СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1995 год Выпуск 154

УДК 519.65

ИЗОГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ВЗВЕШЕННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

В.Л.Мирошниченко*)

Введение

В вычислительной практике часто возникают ситуации,когда требуется интерполировать функции,имеющие участки резкого изменения с недостаточно плотным расположением на них узлов интерполяции. В таких случаях существенными преимуществами по сравнению с традиционными кубическими сплайнами класса C^2 обладают взвешенные кубические сплайны, введенные в работе [1]. А именно, для взвешенных кубических сплайнов не характерны осцилляции, обычно возникающие при интерполяции быстроменяющихся функций с помощью кубических сплайнов класса C^2. В этом отношении свойства взвешенных кубических сплайнов напоминают свойства кубических обобщенных сплайнов (например,рациональных, с дополнительными узлами и др.) [2-5].Вообще говоря, в свете терминологии работы [2] взвешенные кубические сплайны также можно отнести к разряду обобщенных кубических сплайнов. Изучение свойств взвешенных кубических сплайнов продолжено в статьях [6,7].В

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 95-01-01655).

частности,в [6] рассмотрена конструкция, аналогичная кубическому сплайну с дополнительными узлами.

Интерполяция взвешенными кубическими сплайнами дает возможность адекватно воспроизводить качественный характер поведения функций, заданных сеточными значениями. Поэтому понятен интерес к этим сплайнам с точки зрения применения их для решения задач, связанных с обработкой картографической и геофизической информации (см., например, [8]).

В данной статье, в отличие от вариационной трактовки взвешенных кубических сплайнов [1], используется "алгебраический" подход, что позволяет, в частности, ввести в рассмотрение разнообразные краевые условия и тем самым придать большую гибкость конструкции сплайна (в [1] рассматривались только естественные граничные условия). Впервые получены оценки погрешности приближения для взвешенных кубических сплайнов. В ряде интересных, с точки зрения практических приложений, случаев они принципиально отличаются по форме от традиционных оценок для полиномиальных сплайнов. Это обстоятельство связано с тем, что оператор интерполяции взвешенными кубическими сплайнами, вообще говоря, нелинеен.

В статье изучаются также изогеометрические свойства взвешенных кубических сплайнов, которые, по-существу, предопределяют хорошие качественные характеристики интерполяции такими сплайнами. Сформулировано правило выбора параметров взвешенного кубического сплайна, обеспечивающее монотонность сплайна при интерполяции любых монотонных сеточных данных.

Как известно, большое значение для теории и приложений сплайнов имеют B-сплайны. В этой связи отметим, что в статье найдены формулы взвешенных кубических В-сплайнов.

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть в узлах сетки Δ: $a = x_0 < \ldots < x_N = b$ заданы значения f_i, $i = 0,\ldots,N$, и $w(x) \geq 0$, $w(x) \not\equiv 0$, $x \in [a,b]$.

$$w(x) = w_i, \quad x \in [x_i,x_{i+1}], \ i = 0,\ldots,N-1, \tag{1}$$

- кусочно постоянная на $[a,b]$ функция. Согласно [1] взвешенным кубическим сплайном называется функция $S(x)$, минимизирующая функционал

$$J(f) = \int_a^b w(x)[f''(x)]^2 dx \tag{2}$$

среди всех функций $f(x) \in W_2^2$, принимающих в узлах сетки Δ заданные значения $\{f_i\}$. Показано, что $S(x)$ является кубическим сплайном класса C^1 с узлами на сетке Δ. При этом $S(x)$ удовлетворяет условиям интерполяции

$$S(x_i) = f_i, \ i = 0,\ldots,N; \tag{3}$$

соотношениям

$$w_i S''(x_i+0) = w_{i-1} S''(x_i-0), \ i = 1,\ldots,N-1, \tag{4}$$

во внутренних узлах сетки Δ и естественным краевым условиям

$$S''(x_k) = 0, \ k = 0,N, \tag{5}$$

на концах отрезка $[a,b]$.

Отметим, что в [1] рассмотрен и более общий случай, когда на функцию $w(x)$ не накладываются ограничения (1). Однако при этом функционал (2) минимизируется не в пространстве W_2^2, а на множестве кубичесских сплайнов класса C^1 с узлами на сетке Δ, т.е. заранее оговаривается структура решения. По нашему мнению такой подход малосодержателен.

Из (4) ясно, что при $w_i = w_{i+1}$ сплайн $S(x)$ имеет в узле x_i непрерывную вторую производную. В частном случае, когда $w(x) = \mathrm{const}$, $x \in [a,b]$, $S(x)$ превращается в классический кубический сплайн класса C^2.

Как и всякий кубический сплайн класса C^1, взвешенный кубический сплайн на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ может быть представлен в виде

$$S(x) = f_i(1-t)^2(1+2t) + f_{i+1}t^2(3-2t) + \\ + m_i h_i t(1-t)^2 - m_{i+1}h_i t^2(1-t), \tag{6}$$

где $t = (x-x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $m_k = S'(x_k)$. Параметры m_i, $i = 0,\dots,N$, вычисляются из системы

$$2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1], \tag{7.1}$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3\lambda_i\, f[x_{i-1}, x_i] + 3\mu_i f[x_i, x_{i+1}], \tag{7.2}$$

$$i = 1,\dots,N-1,$$

$$m_{N-1} + 2m_N = 3f[x_{N-1}, x_N], \tag{7.3}$$

которая является следствием соотношений (4),(5) и отличается от аналогичной системы для кубических сплайнов класса C^2 (см.[2]) лишь формулами для коэффициентов μ_i, λ_i:

$$\mu_i = \frac{w_i h_{i-1}}{w_{i-1}h_i + w_i h_{i-1}}, \quad \lambda_i = 1-\mu_i. \tag{8}$$

Один из распространенных способов выбора параметров w_i состоит в следующем. Положим

$$w_i = [1 + (f[x_i, x_{i+1}])^2]^{-3}, \ i = 0,\dots,N-1. \tag{9}$$

В этом случае функционал (2) представляет собой аппроксимацию интеграла от квадрата кривизны графика функции $f(x)$. В результате, как нетрудно видеть, взвешенный кубический сплайн с весами (9) автоматически учитывает особенности поведения данных $\{f_i\}$. Именно этим обстоятельством объясняется высокое качество интерполяции взвешенными кубическими сплайнами с параметрами (9) данных, имеющих участки резкого изменения.

