СТРУКТУРНЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1996 год **Выпуск 156**

УДК 510.64

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАСШИРЕНИЙ В НЕМОНОТОННЫХ СИСТЕМАХ

А.Л.Височан

Введение

Многие годы человек пользуется логикой как наукой, как инструментом для получения следствий из имеющихся знаний. Но не все рассуждения человека корректны с точки зрения классической логики. В отличие от логических задач, человеку часто приходиться принимать решения не имея для этого достаточной информации. Нередко мы пользуемся в принятии решений эмоциями или некоторой накопленной статистикой, а не доводами рассудка (который тоже не всегда безгрешен). Именно эта особенность отличает человека от "думающих машин". Человек всегда хотел создать "разумную" машину, что бы она действительно могла перерабатывать огромные объемы информации и принимать решения даже в тех случаях, когда исходная информация неполная и дать точный ответ "Да" или "Нет" невозможно.

Минский [1] пришел к мысли, что существует тип вывода, более близкий к человеческим рассуждениям, но он не является монотонным, как классическая логика. Его работа стала началом активных исследований в этом направлении. Возникло много систем немонотонного вывода. В частности это:

- теория индивидуальных и общих знаний и убеждений, предложенная Дж.Хальреном и У.Мозесом [2];
- система поддержки истины Дж. Дойля [3];
- логика с умолчаниями Р. Райтера [4];
- автоэпистемическая логика Р.Мура [6].

1. Формализация понятия немонотонной системы

Введем краткое определение немонотонной системы (см [5]).

Пусть U — множество всех утверждений, с которыми мы работаем (в общем случае U — множество объектов, относительно которых мы делаем выводы), а N — множество правил немонотонного вывода. *Правило немонотонного вывода* — это тройка $< P, G, \varphi >$, где $P \subseteq U$, $G \subseteq U$ — конечные множества, а $\varphi \in U$. Тогда элементы P называется *предпосылками*, элементы G — *ограничениями*, а φ - *выводом* или *следствием*. Обычно правила вывода записываются в виде: $\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_m : \beta_1, \ldots, \beta_n}{\varphi}$, где $P = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ и $G = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Пользуются этим правилом так: если мы вывели все предложения P и никаким способом не можем вывести ни одно предложение из G, то это означает, что утверждение φ выведено. При принятых выше обозначениях пара $< U, N >$ называется *немонотонной системой*.

Пусть $R \subseteq U$. Подмножество $S \subseteq U$ называется *дедуктивно-замкнутым с ограничениями* R, когда для любого правила вывода $r \in N$, если все предпосылки принадлежат S (т. е. $P \subseteq S$) и все ограничения не принадлежат R (т. е. $G \cap R = \emptyset$), то вывод принадлежит S ($\varphi \in S$). Если $S = R$, то говорят, что множество S — *дедуктивно-замкнуто*.

Пусть S, $I \subseteq U$ и $\varphi \in U$. Последовательность $< \varphi_1, \ldots, \varphi_k >$ называется *S-выводом φ из I*, если $\varphi = \varphi_k$ и $\forall i \leq k((\varphi_i \in I) \vee (\exists r \in N : r = < P, G, \varphi_i >, P \subseteq \{\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_{i-1}\}, G \cap S = \emptyset))$.

Множество $C_S(I) \subseteq U$, состоящие из всех элементов U, для которых существует S-вывод из I называется *дедуктивным замыканием множества I с множеством ограничений S* или *S-замыканием*. На самом деле оговорка "с множеством ограничений" очень важна, так как $C_S(I)$, в общем случае, не является дедуктивно-замкнутым (по определению $C_S(I)$ является дедуктивно-замкнутым с ограничениями S, но мы не можем сказать является ли оно дедуктивно-замкнутым).

