СТРУКТУРНЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1996 год Выпуск 156

УДК 512.563

ТИПЫ ИЗОМОРФИЗМА СУПЕРАТОМНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ОДНИМ ВЫДЕЛЕННЫМ ИДЕАЛОМ

А.В.Трофимов

Введение

В монографии [3] показано, что произвольная счетная булева алгебра B является суператомной тогда и только тогда, когда $B \cong B_L$ и $L = \omega^\alpha \cdot n$, для некоторого счетного ординала α (обозначается $\alpha = rank(B)$), где B_L — алгебра интервалов линейного порядка [3].

В [1] было дано описание типов элементарной эквивалентности суператомных булевых алгебр с одним выделенным идеалом.

В настоящей работе изучаются булевы алгебры с одним выделенным идеалом, в дальнейшем мы будем называть их I-алгебрами и рассматривать в сигнатуре $\Sigma_I = \{\cup, \cap, \neg, 0, 1, I\}$. Здесь изучаются только суператомные I-алгебры, поэтому слово "суператомные" будем опускать и под I-алгебрами будем понимать суператомные I-алгебры. Дается описание типов изоморфизма счетных I-алгебр для всех элементарных типов [1] (кроме типа $(\infty, 0, \infty)$), имеющих конечный ранг Фреше. Кроме того, доказывается, что любая такая I-алгебра есть прямая сумма конечного числа неисчезающих и число неисчезающих I-алгебр, соответствующих данному элементарному типу, конечно.

Для произвольного счетного или конечного ординала α определим линейно упорядоченное множество L_I^α с выделенным идеалом следующим образом: если $\alpha = 0$, то L_I^0 состоит из одного атома, который либо принадлежит идеалу, либо нет. Пусть $L_I^{\beta_i}$ уже построено для любого $\beta < \alpha$. Определим L_I^α так: $L_I^\alpha \rightleftharpoons \langle\{\langle l, i\rangle, i \in N, l \in L_I^{\beta_i}\}, \leq, I\rangle$, где $\langle l, i\rangle \leq \langle l', i'\rangle \iff (i < i') \vee (i = i' \ \& \ l \leq l')$, причем $(\forall\beta < \alpha)(\exists i)(\beta \leq rank(\mathcal{B}_{L_I^{\beta_i}}))$.

Пусть $\Sigma = (\cup, \cap, \neg, 0, 1)$, тогда произвольная I-алгебра $\mathcal{B}$ такая, что $\mathcal{B}|_\Sigma \cong \mathcal{B}_{\omega^\alpha}$, сама изоморфна $\mathcal{B}_{L_I^\alpha}$ для некоторого L_I^α.

При написание данной статьи автором существенно использовались результаты из работы [1], где можно найти все необходимые определения. Приведем некоторые из них.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (ω-смешивание [1]). Пусть дано семейство алгебр $\{(\mathcal{A}_n, I^n)\}_{n\in N}$, причем $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = 0$ для $i \neq j$.

Алгебра $(\mathcal{B}, I)$ называется ω-смешиванием элементов $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in N}$ (т. е. алгебр $\{(\mathcal{A}_n, I^n)\}_{n\in N}$), если ее можно представить как алгебру промежутков на промежутке $[0,1)$ так, что

а) $\mathcal{A}_n = [1/(n+1), 1/n)$ (строго говоря, $(\mathcal{A}_n, I^n) \cong$ $\cong ([1/(n+1), 1/n), I)$, мы считаем, что $\mathcal{A}_n$ вкладывается в $\mathcal{B}$ без переобозначений);

б) $x \in I$ равносильно $x \leq \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_k$ для некоторого k, причем $x \cap \mathcal{A}_i \in I^i$ для $1 \leq i \leq k$.

В дальнейшем такую I-алгебру $\mathcal{B}$ будем обозначать так: $\mathcal{B} \rightleftharpoons \omega\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N, \ldots\}$.