Кроме формулы (9), для выбора параметров w_i можно использовать более общее соотношение

$$w_i = [1 + (f[x_i,x_{i+1}])^2]^{-n}, \quad i = 0,\dots,N-1, \tag{10}$$

где $n = 0,1,\dots$ При $n=0$ получаем кубический сплайн класса C^2. Некоторые рекомендации по выбору числа n будут даны ниже при рассмотрении изогеометрических свойств взвешенных кубических сплайнов.

В отличие от приведенного выше вариационного определения сплайна мы примем следующее "алгебраическое"

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Взвешенным кубическим сплайном называется функция $S(x) \in C^1[a,b]$, которая является кубическим полиномом на каждом из отрезков $[x_i,x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,N-1$; удовлетворяет условиям интерполяции (3), соотношениям (4) при заданных коэффициентах $w_i > 0$, $i = 0,\dots,N-1$, и краевым условиям одного из типов:

I. $S'(x_k) = f'_k, \quad k = 0,N;$

II. $S''(x_k) = f''_k, \quad k = 0,N;$

III. $S^{(r)}(x_0) = S^{(r)}(x_N), \quad r = 0,1;$

$$w_0S''(x_0+0) = w_{N-1}S''(x_N-0);$$

IV. $S'''(x_k+0) = S'''(x_k-0)$, $k = 1,N-1$;

$w_0 = w_1$, $w_{N-1} = w_{N-2}$.

Данное определение вполне аналогично определению кубического сплайна класса C^2 [2]. Условия типа Ш (периодические краевые условия) естественно использовать для интерполяции периодических функций. Краевые условия типа IV также, как и для сплайнов класса C^2, следует применять в тех случаях, когда использование условий типов I,П затруднено из-за отсутствия информации о производных интерполируемой функции на концах отрезка $[a,b]$.

Системы уравнений относительно параметров m_i, $i=0,\dots,N$, для всех указанных типов краевых условий по внешнему виду полностью совпадают с аналогичными системами (см. [2]) кубических сплайнов класса C^2, если они записаны в терминах величин μ_i', λ_i.

Заметим, что множество взвешенных кубических сплайнов, удовлетворяющих "алгебраическому" определению существенно шире множества сплайнов, порождаемых вариационной формулировкой.

Для анализа взвешенных кубических сплайнов может быть использован весь богатый математический аппарат, используемый в теории кубических сплайнов [2]. Очевидно, для всех типов краевых условий I-IV справедливы теоремы о существовании и единственности соответствующих взвешенных кубических сплайнов.

При "алгебраическом" подходе к понятию взвешенного кубического сплайна его вариационные свойства могут быть выведены из определения сплайна. Формулировки соответствующих результатов аналогичны формулировкам для кубических сплайнов класса C^2 (см.[2]).

Например, среди всех функций $f(x) \in W_2^2$, интерполирующих значения $\{f_i\}$ на сетке Δ, таких, что $f'(a) = f_0'$, $f'(b) = f_N'$, где f_0', f_N' – заданные числа, взвешенный кубический сплайн с краевыми условиями типа I минимизирует функционал (2).

1. Оценки погрешности аппроксимации

Обозначим через W_∞^r класс функций $f(x)$ таких, что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и $f^{(r)} \in L_\infty [a,b]$. В этом разделе мы докажем два результата о погрешности приближения взвешенными кубическими сплайнами. Один из них (теорема 1) характеризует точность приближения функций из класса W_∞^2 при произвольных значениях параметров w_i, входящих в соотношения (4). При этом точность приближения функции равна $O(H^2)$, где $H = \max\limits_i \{h_i\}$, т.е. по отношению к максимальному шагу сетки имеем второй порядок точности на любой неравномерной сетке. Этот порядок не улучшается при увеличении гладкости интерполируемой функции. Однако при специальном выборе параметров w_i, в частности, по формуле (9), порядок точности увеличивается (теорема 2). Доказательство теорем 1,2 выполняется методом, разработанном в [2] для кубических сплайнов класса C^2. Мы формулируем результаты только для сплайнов с краевыми условиями типов I–III. Аналогичные утверждения могут быть получены также для краевых условий типа IV, но они носят более громоздкий характер.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть взвешенный кубический сплайн* $S(x)$ *с параметрами* $w_i > 0$, $i = 0,\dots,N-1$, *интерполирует на сетке* Δ *значения* $f_i = f(x_i)$, $i = 0,\dots,N$, *функции*

$f(x) \in W^2_\infty$ *и удовлетворяет краевым условиям одного из типов* I,III *или естественным краевым условиям* (5). *Тогда справедливы оценки*

$$\|S^{(r)} - f^{(r)}\|_C \le K_r H^{2-r} \| f''\|_\infty, \qquad r = 0,1; \qquad (11)$$

где $K_0 = 13/48$, $K_1 = 0{,}86229$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, заметим, что постоянные K_r в (11) совпадают с постоянными в аналогичных оценках для кубических сплайнов класса C^2 (см.[2]). Кстати, в [2] случай естественных краевых условий не рассматривался.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_3(x)$ - кубический эрмитов сплайн, удовлетворяющий условиям $S_3(x_i) = f_i$, $S_3'(x_i) = f_i' = f'(x_i)$, $i = 0,\dots,N$. Имеем

$$|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)| \le |S_3^{(r)}(x)-S^{(r)}(x)| + $$
$$+ |S_3^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|, \qquad (12)$$
$$r = 0,1.$$

