алгоритма двумерного ДПФ имеет вид:

$$T_C = O(N(N_1 + N_2)\log N). \tag{4}$$

В случае квадратной исходной таблицы правая часть (4) оказывается равной $O(N^2\log N)$, что совпадает с полученным на N-процессорной кольцевой асинхронно-локальной ВС. Позднее были предложены систолические структуры, использующие БПФ и свободные от перекрестных потоков данных [5], однако все недостатки "систолики" присущи им в полной мере.

2. Параллельная реализация двумерного ДПФ с минимальной временной сложностью

Рассмотрим организацию вычислений по формулам (2б) на двумерной ВС с элементами, взаимодействующими между собой только локально. Система (см.рисунок) состоит из двух $N_1 \times N_2$ решеток процессоров (обозначены прямоугольниками) - левой и правой. Процессоры имеют небольшие внутренние памяти для программы и данных. Каждому процессору соответствует связанный с ним буферный элемент (на рисунке обозначены кружочками) на одно слово данных. Процессоры левой решетки локально связаны по вертикальным рядам в столбцы, а процессоры правой решетки локально связаны в строки по горизонталям. Все буферные элементы локально связаны в горизонтальные ряды, причем крайние правые буферные элементы левой решетки соединены с крайними левыми процессорами правой решетки в соответствующих строках.



Многоканальный конвейер

Исходная таблица отсчетов $f(j_1,j_2)$ вводится построчно, начиная с $j_1 = N_1-1$, через крайние верхние процессоры левой решетки. Из крайних правых буферных элементов правой решетки результирующая таблица отсчетов $d(k_1,k_2)$ выводится столбцами, начиная с $k_2 = N_2-1$. Все передаваемые по системе слова данных имеют в двоичном представлении сигнальный разряд - метку s. Данные верхней строки исходной таблицы отсчетов ($j_1 = 0$) имеют $s = 1$, а все остальные слова исходной таблицы имеют $s = 0$. В каждом процессоре левой решетки записана порождающая константа w_1, а в каждом процессоре правой решетки - порождающая константа w_2.

Рассмотрим работу этой ВС при выполнении двумерного ДПФ. В вертикальных рядах сверху вниз, а в горизонтальных рядах слева направо, слова данных перемещаются в конвейерном режиме, причем процессоры нижнего ряда левой решетки являются поглотителями. Процессоры вертикальных рядов левой решетки производят внутренние суммирования, возводя в соответствующие степени порождающую константу w_1. Аналогичным образом в горизонтальных рядах правой решетки ведутся внешние суммирования по формулам (2б).

Более подробно процесс вычисления элементов таблицы $d(k_1,k_2)$, $k_1 = 0,\ldots,N_1-1$; $k_2 = 0,\ldots,N_2-1$, может быть описан следующим образом. В ходе работы процессор (k_1,j_2)-го узла левой решетки ($k_1 = 0,\ldots,N_1-1$; $j_2 = 0,\ldots,N_2-1$) вычисляет сумму

$$\sigma(k_1,j_2) = \sum_{j_1=0}^{N_1-1} f(j_1,j_2) w_1^{j_1 k_1} .$$

При поступлении очередного отсчета $f(j_1,j_2)$ процессор (k_1, j_2)-го узла дублирует отсчет в свою память и передает нижнему соседу. Используя полученный отсчет и содержащуюся у себя порождающую константу w_1, процессор вычисляет очередное слагаемое $f(j_1,j_2)w_1^{j_1k_1}$ в выражении $\sigma(k_1,j_2)$ и добавляет его к накапливаемой сумме. После этого процессор проверяет в полученном слове метку s. При s = 0 приемо-передача продолжается. При s = 1 процессор передает накопленную сумму своему буферному элементу, обнуляет свой регистр (k_1,j_2) и начинает повторять весь процесс для новой входной таблицы отсчетов, если таковая поступает. Процессоры самого левого ряда снабжают передаваемые в буфер слова со значениями сумм меткой s = 1, а остальные процессоры левой решетки придают вычисленным суммам метку s = 0.