Рассмотрим свойства дедуктивного замыкания:

1. $I \subseteq C_S(I)$;
2. $C_S(C_S(I)) = C_S(I)$;
3. $\forall I,\ J \subseteq U,\ \forall S \subseteq U (I \subseteq J) \Rightarrow (C_S(I) \subseteq C_S(J))$;
4. $\forall I \subseteq U,\ \forall S_1, S_2 \subseteq U(S_1 \subseteq S_2) \Rightarrow (C_{S_2}(I) \subseteq C_{S_1}(I))$.

2. Расширения, их существование и поиск

Важное понятие в немонотонных системах — понятие *расширения*. Расширение множества $I \subseteq U$ — это такое подмножество $E \subseteq U$, что $E = C_E(I)$. Расширение является аналогом теории в классической логике, но в немонотонном случае все сложнее: встречаются системы, в которых расширения не существуют. Если же в системе существует расширение, то оно не обязательно единственно. Проблема поиска всех расширений является NP-полной. Поэтому важно знать, существуют расширения или нет. Эта проблема исследовалась для частных случаев (например,см.[7,8]).

Пусть $S = \langle U, N \rangle$ — немонотонная система и $I \subseteq U$. Обозначим за $S(I)$ систему вида $\langle U, N \cup \{\langle \emptyset, \emptyset, \alpha \rangle : \alpha \in I\} \rangle$. Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1 [5]. *Пусть $E \subseteq U$. Множество E является расширением I в системе S тогда и только тогда, когда E — расширение $\emptyset$ в системе $S(I)$.*

Таким образом, достаточно рассматривать свойства расширений пустого множества. Поэтому расширения пустого множества называют расширениями системы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть $S, E \subseteq U$, тогда верны следующие утверждения:*

1) если $S \setminus C_S(\emptyset) \neq \emptyset$ и $S \subset E$, то E не является расширением;

2) если $C_S(\emptyset) \setminus S \neq \emptyset$ и $S \supset E$, то E не является расширением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Пусть $S \setminus C_S(\emptyset) \neq \emptyset$, и предположим, что существует $E \subseteq U$ такое, что $(S \subset E)$ и E является расширением. Но тогда $S \subset E = C_E(\emptyset) \subseteq C_S(\emptyset)$, откуда следует, что $S \setminus C_S(\emptyset) = \emptyset$. Пришли к противоречию с начальным условием. Следовательно, множества E с такими свойствами (и расширение, и содержит в себе S) не существует. Первое утверждение доказано.

Доказательство второго утверждения аналогично вышеприведенным рассуждениям. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $S \subseteq U$, тогда возможен один из следующих четырех взаимноисключающих случаев:*

1) $S = C_S(\emptyset)$, т.е. S является расширением;

2) $S \subset C_S(\emptyset)$, тогда S, $C_S(\emptyset)$ удовлетворяют п. 2 утверждения 1 и любое расширение E такое, что $S \subset E$, содержится в $C_S(\emptyset)$.;

3) $S \supset C_S(\emptyset)$, тогда S, $C_S(\emptyset)$ удовлетворяют п.1 утверждения 1 и любое расширение E такое, что $S \supset E$, содержит в себе $C_S(\emptyset)$;

4) $S \setminus C_S(\emptyset) \neq \emptyset$ и $C_S(\emptyset) \setminus S \neq \emptyset$. Тогда любое множество E такое, что $(S \subset E) \vee (S \supset E)$ не является расширением.

Схема алгоритма поиска всех расширений, основывающаяся на полученном результате выглядит следующим образом.

а) $Search(U_1, U_2)$ — алгоритм поиска расширений, содержащих можество U_1 и содержащихся в множестве U_2 (условие $U_1 \subset U_2$)

begin

if $|U_2| - |U_1| > 1$ then

for all $S \subseteq U$: $U_1 \subset S \subset U_2$ & $|S| =$

$= \mathrm{int}\left(\dfrac{|U_1| + |U_2|}{2}\right)$ & S – не помечено

```
            пометить S
            C := C_S(∅)
            if C = S then E := E ∪ {S}
            if C ⊂ S then Search(C, S)
            if S ⊂ C then Search(S, C)
        next S
end
```

б) *SearchAll* – алгоритм поиска всех расширений

```
begin
    for all S ⊂ U
        убрать отметку с S
    next S
    E := ∅
    Search(C_U(∅), C_∅(∅))
    результат - E
end
```

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Результат работы SearchAll — множество E — является множеством всех расширений.*

3. Использование немонотонных логик для составления расписаний

В этой части мы рассмотрим способы построения немонотонных систем для некоторых реальных случаев на примере системы получения расписания в учебном заведении с некоторыми упрощающими условиями.