Оценки второго слагаемого в правой части этого неравенства известны [2]. При $x \in [x_i,x_{i+1}]$ сплайн $S_3(x)$ может быть записан в виде (6) (надо только величины m_i, m_{i+1} заменить на f_i', f_{i+1}'). Поэтому для $x \in [x_i,x_{i+1}]$ имеем

$$|S(x) - S_3(x)| \le h_i t(1-t)q \le Hq/4, \qquad (13)$$

где $q = \max\limits_i |q_i|$, $q_i = m_i - f_i'$;

$$|S'(x)-S_3'(x)| \le \{(1-t)|1-3t| + t|2-3t|\}q. \qquad (14)$$

Получим оценку для величины q. Будем предполагать, что $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям типа I (естественные краевые условия и условия типа III рассматриваются аналогично). В этом случае система уравнений для m_i состоит из уравнений (7.2), дополненных равенствами $m_o = f'_o$, $m_N = f'_N$. Учитывая, что $m_i = q_i + f'_i$, имеем

$$\left.\begin{aligned} & q_o = 0, \\ & \lambda_i q_{i-1} + 2q_i + \mu_i q_{i+1} = c_i, \qquad i = 1,\dots,N-1, \\ & q_N = 0, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где $c_i = 3\lambda_i f[x_{i-1},x_i] + 3\mu_i f[x_i,x_{i+1}] - \lambda_i f'_{i-1} - 2f'_i - \mu_i f'_{i+1}$.
Используя для величин f_i, f_{i+1}, f'_i, f'_{i+1} формулу Тейлора с остаточным членом в интегральном виде, находим

$$c_i = \mu_i h_i \int_0^1 (2-3\tau) f''(x_i + \tau h_i)d\tau +$$

$$+ \lambda_i h_{i-1} \int_0^1 (1-3\tau) f''(x_{i-1} + \tau h_{i-1})d\tau .$$

Отсюда

$$|c_i| \le \|f''\|_\infty \{ \mu_i h_i \int_0^1 |2-3\tau| d\tau + \lambda_i h_{i-1} \int_0^1 |1-3\tau| d\tau \} =$$

$$= \frac{5}{6} \|f''\|_\infty \{\mu_i h_i + \lambda_i h_{i-1}\} \le \frac{5}{6} H \|f''\|_\infty .$$

Используя известный результат об оценке решения системы, матрица которой с диагональным преобладанием [2], из (15) находим $|q_i| \le \max_i |c_i|$ и, следовательно,

$$q \le \frac{5}{6} H \|f''\|_\infty . \tag{16}$$

Оценка (16) в точности совпадает с оценкой величины q для кубического сплайна класса C^2 (см. [2]). Теперь становится очевидным, что из соотношений (12)-(14), (16) вытекает утверждение теоремы, так как дальнейшие выкладки для взвешенных кубических и C^2 сплайнов полностью тождественны.

Порядок приближения, гарантируемый оценкой (11), является предельным для сплайнов с естественными краевыми условиями. Однако для других типов краевых условий он может быть повышен при специальных способах выбора параметров w_i и большей гладкости интерполируемой функции.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть взвешенный кубический сплайн* $S(x)$ *с параметрами* w_i, $i = 0,\dots,N-1$, *определенными формулами* (9) *интерполирует на сетке* Δ *значения* $f_i = f(x_i)$, $i = 0,\dots,N$, *функции* $f(x) \in W^4_\infty$ *и удовлетворяет краевым условиям одного из типов* I-III. *Тогда справедливы оценки*

$$\|S^{(r)}-f^{(r)}\|_C \le K_r H^{4-r}\, \|f^{IV}\|_\infty +$$

$$+ \tilde{K}_r H^{3-r}\, \|f''\|^2_C \min\,\{1, 2\,\|f'\|_C\}, \quad r=0,1, \tag{17}$$

где $K_0 = 5/384$, $K_1 = 1/24$, $\tilde{K}_0 = 3/16$, $\tilde{K}_1 = 3/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема доказательства такая же, как в теореме 1. Ключевым моментом является вывод оценки для величины q. Отличие заключается в том, что здесь уже приходится учитывать конкретный вид (8) коэффициентов λ_i, μ_i в выражении для c_i. По формуле Тейлора имеем

$$c_i = \frac{1}{2} h_{i-1} h_i f''_i \, \frac{w_i - w_{i-1}}{w_{i-1}h_i + w_i h_{i-1}} + r_i, \tag{18}$$

где

$$r_i = -\frac{1}{2}\mu_i h_i^3 \int_0^1 \tau(1-\tau)^2 f^{IV}(x_i + \tau h_i)d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_i h_{i-1}^3 \int_0^1 \tau^2(1-\tau) f^{IV}(x_{i-1} + \tau h_{i-1})d\tau .$$

Очевидно

$$|r_i| \le \frac{1}{24}\|f^{IV}\|_\infty \{\mu_i h_i^3 + \lambda_i h_{i-1}^3\} \le \frac{1}{24}H^3 \|f^{IV}\|_\infty . \qquad (19)$$

Обозначим $\alpha_j = f[x_j, x_{j+1}]$. Учитывая формулы (9), находим

$$\frac{w_i - w_{i-1}}{w_{i-1}h_i + w_i h_{i-1}} = \frac{(1+\alpha_{i-1}^2)^3 - (1+\alpha_i^2)^3}{h_i(1+\alpha_i^2)^3 + h_{i-1}(1+\alpha_{i-1}^2)^3} =$$

$$= (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(\alpha_{i+1} + \alpha_i)\, \Phi(\alpha_{i-1},\alpha_i)/\varphi(\alpha_{i-1},\alpha_i), \qquad (20)$$

где

$$\Phi(\alpha_{i-1},\alpha_i) = (1+\alpha_{i-1}^2)^2 + (1+\alpha_{i-1}^2)(1+\alpha_i^2) + (1+\alpha_i^2)^2,$$

$$\varphi(\alpha_{i-1},\alpha_i) = h_i(1+\alpha_i^2)^3 + h_{i-1}(1+\alpha_{i-1}^2)^3.$$

Далее

$$\alpha_{i-1} - \alpha_i = f[x_{i-1}, x_i] - f[x_i, x_{i+1}] =$$

$$= -(h_{i-1} + h_i) f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] .$$

Следовательно

$$\alpha_{i-1} - \alpha_i = -(h_{i-1} + h_i) f''(\xi)/2, \ \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]. \qquad (21)$$

Из (18), (20), (21) получаем

$$c_i = -\frac{1}{4} h_{i-1} h_i (h_{i-1} + h_i) f_i'' f''(\xi) \cdot \Phi(\alpha_{i-1}, \alpha_i) / \varphi(\alpha_{i-1}, \alpha_i) + $$
$$+ r_i. \qquad (22)$$

Покажем, что

$$h_{i-1} h_i (h_{i-1} + h_i) / \varphi(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \le 2H^2 / [(1+\alpha_i^2)^3 + (1+\alpha_{i-1}^2)^3].$$

В самом деле, пусть для определенности $h_{i-1} \le h_i$, т.е. $h_{i-1} = \nu h_i$, $\nu \le 1$. Тогда

$$h_{i-1} h_i (h_{i-1} + h_i) / \varphi(\alpha_{i-1}, \alpha_i) = \frac{\nu(1+\nu) h_i^2}{(1+\alpha_i^2)^3 + \nu(1+\alpha_{i-1}^2)^3}.$$