Как только буферные элементы левой решетки получают значения внутренних сумм, они включаются в конвейерную передачу по горизонтали и в процессоры правой решетки начинают поступать данные для внешнего суммирования по индексу j_2. Каждый (k_1,k_2)-й процессор правой решетки принимает слева очередную сумму $\sigma(k_1,j_2)$, дублирует и передает правому соседу. Используя свою порождающую константу w_2, процессор вычисляет очередное слагаемое $\sigma(k_1,j_1)w_2^{j_2k_2}$ и добавляет его к накапливаемой в регистре (k_1,k_2) сумме. Затем он проверяет метку s. Если s = 0, то процессор продолжает приемо-передачу. Если s = 1,то процессор передает сформировавшийся в регистре результирующий отсчет $d(k_1,k_2)$ своему буферу, причем крайние левые процессоры правой решетки снабжают результирующие слова меткой s = 1, а остальные - меткой s = 0.

Буферные элементы левой решетки после прохождения слова с меткой s = 1 переходят в состояние ожидания приема от своего процессора. Принимая результаты,буферные элементы правой решетки втягиваются в конвейерный вывод строки результирующей таблицы во внешнюю среду. Пропустив слово с меткой s = 1, каждый буфер горизонтального выводного ряда переходит в ожидание приема от своего процессора. После вывода отсчетов предыдущей результирующей таблицы начинается вывод отсчетов следующей и т.д.

Если между соседними элементами системы (процессорными и буферными) обеспечиваются асинхронно-локальные взаимодействия, то отсчеты результирующих таблиц выводятся из горизонтальных конвейеров с некоторым средним темпом N_1/τ. Здесь τ - временная задержка, пропорциональная линейному размеру процессора с коэффициентом, логарифмически зависящим от размера задачи. При массовой обработке последовательности входных таблиц в среднем за интервал времени $N\tau$, где $N = \max\{N_1, N_2\}$, будет выводиться одна результирующая таблица. От начала ввода исходной таблицы до начала вывода ее Фурье-образа протекает время $\tau(N_1 + N_2)$, т.е. временная сложность вычислительной задачи двумерного ДПФ, реализуемого на многоканальной асинхронно-локальной ВС, есть

$$T_{AM} = O((N_1 + N_2)\log N). \qquad (5)$$

Преимущество такой реализации перед систолической очевидно из сравнения (4) и (5). Конструктивно систолическая матрица может оказаться сложнее многоканальной асинхронно-локальной ВС. Во-первых,к матрице процессорных элементов добавляются устройства, содержащие коэффициенты преобразования и обеспечивающие их подачу в процессорную сеть. Во-вторых, в систолической матрице должно поддерживаться движение двух пересекающихся потоков данных, тогда как в асинхронно-локальной ВС (см.рисунок) удается обойтись одним потоком. В-третьих, для архитектуры асинхронно-локальных ВС естественна циклическая непрерывная обработка серии двумерных таблиц, следующих одна за другой. В систолической же архитектуре организация серийной обработки потребовала бы дополнительного конструктивного усложнения,связанного с необходимостью чередования подач таблиц и матриц коэффициентов в двух направлениях. Кроме того многоканальная асинхронно-локальная ВС,в силу универсальности программируемых процессоров,может решать различные другие задачи. В данной архитектуре, например, содержится как частный случай специализированный непрограммируемый волновой компьютер.

При параллельной реализации на N-процессорной ВС быстрого преобразования Фурье N-точечной последовательности отсчетов по каскадной схеме "бабочка" или итеративной схеме "совершенная тасовка" неизбежны глобальные пересылки. Доставку данных (перемещение информации без переработки) к процессорам приходится осуществлять на расстояния, в среднем пропорциональные линейному размеру ВС. По этой причине однократное применение БПФ не дает выигрыша в сравнении с ДПФ. Используя эффект конвейеризации посредством замены глобальных связей цепочками транслирующих элементов, возможно получить выигрыш во времени на массовой обработке потока данных. Однако, в многомерном случае применение БПФ оказывается совершенно бесполезным. На примере двумерного преобразования по формулам (2б) ясно, что внешнее суммирование алгоритмом БПФ должно осуществляться параллельно по каждой строке левой решетки. Вместо правой решетки должно быть N_1 потоковых БПФ-компьютеров, в каждый из которых информация поступает через промежутки времени $N_1\tau$, необходимые для осуществления внутренних суммирований по всей k_1-й строке. Это приводит к замедлению в N_1 раз общего темпа вычислений.