Простейший случай. У нас имеются классы, предметы, аудитории и часы занятий. Кроме этого будем считать, что каждый класс должен изучить каждый предмет по одному часу. В любой аудитории можно преподавать любой предмет. Естественные ограничения –

в каждой аудитории может находиться не более одного класса, и один класс, в одно и тоже время, не может изучать два разных предмета или заниматься в двух разных аудиториях. Обозначим необходимые объекты: G — классы (*groups*), L — предметы (*lessons*), R — аудитории (*rooms*) и H — часы занятий или сетка расписания (*hours*). Все введенные множества — конечные. Пусть U некоторое множество четверок, $I \subseteq \{1,2,3,4\}$ и четверка $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in U$, тогда введем обозначение $\overline{(a_1, a_2, a_3, a_4)}_I$ для множества

$$\left\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in U \;\middle|\; \left(\bigwedge_{i \in I}(a_i = b_i)\right) \wedge \left(\bigvee_{i \notin I}(a_i \neq b_i)\right)\right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Простейшим расписанием* назовем функцию $F: G \times L \to R \times H$ (очевидно, что $F = (F_R, F_H)$ — покомпонентная запись), удовлетворяющую следующим условиям:

$\mathbf{dom} F = G \times L$,

$\forall g \in G \; F_H(g): L \to H$ - разнозначно,

$\exists e: G \times H \to R$ такое, что $\forall g \in G, l \in L \quad F_R(g,l) = e(g, F_H(g,l))$ и $\forall h \in H \quad e(h): G \to R$ — разнозначно (если определено).

СЛЕДСТВИЕ 2 (к определению 1). *Функция F - разнозначна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что если $a \neq b$, то $F(a) \neq F(b)$ или, что то же самое, если $F(a) = F(b)$, то $a = b$. Пусть существуют $g_1, g_2 \in G$, $l_1, l_2 \in L$ такие, что $F(g_1, l_1) = F(g_2, l_2) = (r, h)$, тогда $r = F_R(g_1, l_1) = e(g_1, F_H(g_1, l_1)) =$ (по определению F) $e(g_1, h)$. Рассматривая вместо (g_1, l_1) пару (g_2, l_2), получим $e(g_2, h) = r$, но из разнозначности $e(h)$ следует, что $g_1 = g_2$. Тогда получаем, что $F_H(g_1, l_1) = F_H(g_1, l_2)$ и из разнозначности $F_H(g)$ следует, что $l_1 = l_2$. Утверждение доказано.

Построим немонотонную систему следующего вида: $S = \langle U, N \rangle$, где $U = G \times L \times R \times H$, а немонотонные правила задаются следующим образом:

$\forall g \in G, l \in L, r \in R, h \in H, u \in U$

1) $\forall l_1 \in L, r_1 \in R: \ r_1 \neq r \vee l_1 \neq l, \ \dfrac{(g,l,r,h),(g,l_1,r_1,h):}{u} \in N$;

2) $\forall l_1 \in L, g_1 \in G: \ g_1 \neq g \vee l_1 \neq l, \ \dfrac{(g,l,r,h),(g_1,l_1,r,h):}{u} \in N$;

3) $\dfrac{:\overline{(g,l,r,h)}_{\{1,2\}}}{(g,l,r,h)} \in N$;

4) ничего другого в N нет.

Пусть $E \subset U$, тогда имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *E является расширением системы S тогда и только тогда, когда E является графиком некоторого простого расписания.*

Для доказательства этого факта нам понадобятся следующие леммы о свойствах расширений системы S.