Так как производная по ν от правой части этого равенства положительна, то максимум ее достигается при $\nu = 1$, что и дает требуемое неравенство. Поэтому из (22) следует оценка

$$|c_i| \le \frac{1}{2} H^2 \|f''\|_C^2 (|\alpha_{i-1}| +$$
$$+ |\alpha_i|) \, \Phi(\alpha_{i-1}, \alpha_i) / \tilde{\varphi}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) + |r_i|, \qquad (23)$$

где $\tilde{\varphi}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) = (1 + \alpha_i^2)^3 + (1 + \alpha_{i-1}^2)^3$. Несложно убедиться в том, что

$$\Phi(\alpha_{i-1}, \alpha_i) / \tilde{\varphi}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \le 3/2. \qquad (24)$$

Действительно, (24) следует из легко проверяемого неравенства $3\tilde{\varphi}(\alpha_{i-1}, \alpha_i) - 2\Phi(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \ge 0$.

Кроме того, можно показать, что максимум выражения $(|\alpha_{i-1}| + |\alpha_i|) \, \Phi(\alpha_{i-1}, \alpha_i) / \tilde{\varphi}(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ достигается при $|\alpha_{i-1}| = |\alpha_i|$, когда оно равно $3|\alpha_i| / (1 + \alpha_i^2)$ и не превосходит 3/2. Принимая во внимание этот результат и оценку (24), а также учитывая, что $\alpha_j = f'(\eta_j)$, $\eta_j \in [x_j, x_{j+1}]$, из (23) имеем

$$|c_i| \le \beta H^2 + |r_i|, \tag{25}$$

где $\beta = \frac{3}{4}\|f''\|_C^2 \min\{1, 2\|f'\|_C\}$. Теперь из (15), (19) и (25) получаем оценку

$$q \le \beta H^2 + \frac{1}{24} H^3 \|f^{IV}\|_\infty . \tag{26}$$

Так как $|S_3(x) - f(x)| \le H^4 \|f^{IV}\|_\infty/384$, (см. [2]), то из (12), (13) и (26) вытекает утверждение теоремы при $r = 0$.

Из (14) при $t \in [0,1/3]$ имеем $|S'(x) - S_3'(x)| \le (1-2t)q$. Учитывая, кроме того, оценку для $|S_3'(x) - f'(x)|$ при $t \in [0,1/3]$ (см. [2]), из (12) получаем

$$|S'(x) - f'(x)| \le (1-2t)\{\beta H^2 + \frac{1}{24}[1+2t(1-t)]H^3 \|f^{IV}\|_\infty \},$$
$$t \in [0,1/3] .$$

Правая часть этого неравенства максимальна при $t = 0$. Поэтому

$$|S'(x) - f'(x)| \le \beta H^2 + H^3 \|f^{IV}\|_\infty/24, \quad t \in [0,1/3]. \tag{27}$$

При $t \in [1/3, 1/2]$ из (14) имеем $|S_3'(x) - S'(x)| \le$ $\le [-1 + 6t(1-t)]q$. Принимая во внимание также оценку для $|S_3'(x) - f'(x)|$ из [2] при $t \in [1/3,1/2]$, получаем

$$|S'(x) - f'(x)| \le [-1+6t(1-t)]\beta H^2 + \gamma, \quad t \in [1/3,1/2], \tag{28}$$

где

$$\gamma = \frac{H^3}{24}\left\{-1+4t(1-t)(2-t) + \frac{(1-t)(1-3t)^4}{4t^3}\right\}\|f^{IV}\|_\infty .$$

Величина γ представляет собой не что иное, как оценку приближения производной $f'(x)$ кубическим сплайном класса C^2 в точке $x = x_i + th_i$ и не превосходит

$H^3 \|f^{IV}\|_\infty /24$ [2]. Поэтому из (28) вытекает оценка

$$|S'(x) - f'(x)| \le \beta H^2/2 + H^3 \|f^{IV}\|_\infty/24, \quad t \in [1/3,1/2]. \quad (29)$$

По соображениям симметрии оценки для $t\in [1/2,2/3]$, $t\in \in [2/3, 1]$ будут совпадать соответственно с оценками (29),(27). В итоге, из (27),(29) получаем утверждение теоремы при $r = 1$. Теорема 2 доказана полностью.

Главным членом в правой части (17) является второе слагаемое и именно оно отличает эти оценки от аналогичных результатов для сплайнов класса C^2 (см. [2]). Поэтому при интерполяции достаточно гладких функций и малых H взвешенный кубический сплайн всегда будет уступать по точности приближения сплайну класса C^2.

Из оценок (17) видно, что взвешенный кубический сплайн с параметрами (9) не восстанавливает много - член второй степени при интерполяции его сеточных значений и все же обеспечивает третий порядок приб - лижения достаточно гладких функций. В этом проявля - ется нелинейность конструкции взвешенного кубического сплайна. Линейный метод приближения, не восстанавливающий многочлен второй степени, не может иметь порядок точности выше второго.

Теорема 2 сформулирована для взвешенных кубиче - ских сплайнов с параметрами, определенными выражениями (9). Аналогичные результаты можно получить и для более общего способа задания параметров по формулам (10). При этом изменяются только значения постоянных $\tilde{K}_r$ в оценках (17).