3. Проблематичность параллелизма в многомерном случае

Использование модульной арифметики, где операции производятся над классами эквивалентностей в множестве целых чисел - "вычетами по модулю", позволяет свести одномерное преобразование Фурье N-точечной последовательности к "строчно-столбцовой" форме m-мерного преобразования. Для этого нужно чтобы число N было представимо в виде произведения m взаимно простых множителей. Для любого натурального N' число N_1, ближайшее целое к $\sqrt{N'}$ снизу, и число $N_2 = N_1+1$ являются взаимно простыми, причем $N'-N_1 \cdot N_2 \le \sqrt{N'}$. Значит, для любого желаемого размера N' последовательности отсчетов можно подобрать близкое значение $N =$

$= N_1 \cdot N_2$, которое позволит вычислять одномерное ДПФ как двумерное. Из (5) ясно, что многоканальный конвейер асинхронно-локальной ВС в этом случае позволит довести временну́ю сложность одномерного ДПФ до величины $(O(\sqrt{N}\log N)$.

Для аналогичного сведения к трехмерному ДПФ достаточно взять N_2, ближайшее четное к $\sqrt[3]{N'}$ и добавить $N_1 = N_2 - 1$ и $N_3 = N_2 + 1$. Тогда число $N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ будет отличаться от N' на величину порядка $(N')^{2/3}$, и время вычисления одномерного ДПФ обещает стать величиной $O(\sqrt[3]{N}\log N)$. Продолжая эту тенденцию, можно в выражении временной сложности многомерной реализации ДПФ извлекать корни все больших степеней, и подобная "оптимистическая" тенденция уже закрепилась в научной литературе. В этой связи рассмотрим сравнительно новый - геометрический - подход в численном Фурье-анализе.

Периодической (на плоскости) квадратной таблице отсчетов двумерного ДПФ сопоставляется целочисленный тор (составленный из узлов (j_1, j_2)) "примыканием" противоположных сторон квадратной $N \times N$-сетки. Прямолинейный ряд узлов плоскости переходит на торе в некоторую последовательность из N отсчетов - обмотку тора. В [6] показано, что для осуществления двумерного ДПФ достаточно вычислить одномерные ДПФ для $\sim N$ последовательностей из N производных отсчетов каждая, расположенных вдоль некоторых обмоток, которые мы будем называть основными. Для получения производных отсчетов используется ДПР - дискретный аналог известному в интегральной геометрии преобразованию Радона применительно к замкнутому двумерному многообразию - тору. Интегрирование здесь заменяется на суммирование и каждому узлу основной обмотки приписывается производный отсчет как результат сложения исходных отсчетов, лежащих на обмотке, ортогональной к основной в этом узле. Одномерное ДПФ последовательности (вдоль основной обмотки) производных отсчетов дает значения таблицы искомого двумерного ДПФ в соответствующих узлах, если основная обмотка содержит нулевой узел (0,0). Количество таких обмоток в полном покрытии дискретного тора пропорционально N, а коэффициент пропорциональности варьируется в пределах нескольких единиц в зависимости от арифметических свойств числа N. Например, когда N есть простое число, полное покрытие состоит из N+1 подходящих для ДПФ обмоток. Отсюда - для получения всей результирующей таблицы достаточно выполнить ~N одномерных ДПФ. При этом некоторые отсчеты будут вычисляться многократно. В [6] эта вычислительная избыточность преподносится как резерв алгоритма, но особенно подчеркивается его хорошая распараллеливаемость, так как вычисления на различных основных обмотках можно производить независимо.