ЛЕММА 1. *Множество $C_U(\emptyset)$ пусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Допустим, что существует $\varphi \in U$ такое, что $\varphi \in C_U(\emptyset)$. Следовательно, существует U-вывод φ из $\emptyset$ — $< \varphi_1, \ldots, \varphi_n >$ и каждое φ_i получено из предыдущих φ_j, $j < i$, по правилу $n_i \in N$. Рассмотрим $i = 1$, тогда φ_1 получено из пустого множества по правилу n_1, значит правило n_1 подходит под п.3 построения N, но все ограничения этого правила содержатся в U. Таким образом, получили противоречие с определением U-вывода, т.е. $C_U(\emptyset)$ — пусто.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Множество U (носитель системы S) никогда не является расширением.*

ЛЕММА 2. *Пусть E — расширение S, тогда верно утверждение: $\forall g \in G$, $\forall l \in L$ $\exists! r \in R$, $\exists! h \in H$: $(g,l,r,h) \in E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Возьмем произвольные $g \in G$, $l \in L$, $r \in R$, $h \in H$, допустим, что для любых $r_1 \in R$, $h_1 \in H$ таких, что $r \neq r_1$ или $h \neq h_1$ $(g,l,r_1,h_1) \notin E$, но тогда правило $\dfrac{:\overline{(g,l,r,h)}_{\{1,2\}}}{(g,l,r,h)}$ принадлежит N, и существует E-вывод из $\emptyset$ — $< (g,l,r,h) >$, следовательно, (g,l,r,h) принадлежит E.

Единственность. Пусть существует $a = (g,l,r_1,h_1)$, $b = (g,l,r_2,h_2) \in E$. Нетрудно заметить, что если $a \neq b$, то $b \in \ddot{a}_{\{1,2\}}$, т.е. a не может быть получено по правилу типа 3. Но тогда существуют $u_1, u_2 \in E$ и правило вида $\frac{u_1, u_2 :}{a} \in N$. Из структуры правил типа 1 и 2 получаем, что $E = U$, а это невозможно по следствию 3. Следовательно, $a = b$. Таким образом, лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если $|G \times L| > |R \times H|$, то расширений в системе S не существует.*

ЛЕММА 3. *Пусть E — расширение S, и существуют $a = (g, l_1, r_1, h)$, $b = (g, l_2, r_2, h) \in E$, тогда $a = b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $a \neq b$. Но a и b принадлежат $C_E(\emptyset)$, значит существуют E-выводы для a и b (обозначим их как $< a_1, \dots, a_n >$ и $< b_1, \dots, b_m >$ соответственно). Поскольку $a \neq b$, то для любого $u \in U$ правило $\frac{a, b :}{u}$ принадлежит N (по типу 1), следовательно, $< a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, u >$ является E-выводом u, а значит u принадлежит E. Получили противоречие с начальным условием ($E = U$ и по следствию 3 E — не расширение). Таким образом, единственный возможный вариант: $a = b$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть E — расширение S, и существуют $a = (g_1, l_1, r, h)$, $b = (g_2, l_2, r, h) \in E$, тогда $a = b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения, проводимые для доказательства этой леммы, аналогичны рассуждениям, проводимым в предыдущей лемме (за тем исключением, что правило $\frac{a, b :}{u}$ принадлежит N по типу 2). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству утверждения 3.

($\Rightarrow$) Доказательство проведем построением F. Пусть E является расширением системы S. По лемме 2 можем определить F как $F(g, l) = (r, h)$, так что $(g, l, r, h) \in E$. Проверим свойства F. По лемме 2 $\mathrm{dom}F = G \times L$. Рассмотрим F_H, пусть существуют $g \in G$, $l_1, l_2 \in L$, $h \in H$ такие, что $F_H(g, l_1) = h = F_H(g, l_2)$. Для $i = 1, 2$ обозначим $F_R(g, l_i)$ как r_i. Тогда (g, l_1, r_1, h) и (g, l_2, r_2, h) принадлежат E и, по лемме 3, $l_1 = l_2$ и $r_1 = r_2$. То есть $F_H(g)$ - разнозначна. Теперь построим e следующим образом:

$$e(g,h) = \begin{cases} r, \text{ если} \exists l \in L: \ (g,l,r,h) \in E, \\ \text{неопределено — в противном случае.} \end{cases}$$

Про лемме 3 для каждой пары (g,h) такие r и l — единственные (если существуют), поэтому определение функции корректно. Теперь проверим свойства.