В качестве иллюстрации полученных результатов приведем данные об интерполяции функций $f_1(x) = \exp(x)$, $f_2(x) = \exp(-10x)$, $f_3(x) = \sin(\pi x)$, $f_4(x) = [1+100*(x-1/2)^2]^{-1}$

Т а б л и ц а 1

Погрешность приближения f (x) взвешенным кубическим сплайном

h	Краевые условия	1	2	3	4
.1	I	.00019	.012	.0030	.011
	П	.00027	.017	.0030	.011
	IV	.00025	.015	.0030	.011
	П°	.0010	.024	.0030	.011
.05	I	$2.6\cdot10^{-5}$	.0040	.0004	.0034
	П	$3.8\cdot10^{-5}$	.0053	.0004	.0034
	IV	$3.6\cdot10^{-5}$	.0040	.0004	.0034
	П°	$2.9\cdot10^{-4}$	.0055	.0004	.0034

Т а б л и ц а 2

Погрешность приближения f'(x) взвешенным кубическим сплайном

h	Краевые условия	1	2	3	4
.1	I	.0013	.72	.20	.92
	П	.0014	.72	.20	.92
	IV	.0013	.94	.20	.93
	П°	.0068	2.0	.20	.92
.05	I	.0035	.53	.056	.40
	П	.0040	.53	.056	.40
	IV	.0038	.45	.056	.40
	П°	.036	.98	.056	.40

взвешенным кубическим сплайном S(x) с различными краевыми условиями. Для построения сплайна использовалась равномерная сетка на отрезке [0,1] с шагом h; параметры w_i определялись по формулам (9). В табл.1-3 приведены значения величин

$$\max_{x\in\bar{\Delta}} |S^{(r)}(x) - f_j^{(r)}(x)|, \quad r = 0,1,2,$$

Т а б л и ц а 3

Погрешность приближения $f''(x)$ взвешенным кубическим сплайном

h	Краевые условия	1	2	3	4
.1	I	.56	29.	9.5	87.
	П	.60	29.	9.5	87.
	IV	.65	38.	9.5	87.
	$П^0$	2.7	100.	9.5	87.
.05	I	.31	45.	6.3	59.
	П	.34	45.	6.3	59.
	IV	.39	30.	6.3	59.
	$П^0$	2.7	100.	6.3	59.

Т а б л и ц а 4

Погрешность приближения $f(x)$ кубическим сплайном класса C^2

h	Краевые условия	1	2	3	4
.1	I	$7.0\cdot10^{-7}$	.0020	$2.6\cdot10^{-5}$	.022
	П	$1.7\cdot10^{-6}$	.0049	$2.6\cdot10^{-5}$	.022
	IV	$6.9\cdot10^{-6}$	.010	$8.7\cdot10^{-5}$	.022
	$П^0$	$1.3\cdot10^{-3}$	.044	$2.6\cdot10^{-5}$	.022
.05	I	$4.4\cdot10^{-8}$	$1.5\cdot10^{-4}$	$1.6\cdot10^{-6}$	.0032
	П	$1.1\cdot10^{-7}$	$3.6\cdot10^{-4}$	$1.6\cdot10^{-6}$	.0032
	IV	$4.5\cdot10^{-7}$	$1.1\cdot10^{-3}$	$2.8\cdot10^{-6}$	.0032
	$П^0$	$3.3\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-2}$	$1.6\cdot10^{-6}$	.0032

где $\bar{\Delta}$ - равномерная сетка на $[0,1]$ с шагом $h/10$. В столбцах, помеченных цифрами 1,2,3,4 указаны данные, относящиеся соответственно к функциям f_1, f_2, f_3, f_4. Символом $П^0$ обозначены естественные краевые условия. Для сравнения в табл.4-6 представлены данные об интерполяции тех же функций кубическим сплайном класса C^2.

Таблица 5

Погрешность приближения $f'(x)$ кубическим сплайном класса C^2

h	Краевые условия	1	2	3	4
.1	I	$2.1\cdot10^{-5}$	.06	$7.8\cdot10^{-4}$	.76
	II	$6.4\cdot10^{-5}$	.18	$7.8\cdot10^{-4}$	.76
	IV	$4.4\cdot10^{-4}$	.71	$5.2\cdot10^{-3}$	.76
	Π^{o}	$7.8\cdot10^{-2}$	2.7	$7.8\cdot10^{-4}$	.76
.05	I	$2.7\cdot10^{-6}$	.009	$9.8\cdot10^{-5}$	.20
	II	$8.1\cdot10^{-6}$	.026	$9.8\cdot10^{-5}$	.20
	IV	$5.8\cdot10^{-5}$	.14	$3.3\cdot10^{-4}$	.20
	Π^{o}	$3.9\cdot10^{-2}$	1.4	$9.8\cdot10^{-5}$	.20

Таблица 6

Погрешность приближения $f''(x)$ кубическим сплайном класса C^2

h	Краевые условия	1	2	3	4
.1	I	.0022	6.3	.081	37.
	II	.0027	5.6	.081	37.
	IV	.018	31.	.19	37.
	Π^{o}	2.7	100.	.081	37.
.05	I	.00056	1.8	.020	31.
	II	.00069	1.8	.020	31.
	IV	.0046	11.	.024	31.
	Π^{o}	2.7	100.	.020	31.

Нетрудно видеть, что взвешенные кубические сплайны могут конкурировать с кубическими сплайнами класса C^2 по точности приближения только в тех случаях, когда на участках резкого изменения функции узлы интерполяции расположены сравнительно редко (функции f_2 и f_4).

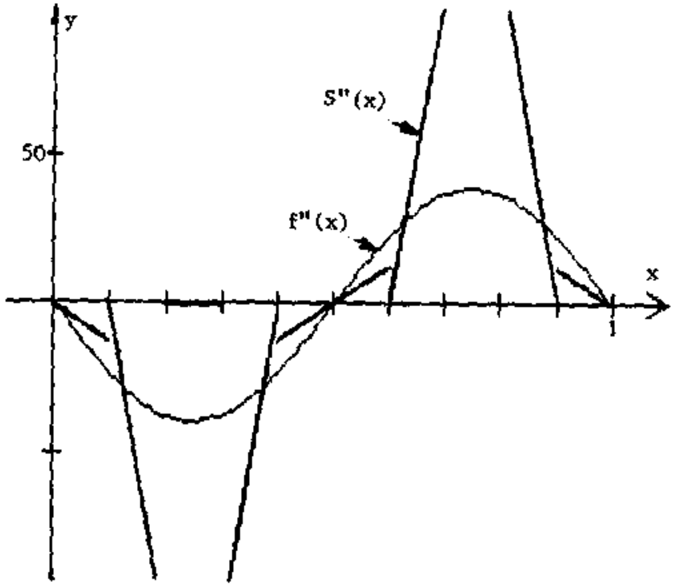

Рис.1. График S"(x) при h = 1/10.