Следуя [1], введем специальную последовательность формул $V_n(x)$, $n \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ — множество натуальных чисел):

$V_1(x)$ означает, что x — атом, лежащий в идеале I,

$V_2(x)$ означает, что x — атом, не лежащий в I,

$V_3(x) = (x/I$ — атом $)$ & $(\forall y \leq x)(\neg V_2(y))$.

Формула $P(x)$ называется *точечной*, если в T (теории класса алгебр $(\mathcal{A}, I)$) доказуемо утверждение

$$(\forall x)\Psi(x) = (\forall x)(P(x) \longrightarrow ((\forall y \leq x)(P(y) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \neg P(x \setminus y)) \;\&\; (\forall y_1, y_2 \le x)(y_1 \cap y_2 = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (\neg P(y_1) \vee \neg P(y_2))))).$$

Произведением формул P и Q называется формула

$$PQ(x) = \theta(x) \& (\forall y \le x)(\theta(y) \longleftrightarrow \neg\theta(x \setminus y)) \;\&$$

$$\&(\forall y_1, y_2 \le x)(y_1 \cap y_2 = 0 \longrightarrow (\neg\theta(y_1) \vee \neg\theta(y_2)),$$

где $\theta(x) = \neg(\exists y \le x)((\forall z \le y)(\neg P(z) \;\&\; (\forall z \le x \setminus y)(\neg Q(Z)).$

Положим [1]:

$$Vn_o(x) \rightleftharpoons Vn_{o-3}Vn_{o-2}(X) \;\&\; (\forall y \le x)(\neg Vn_{o-1}(x)).$$

Пусть дана алгебра (A, I). Для каждого элемента $x \in |A|$ определим некоторое число $n \in N \cup \{\infty\}$, которое называется уровнем x, следующим образом.

Если существует такой наименьший номер k, что для любого $k_1 > k$ под x нет V_{k_1}-элементов, то $n = k$. Если такого k не существует, т. е. для любого k под x есть V_k-элемент, то говорят, что уровень x равен ∞, т. е. $n = \infty$.

Пусть уровень элемента x равен n. Для n, согласно [1], введем характеристику $r(x) = (r_1(x), r_2(x), r_3(x))$. Положим $r_3 = n$; если $n = 0$, то $r_1 = r_2 = 0$; если $n = \infty$ то $r_1 = \infty$, $r_2 = 0$; если $0 < n < \infty$, то r_1 — количество непересекающихся V_n-элементов; если $n = 1$, то $r_2 = 0$; если $1 < n < \infty$, то r_2 — количество непересекающихся V_{n-1}-элементов, лежащих под x.

Знаком $\equiv$ обозначим элементарную эквивалентность алгебраических систем. Знаком $\cong$ будем обозначать изоморфизм между двумя алгебраическими системами.

В этих обозначениях справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. $(A, I) \equiv (A', I')$ *равносильно* $r(A) = r(A')$.

Пусть (A, I), (B, J) — две булевы алгебры. Пусть $S \subseteq |A| \times |B|$ — подмножество, удовлетворяющее следующим аксиомам:

Ax1: $(0, 0) \in S \& (1, 1) \in S$;

Ax2: $(\langle x,y\rangle \in S \& x=0) \Rightarrow y=0$;

Ax3: $(\langle x,y\rangle \in S \& y=0) \Rightarrow x=0$;

Ax4: $(\langle x,y\rangle \in S \& a \leq x) \Rightarrow (\exists b)[\langle a,b\rangle \in S \& \langle x\setminus a, y\setminus b\rangle \in S]$;

Ax5: $(\langle x,y\rangle \in S \& b \leq y) \Rightarrow (\exists a)[\langle a,b\rangle \in S \& \langle x\setminus a, y\setminus b\rangle \in S]$;

Ax6: $\langle x,y\rangle \in S \Rightarrow (x \in I \iff y \in J)$ (S будем называть критерием изоморфизма).