Докажем разнозначность $g(h): G \to R$. Она эквивалентна следующему утверждению: $\forall h \in H$, $g_1, g_2 \in G$: $g_1, g_2 \in \mathrm{dome}(h), (e(h)(g_1) = e(h)(g_2)) \Rightarrow (g_1 = g_2)$. Пусть g_1, g_2, h, r такие, что $r = e(h)(g_1) = e(h)(g_2)$, тогда существуют (по построению e) l_1, l_2 такие, что $(g_1, l_1, r, h), (g_2, l_2, r, h) \in E$, но, по лемме 4, $(g_1, l_1) = (g_2, l_2)$. Разнозначность доказана. Пусть (g, l, r, h) принадлежат E, тогда (по построению F) $F(g,l) = (r,h)$, но $e(g,h) = r$ (по построению e), следовательно, $F_R(g,l) = r = e(g,h) = e(g, F_H(g,l))$. Таким образом, доказано, что F является простейшим расписанием.

($\Leftarrow$) Пусть F — простейшее расписание. Докажем, что график функции F, множество $E \rightleftharpoons \{(g,l,F_R(g,l), \ F_H(g,l)) | g \in G, \ l \in L\}$, является расширением системы S. Пусть (g,l,r,h) принадлежит E, так как F — функция, то $\forall r_1 \in R$, $h_1 \in H$; $(r_1, h_1) \neq (r,h)(g,l,r_1,h_1) \notin E$. Тогда $< (g,l,r,h) >$ — E-вывод $(g,l,r,h) \in C_E(\emptyset)$ и,следовательно, $E \subseteq C_E(\emptyset)$. Теперь докажем, что любой E-вывод содержится в множестве E. Доказательство проведем индукцией по длине вывода.

Докажем базу индукции. Для $n = 0$ мы имеем дело с пустым множеством, очевидно $\emptyset \subseteq E$.

$n \to n+1$. Допустим для всех $k \leq n$ верно, что все элементы любого вывода длины k содержатся в E. Возьмем произвольный вывод длины $n+1$, обозначим его $< a_1, \dots, a_{n+1} >$, но тогда $< a_1, \dots, a_n >$ — вывод длины n и по индукционному предположению $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq E$. Так как a_{n+1} получено из $\{a_1, \dots, \}$ по некоторому правилу вывода, рассмотрим возможные варианты. Допустим существуют i, j : $\dfrac{a_i, a_j :}{a_{n+1}} \in N$ и $a_i = (g, l_1, r_1, h)$, $a_j = (g, l_2, r_2, h)$, а $(l_1, r_1) \neq (l_2, r_2)$. Если $l_1 = l_2$, то $r_1 \neq r_2$, а этого не может быть, так как F — функция. То есть $l_1 \neq l_2$, но по определению E получаем, что $F(g, l_1) = (r_1, h)$ & $F(g, l_2) = (r_2, h)$, а это противоречит разнозначности $F_H(g)$. Следовательно, a_{n+1} не может быть получено по правилам типа 1. Аналогичными рассуждениями (но из разнозначности $e(h)$) доказывается, что a_{n+1} не может быть получено по правилам типа 2. Следовательно, a_{n+1} получено по правилу типа 3, но тогда (по определению E-вывода) $\overline{a_{n+1}}_{\{1,2\}} \cap E = \emptyset$. Пусть $a_{n+1} = (g, l, r, h)$, очевидно, что $a_{n+1} \notin \overline{a_{n+1}}_{\{1,2\}}$, но $b = (g, l, F_R(g, l), F_H(g, l))$ тоже не принадлежит $\overline{a_{n+1}}_{\{1,2\}}$, следовательно $a_{n+1} = b$ (по определениям $\overline{(g, l, r, h)}_{\{1,2\}}$ и E). Таким образом, $a_{n+1} \in E$. Тогда $E = C_E(\emptyset)$ и, следовательно, E является расширением. □