Если говорить о параллельной реализации, то предложенный в [6] математически изящный метод не выдерживает сравнения с обычным строчно-столбцовым, где должно выполняться 2N одномерных ДПФ. Во-первых, к N ДПФ "геометрического" метода следует приплюсовать затраты на вычисление N сумм по N слагаемых для отыскания производных отсчетов на каждой основной обмотке полного покрытия, что равносильно выполнению еще N одномерных ДПФ. Во-вторых, отсчеты, с которыми нужно производить операции ДПР и ДПФ, причудливым образом рассеяны по всей таблице, что исключает применение самого эффективного распараллеливания - конвейерного. Параллельную реализацию "геометрического" алгоритма можно сравнительно легко организовать только над общей памятью прямого доступа (без секционирования) с ее неизбежной глобальностью, которая не позволяет и близко подойти к оценке (5). Что же касается экономии на вычислительной избыточности, то последнюю действительно нетрудно устранить, но при однопроцессорной реализации. При параллельном же решении проще лишний раз вычислить некоторые значения, чем передавать от процессора к процессору информацию, сигнализирующую о кратности тех или иных отсчетов.

В [7] представлено r-мерное обобщение "геометрического" метода преобразования Фурье. Построена "минимальная конгруэнция прямых для любых N и r", т.е. дан способ отыскания всех обмоток r-мерного дискретного тора, на который отображена r-мерная таблица из N^r отсчетов, подлежащая r-мерному ДПФ. Подсчитан средний (по размерностям r) коэффициент при степени N^{r-1} в выражении для количества обмоток минимального покрытия, оказавшийся равным 1.52. Отсюда, число одномерных ДПФ, необходимых для выполнения r-мерного ДПФ в соответствии с идеей "геометрического" метода, есть $1.52 \cdot N^{r-1}$. Это значение меньше, чем rN^{r-1} - количество одномерных ДПФ, выполняемых в строчно-столбцовом варианте, однако вышеназванные вычислительные недостатки глобального в сущности "геометрического" подхода только усугубятся при переходе к большим размерностям.

К сожалению, "проклятие размерности" тяготеет и над чисто локальным вариантом реализации многомерного ДПФ по формулам строчно-столбцового представления. Достижение рекордной оценки временной сложности, аналогичной (5), представляется безнадежной целью даже в случае трехмерного ДПФ

$$d(k_1,k_2,k_3) = \sum_{j_3=0}^{N_3-1}\left(\sum_{j_2=0}^{N_2-1}\left(\sum_{j_1=0}^{N_1-1} f(j_1,j_2,j_3)w_1^{j_1k_1}\right) w_2^{j_2k_2}\right) w_3^{j_3k_3}, \quad (6)$$

$$k_1 = 0,\ldots,N_1-1, \quad k_2 = 0,\ldots,N_2-1, \quad k_3 = 0,\ldots,N_3-1.$$

Действительно, по аналогии с архитектурой многоканального конвейера (см.рисунок) можно вообразить три параллелепипедные процессорные решетки, расположенные в пространстве "уголком" и связанные в трех координатных направлениях рядами процессорных и буферных элементов. Через верхнюю грань первой решетки подается трехмерная таблица отсчетов, и процессоры в $N_2 \times N_3$ вертикальных рядах осуществляют внутренние суммирования формулы (6), а затем отдают вычисленные значения своим буферам.Средние суммирования формулы ведутся в $N_1 \times N_3$ горизонтальных рядах (слева направо) второй решетки, куда значения внутренних сумм поступают по соответствующим транслирующим рядам локально соединенных буферных элементов первой решетки. Наконец, внешние суммирования формулы (6) ведутся в $N_1 \times N_2$ горизонтальных (перпендикулярно к двум рассмотренным направлениям) рядах третьей решетки, из передней грани которой через ряды выводных буферов во внешнюю среду поступают отсчеты результирующей трехмерной таблицы.