ТЕОРЕМА 1 [1] (обобщение критерия Воота [3]). *$(A,I) \cong (B,J)$ тогда и только тогда, когда существует множество S, удовлетворяющее аксиомам* Ax1–Ax6.

1. Общее строение I-алгебр

Пусть B — произвольная I-алгебра. Тогда, как следует из предыдущих рассуждений, существует линейно упорядоченное множество L_I^α с выделенным идеалом I такое, что $B \cong B_{L_I^\alpha}$. Пусть для B выполняется следующее условие:

$$\left.\begin{array}{l} \text{либо } r(B)=(1,0,n) \ \& \ (\forall C \leq B)\ [r(C)=r(B) \iff \\ \qquad \iff rank(C)=\alpha], \quad n \geq 4, \\ \text{либо } r(B)=(\infty,0,n), \quad n \geq 3. \end{array}\right\} (*)$$

Тогда при этом предположении верна следующая

ЛЕММА 1. *Пусть B — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условию $(*)$. Тогда существует I-алгебра $C=\omega\{C_1,\ldots,C_N,\ldots\}$ такая, что $B \cong C$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условиям леммы. Тогда существует такое множество L_I^α, что $B \cong B_{L_I^\alpha}$. По построению $L_I^\alpha = \langle\{\langle l,i\rangle\},\leq,I\rangle$. Пусть $C_i \cong B_{L_I^{\beta_i}}$, тогда положим $C \rightleftharpoons \omega\{C_1,\ldots,C_N,\ldots\}$. Среди C_i существует бесконечно много I-алгебр, для которых 1_{C_i} не принадлежит идеалу I, следовательно, условие "б" определения 1 выполнено. Поэтому такое задание I-алгебры C корректно. Пусть f_i осуществляет изоморфизм между I-алгеброй $B_{L_I^{\beta_i}}$ и I-алгеброй C_i. Доопределим $f_i(0_B)=0_C$, $f_i(1_B)=1_C$.

Известно, что любой элемент x из $\mathcal{B}$ представим в виде $x = \bigvee_{i=0}^{n}(a_i \setminus b_i)$, где $a_i, b_i \in L_I^{\beta_i} \cup \{0,1\}$. Используя это, докажем, что $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$. Для этого воспользуемся теоремой 1.

Положим $S \rightleftharpoons \{\langle x,y\rangle \mid x = \bigvee_{i=0}^{n}(a_i \setminus b_i) \iff y = \bigvee_{i=0}^{n} f_i(a_i) \setminus f_i(b_i)$, где $a_i, b_i \in L_I^{\beta_i} \cup \{0,1\}$ $\}$.

В силу теоремы 1 необходимо проверить, что S является критерием изоморфизма. Истинность аксиом Ax1, Ax2 не вызывает сомнений. Далее, в силу симметричности S достаточно проверить условия Ax4, Ax6.

Ax4. Пусть $\langle x,y\rangle \in S$, $a \le x$. Тогда существуют $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ такие, что $x = \bigvee_{i=0}^{n}(a_i \setminus b_i)$ и $a = \bigvee_{i=0}^{n}(a_i \cap c_i) \setminus (d_i \cup b_i)$. Положим $b \rightleftharpoons \bigvee_{i=0}^{n}(f_i(a_i) \cap f_i(c_i)) \setminus (f_i(d_i) \cup f_i(b_i))$.

Тогда $\langle x,y\rangle \in S$. В то же время $x \setminus a = \bigvee_{i=0}^{n}(a_i \setminus c_i) \setminus (d_i \setminus b_i)$ и $y \setminus b = \bigvee_{i=0}^{n}(f_i(a_i) \setminus f_i(c_i)) \setminus (f_i(d_i) \setminus f_i(b_i))$. Следовательно, $\langle x \setminus a, y \setminus b\rangle \in S$.