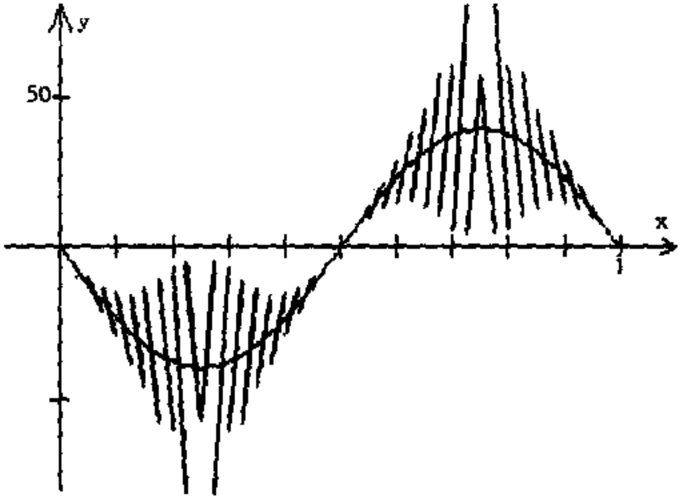

Рис.2. График S"(x) при h = 1/40.

Обращает на себя внимание очень плохая точность приближения второй производной функции с помощью взвешенного кубического сплайна (табл.3). Не вдаваясь в анализ причин этого явления, приведем два рисунка, на которых изображены характерные графики второй производной взвешенного кубического сплайна, интерполирующего периодическую функцию $\sin(2\pi x)$, $x \in$ $\in [0,1]$, на равномерной сетке с шагом 1/10 (рис.1) и 1/40 (рис.2). Именно из-за плохой точности приближения второй производной мы не стали заниматься выводом соответствующих оценок.

2. Изогеометрические свойства

Характер поведения сплайна на редкой сетке тесно связан с его изогеометрическими свойствами (способностью сохранять монотонность и выпуклость интерполируемых данных).

Пусть значения f_i, заданные в узлах сетки Δ монотонно возрастают, т.е. $f[x_i,x_{i+1}] > 0$, $i = 0,\ldots,N-1$. Выясним условия, при выполнении которых взвешенный кубический сплайн $S(x)$, интерполирующий эти монотонные данные, будет монотонно возрастающей функцией на промежутке $[a,b]$.

Мы рассматриваем монотонно возрастающие данные только по соображениям определенности. Изменения, которые надо внести в формулировки результатов для случая монотонно убывающих данных тривиальны.

Вопрос о монотонности кубических сплайнов класса C^2 изучался в работах [4,9], где были найдены достаточные условия, обеспечивающие их монотонность. Заметим, что вывод этих условий опирается на исследование свойств системы относительно узловых значений первой производной сплайна - m_i и, что очень важно для нас, при этом смысл ее коэффициентов μ_i, λ_i не играет никакой роли - по ходу рассуждений использу - ются только соотношения: $\mu_i > 0$, $\lambda_i > 0$, $\mu_i + \lambda_i = 1$. Но, как уже отмечалось выше, система для величин $m_i = S'(x_i)$, $i = 0,\ldots,N$, если она записана в терминах μ_i, λ_i, в случае взвешенного кубического сплайна совпадает с аналогичной системой для кубических сплайнов класса C^2. Это обстоятельство позволяет буквально перенести формулировки результатов о достаточных условиях монотонности кубических сплайнов [9] на слу - чай взвешенных кубических сплайнов. В частности,справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Пусть данные* $\{f_i\}$ *монотонные. Взвешенный кубический сплайн* $S(x)$*, интерполирующий значения* $\{f_i\}$ *на сетке* Δ *с краевыми условиями типа* I*, будет монотонен на* $[a,b]$*, если выполнены условия:*

$$0 \le f'_0 \le 3f[x_0,x_1], \quad 0 \le f'_N \le 3f[x_{N-1},x_N], \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} (1+\mu_i)f[x_{i-1},x_i] &\ge \mu_i f[x_i,x_{i+1}], \\ (1+\lambda_i)f[x_i,x_{i+1}] &\ge \lambda_i f[x_{i-1},x_i], \end{aligned}\right\} \; i = 1,\ldots,N-1, \tag{31}$$

где величины μ_i, λ_i определены формулами (8).

Неравенства (30) представляют собой ограничения на первые производные (наклоны) сплайна на концах отрезка $[a,b]$. Они вполне естественны.

Замечательные свойства взвешенных кубических сплайнов во многом объясняются соотношениями (31). В самом деле, с учетом формул (8), их можно привести к виду

$$\frac{w_{i-1}}{w_i}\frac{h_i}{h_{i-1}} \geq \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} - 2, \qquad \frac{w_i}{w_{i-1}}\frac{h_{i-1}}{h_i} \geq \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} - 2, \tag{32}$$

$$i = 1,\ldots,N-1,$$

где для краткости обозначено $\alpha_j = f[x_j,x_{j+1}]$, $j = 0,\ldots$ $\ldots,N-1$. Отсюда сразу ясно, что выбором множителя w_{i-1}/w_i можно существенно ослабить требования к данным $\{f_i\}$, достаточные для монотонности взвешенного сплайна, по сравнению со случаем кубического сплайна класса C^2, где $w_{i-1}/w_i = 1$ [9]. Рассмотрим с этой точки зрения популярный способ выбора параметров по формуле (9).

Во-первых, заметим, что для каждого i одно из неравенств (32) заведомо выполняется. Например, пусть для определенности $\alpha_i > \alpha_{i-1}$ (вообще говоря, можно предполагать $\alpha_i > 2\alpha_{i-1}$). Тогда второе из неравенств (32) выполнено, а первое принимает следующий вид

$$\frac{(1 + \alpha_i)^3}{(1+\alpha_{i-1}^2)^3}\frac{h_i}{h_{i-1}} \geq \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} - 2. \tag{33}$$

Отсюда видно, что условие $\alpha_i > \alpha_{i-1}$, вообще говоря, "способствует" выполнению условий монотонности сплайна.