На асинхронно-локальном многоканальном конвейере процесс выполнения одного трехмерного ДПФ будет протекать за время $O(N_1+N_2+N_3)\log N)$ лишь при условии пространственной изотропности монтажа всей системы. На пути создания такой асинхронно-локальной ВС стоят два препятствия, из которых во всяком случае одно представляется непреодолимым. Первое из них связано с господствующей технологией планарного производства СБИС, достижимая слойность которых на много порядков отстает от плотности размещения элементов схем по площади чипа.

Если когда-либо будет разработана принципиально новая "объемная" технология, позволяющая уравнять плотность размещения элементов по всем трем координатам, то в полный рост встанет проблема охлаждения работающей электроники, Чтобы рассеивать выделяемое при работе электронных схем тепло, придется закладывать в объемные кристаллы теплоотводящие зазоры между тончайшими рабочими слоями, а это уже псевдотрехмерность, анизотропия, т.е. получится возврат к тому, от чего пытались уйти. Переход на криогенную технику мало что изменит: реактивное тепловыделение все равно останется, так как функционирование электронной аппаратуры сопряжено с переменными токами высоких частот.

Что касается многомерных ДПФ, то попыткам их предельного распараллеливания суждено остаться умозрениями. Естественный параллелизм,заложенный в ДПФ любой размерности, невозможно эффективно использовать более, чем на трехмерном уровне из-за геометрического ограничения, накладываемого природой. Дело в том, что при вложении r-мерной N^r-процессорной решетки в трехмерное физическое пространство при $r > 3$ неизбежно появляются глобальные соединения, так что на каждую r-мерность приходится порядка N^r глобальных связей. Увеличение времени передачи информации между процессорными элементами будет съедать весь выигрыш от распределения работы по N^r вычислителям.

Заключение

Стремление свести двумерное ДПФ к последовательности БПФ в условиях предельного распараллеливания неоправдано, так как в силу присущей последнему глобальности его однократное применение выполняется медленнее одномерного ДПФ. "Геометрический" подход к вычислению многомерного ДПФ, использующий дискретный аналог интегрального преобразования Радона тоже является существенно глобальным в параллельной реализации. При массовых параллельных вычислениях на потоках данных ставший уже классическим строчно-столбцовый вариант двумерного ДПФ оказывается вне конкуренции. При его реализации на многоканальной асинхронно-локальной ВС для NxN-таблицы отсчетов достигается минимально-возможная временная сложность задачи O(NlogN), недостижимая для систолических архитектур. В случае трехмерного ДПФ таблицы NxNxN отсчетов достижение подобной рекордной оценки вообще невозможно в силу законов теплотехники. Глубина распараллеливания многомерного ДПФ ограничена необходимостью вложения r-мерной ($r>3$) схемы межпроцессорных соединений в обычное физическое пространство.

Литература

1. НУССБАУМЕР Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. - М.: Радио и связь, 1985. - 248 с.

2. МИШИН А.И., ЛЕУС В.А. Асинхронно-локальные вычислительные системы и среды. - Новосибирск: ИМ СО РАН,1991. - 178 с.

3. ЛЕУС В.А. О распараллеливании дискретного преобразования Фурье //Математическое моделирование. - 1990. - Т.2, № 4. - С. 88-96.

4. СЕДУХИН С.Г. Систолические процессоры двумерного дискретного преобразования Фурье//Архитектура, матобеспечение и средства интеллектуализации вычислительных систем / Под ред. В.Е.Котова. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989. - С.46-65.

5. КАНЕВСКИЙ Ю.С., КОРЧЕВ Д.В. Систематическое проектирование систолических процессоров быстрого преобразования Фурье //УСиМ. - 1991. - №8. - С.31-40.

6. GERTHER I. A new efficient algorithm to compute the two-dimensional discrete Fourier transform (DFT) //IEEE Tran - sactions on Acoustic, Speech and Signal Processing. - 1988. - Vol. 36, N 7. - P. 1036-1050.

7. КЕЛЬБЕРТ М.Я., МАЗЕЛЬ А.Е. О быстром вычислении многомерного ДПФ //Проблемы передачи информации. - 1991. - Т. 27, вып. 2. - С. 107-110.

Поступила в редакцию

23 октября 1995 года