Ax6. Пусть $x \in I$. Тогда для каждого i выполнено: $(a_i \setminus b_i) \in I$. Следовательно, $(f_i(a_i) \setminus f_i(b_i)) \in I$ и $y \in I$. Обратно, если $y \in I$, то для каждого i выполнено: $(f_i(a_i) \setminus f_i(b_i)) \in I$. Тогда $(a_i \setminus b_i) \in I$ и $x \in I$. Таким обазом, все условия теоремы 1 выполнены, следовательно, $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\mathcal{B} \cong \omega\{\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_N, \ldots\}$. Тогда, если $\mathcal{A}_{2k} \oplus \mathcal{A}_{2k+1} \cong \mathcal{C}_k$, то $\mathcal{B} \cong \omega\{\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_k, \ldots\}$.

Доказательство замечания следует из определения изомофизма между двумя моделями.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условию $(*)$. Тогда существуют такие I-алгебры $\mathcal{M}_i, i = 1,2,\ldots$, что $\mathcal{B} \cong \omega\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N, \ldots\}$, причем либо $r(\mathcal{M}_i) = (1,0,t)$, либо $r(\mathcal{M}_i) = (\infty,0,t)$, и если $t \ge 4$, то $\{\mathcal{M}_i\}$ удовлетворют условияю $(*)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условию ($*$). Тогда, в силу леммы 1 можно считать, что $\mathcal{B} \cong \omega\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N, \ldots\}$. Допустим, что $r(\mathcal{C}_i) = (p_i, q_i, t_i)$. Согласно лемме 3 из §2 [1] любой элемент x можно разложить в объединение непересекающихся простых элементов x_1 и x_2, т. е. $x = x_1 \cup x_2; x_1 \cap x_2 = 0$ и $r_2(x_1) = r_2(x_2) = 0$. Следовательно, $\mathcal{C}_i = \mathcal{N}_i^1 \cup \mathcal{N}_i^2$. Если $t_i = 1$, то $r(\mathcal{C}_i) = (p_i, 0, 1)$. В этом случае $\mathcal{N}_i^1 = \mathcal{C}_i$ и $\mathcal{N}_i^2 = 0$. Если $t_i \geq 2$, то $r(\mathcal{N}_i^1) = (p_i, 0, t_i)$ и $r(\mathcal{N}_i^2) = (q_i, 0, t_i - 1)$. При p_i или q_i равным ∞ соответственно $\mathcal{N}_i^1$ или $\mathcal{N}_i^2$ удовлетворяют нужному условию. В случае $p_i < \infty$, имеем $\mathcal{N}_i^1 \cong \mathcal{M}_i^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_i^{p_i}$, причем $r(\mathcal{M}_i^k) = (1, 0, t_i)$. Аналогичное разложение имеет место для $\mathcal{N}_i^2$, в случае $q_i < \infty$. В силу точечности формул V_n легко видеть, что $\mathcal{M}_i^k$ есть прямая сумма конечного числа I-алгебр, удовлетворяющих условию следствия 1. Следовательно, для I-алгебры $\mathcal{B}$, в силу замечания 1, существует требуемое ω-смешивание. Следствие доказано.

Пусть T — множество всех изоморфных типов I-алгебр $\mathcal{A}$, таких, что $r(\mathcal{A}) = (i, 0, k), (i = 1 \vee i = \infty)$, и, если $k \geq 4$, то $\mathcal{A}$ удовлетворяет условияю ($*$), причем, для любого $t \in T$ существует единственная с точностью до изоморфизма I-алгебра $\mathcal{A}$, соотвествующая типу t. Такую I-алгебру будем обозначать через $\mathcal{A}_t$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем обозначать $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, если $\mathcal{A}$ является прямым слагаемым $\mathcal{B}$, т. е. $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$ для некоторой I-алгебры $\mathcal{C}$.