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *В системе S существуют расширения тогда и только тогда, когда $|G \times L| \leq |R \times H|$ & $|L| \leq |H|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

($\Rightarrow$) Пусть в системе S существует расширение, следовательно, по утверждению 3, существует функция F, являющаяся простейшим расписанием. Тогда из разнозначности F следует, что $|\mathrm{dom}F| = |\mathrm{im}F| \leq |R \times H|$, а по определению $\mathrm{dom}F = G \times L$. Из разнозначности $F_H(g)$ следует, что $|L| \leq |H|$.

($\Leftarrow$) Пусть $|G \times L| \leq |R \times H|$ & $|L| \leq |H|$. Построим F — простейшее расписание. Так как G, L, R, H — конечные множества, то их элементы можно пронумеровать: $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$, $L = \{l_1, \ldots, l_n\}$, $R = \{r_1, \ldots, r_o\}$, $H = \{h_1, \ldots$ $\ldots, h_p\}$. Если $m \leq o$, то можно определить F как $F(g_i, l_j) =$ $= (r_i, h_j)$. Из определения 1 видно, что F — простейшее расписание. Проверим его определение. Пусть $m > o$, тогда определим функции $a: G \times L \to N$ и $b: R \times H \to$ $\to N$ как $a(g_i, l_j) = (j-1)m+i$, а $b(r_i, h_j) = (j-1)o+i$. Здесь a — взаимно-однозначное соответствие между $G \times L$ и $\{1, \ldots, op\}$; b — взаимно-однозначное соответстви между $R \times H$ и $\{1, \ldots, mn\}$. Так как $mn \leq op$, то можно определить F так: $F(g, l) = (r, h) : a(g, l) = b(r, h)$. Из определения b следует: если $|b(r, h) - b(c, d)| > o$, то $d \neq h$.

Из этого получаем разнозначность F_H, так как $m > o$. Возьмем произвольное h. Положим $G_h \rightleftharpoons \{g : \exists l \in L : F_H(g,l) = h\}$. Поскольку $m > o$, то мощность G_h равна m, поэтому можем определить функцию $e(g,h)$ так, что $F_R(g,l) = e(g, F_H(g,l))$. Из биективности a и b следует разнозначность $e(h)$. Сдедовательно, F — простейшее расписание. Утверждение доказано.

Литература

1. MINSKY M. A framework for representig knowledge//The psychology of Computer Vision.- McGrow Hill, 1975.-P.211-272.

2. HALPERN J.Y., MOSES Y.O. Knowledge and common knowledge in a distributed environment// 3rd ACM Conference on the Principles of Distributed Computing, 1984.- P.50-61.

3. DOYLE J. A truth maintenance system// Artif.Intell.-1979.- Vol.12.-P.231-272.

4. REITER R. A logic for default reasoning// Artif.Intell.-1980.- Vol.13.-P.81-132.

5. MAREK W., NERODE A., REMMEL J. A theory of nonmonotonic rule system. Pt. I // Tech.Rep.- 1990.- N 31.

6. MOORE R.C. Semantical considerations on nonmonotonic logic// Artif.Intell.-1985.-Vol.25.-P.75-94.

7. MAREK W., NERODE A., REMMEL J. A theory of nonmonotonic rule system. Pt.II // Tech.Rep.-1990.-N 32.

8. ВИСОЧАН А.Л. Немонотонные логики// Теория вычислений и языки спецификаций. - Новосибирск,1995.-Вып.152: Вычислительные системы.- С.152-165.

Поступила в редакцию
13 августа 1996 года