Рассмотрим частный случай, когда сетка Δ равномерная. Тогда неравенство (33) упрощается

$$\frac{(1 + \alpha_i^2)^3}{(1 + \alpha_{i-1}^2)^3} \geq \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} - 2 \tag{34}$$

Далее, будем считать, что $\alpha_j \geq 1$, $j = 0,\ldots,N-1$. Этого всегда можно добиться путем простейшего преобразования системы координат (сжатия по оси x или растяжения по оси y). При этом предположении (34) заведомо выполняется, если имеет место неравенство $(1+\alpha_i^2)/(1+\alpha_{i-1}^2) \geq \alpha_i/\alpha_{i-1} - 2$, эквивалентное условию

$$(1+\alpha_i^2)\alpha_{i-1} - \alpha_i(1+\alpha_{i-1}^2) + 2\alpha_{i-1}(1+\alpha_{i-1}^2) \geq 0. \qquad (35)$$

Минимум левой части (35) по переменной α_i достигается при $\alpha_i = (\alpha_{i-1} + \alpha_{i-1}^{-1})/2$ и равен

$$\alpha_{i-1} + (1+\alpha_{i-1}^2)(7\alpha_{i-1} - \alpha_{i-1}^{-1})/4 > 0.$$

Таким образом, мы показали, что неравенство (34) вывыполняется, а следовательно, задание параметров w_i по формуле (9) обеспечивает монотонность взвешенного кубического сплайна при сделанных упрощающих предположениях. На самом деле, как легко видеть, это утверждение доказано в более общем случае, а именно, оно имеет место при выборе параметров w_i по формулам (10) при всех $n>0$.

В реальных практических ситуациях монотонность взвешенного кубического сплайна с параметрами (9) может нарушаться, во-первых, из-за проблем, возникающих при выполнении преобразования системы координат в случае, когда величины α_j сильно отличаются друг от друга и среди них имеются очень близкие к нулю; во-вторых, когда сетка Δ очень неравномерна. В этой связи заметим, что выбором параметров w_i по формулам (10) с достаточно большим n, всегда можно добиться выполнения условий монотонности сплайна (32) для любых монотонных данных.

Взвешенные кубические сплайны с параметрами (9), (10) в некоторых случаях страдают "эстетическим" дефектом, а именно, кривые, описываемые такими сплайнами могут иметь угловатый вид. От этого недостатка помогает избавиться следующий алгоритм выбора параметров w_i.

Будем выбирать параметры w_i непосредственно из условий монотонности сплайна (32) рекуррентным образом. Пусть параметр w_{i-1} известен. Тогда, если неравенства (32) выполняются при $w_i = w_{i-1}$, то считаем $w_i = w_{i-1}$; в противном случае вычисляем величину w_i из того из неравенств (32), которое нарушается при $w_i = w_{i-1}$, заменив в нем знак неравенства знаком равенства. Начав процедуру выбора параметров, например, с $w_o = 1$ легко определить весь набор $\{w_i\}$, обеспечивающий монотонность взвешенного кубического сплайна при любых монотонных данных.

Важным свойством предложенного алгоритма выбора параметров взвешенного кубического сплайна является то, что на участках плавного изменения функции взвешенный сплайн будет иметь две непрерывные производные, сохраняя при этом все достонства, присущие кубическому сплайну класса C^2. Разрыв второй производной реально проявляется лишь в тех узлах сетки Δ, где он необходим из-за резкого изменения характера поведения функции. Естественно, при использовании формул (9),(10) разрыв второй производной сплайна имеется, вообще говоря, во всех узлах сетки.

Отметим, что при построении монотонных сплайнов полезными оказываются естественные краевые условия, так как при этом в качестве достаточных условий монотонности сплайна фигурируют только неравенства (31) [9].

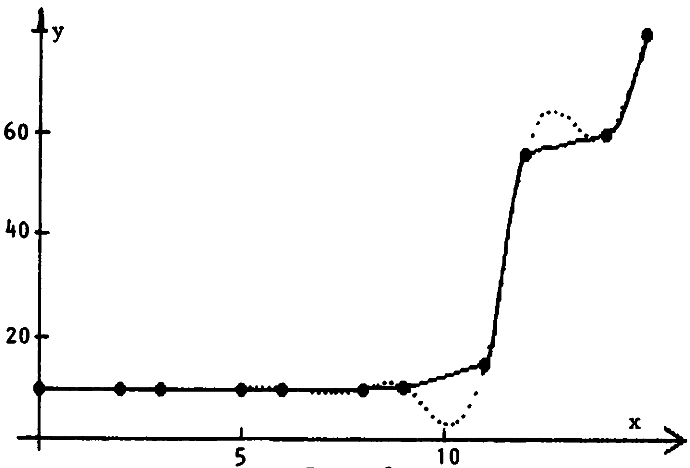

Рис. 3

В заключение приведем пример интерполяции взвешенным кубическим сплайном с естественными краевыми условиями и параметрами (9) монотонных данных из работы [10] (см.также [11]). На рис.3 сплошной линией изображен график взвешенного кубического сплайна; пунктиром – график кубического сплайна класса C^2. Для наглядности выделены узлы интерполяции.

3. Взвешенные кубические B-сплайны

Пусть задан набор параметров w_i, $i = 0,\ldots, N-1$, взвешенного кубического сплайна. Дополним сетку Δ узлами x_{-j}, x_{N+j}, $j = 1,2,3$, такими, что $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0$, $x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}$. В остальном эти узлы могут быть произвольными, лишь в периодическом случае следует дополнительно наложить ограничения $h_{N+j} = h_j$.

Взвешенный кубический сплайн $B_i(x)$, $i = -1,0,\ldots,N+1$, называется взвешенным кубическим B-сплайном, если $B(x) \not\equiv 0$ при $x \in (x_{i-2}, x_{i+2})$ и $B_i(x) \equiv 0$ при $x \notin (x_{i-2},$

$x_{i+2})$, т.е. $B_i(x)$ - это финитная функция с носителем $[x_{i-2},x_{i+2}]$.

В-сплайны $B_i(x)$ называются нормализованными, если выполнено соотношение

$$\sum_{i=-1}^{N+1} B_i(x) \equiv 1, \ x \in [a,b]. \qquad (36)$$

Нашей целью является построение нормализованных В-сплайнов на любой сетке и при произвольных параметрах $\{w_i\}$. Для вывода формул взвешенных кубических В-сплайнов мы применим метод, разработанный в [2] для кубических сплайнов класса C^2. Однако, в отличие от [2], где использовалась система относительно узловых значений второй производной сплайна, наш алгоритм основан на системах относительно величин m_i.