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условию ($*$), тогда $\mathcal{B} \cong \omega_{\mathcal{B}}\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N, \ldots\}$. Введем характеристику для $\omega_{\mathcal{B}} \cong \omega_{\mathcal{B}}\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_N, \ldots\}$ следующим образом: $cch_t\omega_{\mathcal{B}} = \|\{\mathcal{A}_m | \mathcal{A}_m \cong \mathcal{A}_t,\ \mathcal{A}_m \leq \omega_{\mathcal{B}}\}\|$ $cch\omega_{\mathcal{B}} = \{cch_t\omega_{\mathcal{B}}\}$. В случае, если фиксировано $\omega_{\mathcal{B}}$-смешивание $\mathcal{B}$, то также будем писать $cch\mathcal{B} \rightleftharpoons cch\omega_{\mathcal{B}}$. Эту характеристику будем называть *квазихарактеристикой*.

ЛЕММА 2. *Пусть $(\mathcal{A}, I), (\mathcal{B}, J)$ — произвольные алгебры, удовлетворяющие условию ($*$). Пусть $(\mathcal{A}, I) \cong \omega_{\mathcal{A}}$ и $(\mathcal{B}, J) \cong \omega_{\mathcal{B}}$ (где $\omega_{\mathcal{A}}, \omega_{\mathcal{B}}$ — соответственно ω-смешивания I-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$). Тогда, если $cch\omega_{\mathcal{A}} = cch\omega_{\mathcal{B}}$, то $(\mathcal{A}, I) \cong (\mathcal{B}, J)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_{\mathcal{A}} \cong \omega\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \ldots\}$, $\omega_{\mathcal{B}} \cong \omega\{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \ldots\}$. Для доказательства леммы воспользуемся теоремой 1. Положим $S \rightleftharpoons \{\langle x, y\rangle | \langle x, y\rangle$ удовлетворяет одному из условий (**) или (* * *) $\}$:

если $rank(x) = rank(y) = rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{B})$, то

$$cch(x) = cch(y); \quad (**)$$

если $rank(x) = rank(y) < rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{B})$, то

$$\left.\begin{array}{l} x = \mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_N, y = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_N, \\ \mathcal{A}_i \leq \mathcal{M}_i, \mathcal{B}_i \leq \mathcal{N}_i, (\mathcal{A}_i, I \cap |\mathcal{A}_i|) \cong (\mathcal{B}_i, J \cap |\mathcal{B}_i|). \end{array}\right\} (***)$$

Проверим выполнение аксиом Ax1-Ax6. В силу симметричности S, ограничимся проверкой аксиом Ax1,Ax2,Ax4, Ax6.

<u>Ax1</u>. $\langle 0, 0\rangle \in S; \langle 1, 1\rangle \in S$;

<u>Ax2</u>. Пусть $\langle x, y\rangle \in S$, $x = 0$, тогда, в силу (* * *), $y = 0$.

<u>Ax4</u>. Разобъем доказательство на три случая.

1) Допустим, что $\langle x, y\rangle \in S$, $rank(x) = rank(y) < rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{B})$. Возьмем $0 < a \leq x$, тогда в силу (* * *) имеем, $x = \mathcal{A}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}^N$ и $y = \mathcal{B}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}^N$. Так как $0 < a \leq x$, то $a = \overline{\mathcal{A}_1} \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{A}_N}$,где $\overline{\mathcal{A}_i} \leq \mathcal{A}_i$. Согласно условию (* * *) имеем, что $(\mathcal{A}_i, I \cap |\mathcal{A}_i|) \cong (\mathcal{B}_i, J \cap |\mathcal{B}_i|)$. Пусть f_i осуществляет такой изоморфизм. Тогда положим $b \rightleftharpoons f_1(\overline{\mathcal{A}_1}) \cup \ldots \cup f_N(\overline{\mathcal{A}_N})$. В силу построения S можно заключить, что $\langle x, y\rangle \in S$. Имеем, что $x \setminus a = \mathcal{A}_1 \setminus \overline{\mathcal{A}_1} \cup \ldots \cup \mathcal{A}_N \setminus \overline{\mathcal{A}_N}$ и $y \setminus b = \mathcal{B}_1 \setminus f_1(\overline{\mathcal{A}_1}) \cup \ldots \cup \mathcal{A}_N \setminus f_N(\overline{\mathcal{A}_N})$, следовательно, $\langle x \setminus a, y \setminus b\rangle \in S$.