Обозначим $b_j = B_i(x_j)$, $m_j = B'_i(x_j)$. Из условий $B_i(x) \in C^1$, $B_i(x) \equiv 0$ при $x \le x_{i-2}$, $x \ge x_{i+2}$ ясно, что

$$b_j = m_j = 0, \quad j \le i-2, \quad j \ge i+2. \qquad (37)$$

Поэтому достаточно найти b_j, m_j, $j=i-1,i,i+1$, после чего на каждом отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ В-сплайн $B_i(x)$ определяется формулами (6). Из соотношений (7.2) имеем

$$\lambda_j m_{j-1} + 2m_j + \mu_j m_{j+1} = 3\mu_j \frac{b_{j+1} - b_j}{h_j} + 3\lambda_j \frac{b_j - b_{j-1}}{h_{j-1}}, \qquad (38)$$

$$j = i-1, i, i+1.$$

Так как $B''_i(x_{i-2}-0) = 0$, , то из (4) имеем $B''_i(x_{i-2}+0)=0$. Из (6) находим

$$B''_i(x_{i-2}+0) = 6(b_{i-1} - b_{i-2})/h^2_{i-2} - (4m_{i-2} + 2m_{i-1})/h_{i-2}.$$

Отсюда, учитывая (37), получаем

$$h_{i-2}m_{i-1} = 3b_{i-1}. \tag{39}$$

Аналогично

$$h_{i+1}m_{i+1} = -3b_{i+1}. \tag{40}$$

Исключая с помощью соотношений (39), (40) неизвестные b_{i-1}, b_{i+1} из (38), а также принимая во внимание равенства (37), приходим к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\left[1+\mu_{i-1}\left(1+\frac{h_{i-2}}{h_{i-1}}\right)\right]m_{i-1}+\mu_{i-1}m_i = 3\mu_{i-1}\cdot\frac{b_i}{h_{i-1}},\\
&\lambda_i\left(1+\frac{h_{i-2}}{h_{i-1}}\right)m_{i-1}+2m_i+\mu_i\left(1+\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)m_{i+1} =\\
&\qquad\qquad = 3b_i\left(\frac{\lambda_i}{h_{i-1}}-\frac{\mu_i}{h_i}\right),\\
&\lambda_{i+1}m_i+\left[1+\lambda_{i+1}\left(1+\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)\right]m_{i+1} = -3\lambda_{i+1}\cdot\frac{b_i}{h_i}.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Определитель этой системы

$$D = \left[1+\mu_{i-1}\left(1+\frac{h_{i-2}}{h_{i-1}}\right)\right]\left[1+\lambda_{i+1}\left(1+\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)\right]+$$
$$+\lambda_i\left[1+\lambda_{i+1}\left(1+\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)\right]+\mu_i\left[1+\mu_{i-1}\left(1+\frac{h_{i-2}}{h_{i-1}}\right)\right]$$

очевидно отличен от нуля. Поэтому система имеет однопараметрическое множество решений m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, зависящее от параметра b_i. Положим

$$b_i = h_{i-1}h_iD/(P_iP_{i+1}), \tag{42}$$

где $P_j = h_{j-1}+\mu_{j-1}(h_{j-2}+h_{j-1})+\lambda_j(h_{j-1}+h_j)$ (смысл такого значения параметра b_i будет ясен из дальнейше -

го). Вычисляя из системы (41) неизвестные m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, а также учитывая соотношения (39),(40),(42), получаем набор узловых значений сплайна и его первой производной, полностью определяющий B-сплайн $B_i(x)$. Опуская выкладки, приведем окончательный результат

$$\left.\begin{aligned} &B_i(x_{i-1}) = \mu_{i-1}h_{i-2}/P_i, \\ &B_i(x_{i+1}) = \lambda_{i+1}h_{i+1}/P_{i+1}, \\ &B_i(x_i) = 1-\lambda_i h_i/P_i - \mu_i h_{i-1}/P_{i+1}, \\ &B_i(x_{i-2}) = B_i(x_{i+2}) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

$$\left.\begin{aligned} &B_i'(x_{i-1}) = 3\mu_{i-1}/P_i, \\ &B_i'(x_{i+1}) = -3\lambda_{i+1}/P_{i+1}, \\ &B_i'(x_i) = 3\lambda_i/P_i - 3\mu_i/P_{i+1}, \\ &B_i'(x_{i-2}) = B_i'(x_{i+2}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Покажем, что найденные B-сплайны являются нормализованными B-сплайнами. Обозначим $S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} B_i(x)$, где $B_i(x)$ - B-сплайны, определенные формулами (43), (44),(6). При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ в силу финитности B-сплайнов имеем $S(x) = B_{i-1}(x) + B_i(x) + B_{i+1}(x) + B_{i+2}(x)$. Отсюда, учитывая соотношения (43),(44) находим $S(x_i) = S(x_{i+1}) = 1$, $S'(x_i) = S'(x_{i+1}) = 0$. Так как $S(x)$ является кубическим сплайном и, следовательно, представим в виде (6), то ясно, что $S(x) \equiv 1$ при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ для любого $i = 0,\dots,N-1$. Тем самым доказано равенство (36), что и требовалось. Отметим, что выполнение этого равенства обеспечивается выбором параметра b_i в системе (41) по формуле (42).

Литература

1. SALKAUSKAS K. C^1 splines for interpolation of rapidly varying data //Rocky Mountain J. of Mathematics.-1984.-Vol.14, N 1. - P. 239-250.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

3. ДЕ БОР К. Практическое руководство по сплайнам. - М.: Радио и связь. 1985. - 303 с.

4. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline inter - polation //Constructive theory of functions'84. - Sofia, 1984. - P. 610-620.

5. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Монотонная интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса C^2 //Интерполяция и аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1982. - Вып. 147: Вычислительные системы. - С. 44-67.

6. SALKAUSKAS K., BOS L. Weighted splines as optimal in - terpolants //Rocky Mountain J. of Mathematics. - 1992.-Vol.22, N 2. - P. 705-717.

7. BOS L., SALKAUKAS K. Limits of weighted splines based on piecewise constant weight functions //Rocky Mountain J. of Mathematics. - 1993. - Vol. 23, N 2. - P. 483-493.

8. FOLEY T.A. Interpolation and approximation of 3-D and 4-D scattered data //Comput. Math. Applic. - 1987. - Vol. 13, N 8. - P. 711-740.

9. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных кубических сплайнов класса C^2 //Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып. 137: Вычислительные системы. - С. 31-57.

10. AKIMA H. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures //J.Assoc. comput. math. - 1970. - Vol. 17. - P. 589-602.

11. КВАСОВ Б.И., ЯЦЕНКО С.А. Изогеометрическая интерполяция рациональными сплайнами //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1987. - Вып. 121: Вычислительные системы. - С.11-36.

Поступила в редакцию
8 ноября 1995 года