2) Пусть $rank(x) = rank(y) = rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{B})$, $a \leq x$ и $rank(a) < rank(x)$. Будем считать, что $(x) = \omega\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\}$, $(y) = \omega\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots\}$, причем $\mathcal{A}_i \leq \mathcal{M}_i$, $\mathcal{B}_i \leq \mathcal{N}_i$. Так как $rank(a) < rank(x)$, то $a = \overline{\mathcal{A}_1} \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{A}_N}$. Так как нас интересуют вопросы изоморфизма I-алгебр, то две изоморфные I-алгебры будем считать неразличимыми. Пусть $[\overline{\mathcal{A}}]^k \rightleftharpoons \underbrace{\overline{\mathcal{A}} \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{A}}}_{\text{k раз}}$. Простоты ради будем считать (это не ограничивает общности), что $a = [\overline{\mathcal{A}_1}]^{k_1} \cup \ldots \cup [\overline{\mathcal{A}_m}]^{k_m} \cup \ldots \cup [\overline{\mathcal{A}_s}]^{k_s}$, кроме того, будем предполагать,

что $\overline{\mathcal{A}_i} \not\cong \overline{\mathcal{A}_j}$ при $i \neq j$. Пусть для каждого $i = 1,\ldots,m$ выполнено, что $\overline{\mathcal{A}_i} \cong \mathcal{A}_i$, и для каждого $i = m+1,\ldots,s$ верно, что $\overline{\mathcal{A}_i} \not\cong \mathcal{A}_i$. Пусть $\overline{\mathcal{A}_i}$ соответствует типу $\overline{t_i}$, $\mathcal{A}_i$ соответствует типу t_i. Для каждого $i = 1,\ldots,m$ имеем, что $cch_{t_i}(x \setminus a) = cch_{t_i}(x) - k_i$. Для каждого $i = m+1,\ldots,s$, если $\mathcal{A}_i \setminus \overline{\mathcal{A}_i} \not\cong \mathcal{A}_i$, то $cch_{t_i}(x \setminus a) = cch_{t_i}(x) - k_i$ и $cch_p(x \setminus a) = = cch_p(x) + k_i$, где тип p соответствует I-алгебре $\mathcal{A}_i \setminus \overline{\mathcal{A}_i}$. Если $\mathcal{A}_i \setminus \overline{\mathcal{A}_i} \cong \mathcal{A}_i$, то $cch_{t_i}(x \setminus a) = cch_{t_i}(x)$. Остальные квазихарактеристики не меняются. В силу вышесказанного существует b такое, что $b = f_1(\overline{\mathcal{A}_1}) \cup \ldots \cup f_N(\overline{\mathcal{A}_N})$, при этом очевидно, что $\langle a,b\rangle \in S$, и, следовательно, $b = = [f_1(\overline{\mathcal{A}_1})]^{k_1} \cup\ldots\cup [f_m(\overline{\mathcal{A}_m})]^{k_m} \cup\ldots\cup [f_s(\overline{\mathcal{A}_s})]^{k_s}$. Для каждого $i = 1,\ldots,m$ $cch_{t_i}(y \setminus b) = cch_{t_i}(y) - k_i = cch_{t_i}(x \setminus a)$. Для каждого $i = m+1,\ldots,s$ если $\mathcal{A}_i \setminus \overline{\mathcal{A}_i} \not\cong \mathcal{A}_i$, то $f_i(\mathcal{A}_i \setminus \overline{\mathcal{A}_i}) \not\cong f_i(\mathcal{A}_i)$, и тогда $cch_{t_i}(y \setminus b) = cch_{t_i}(y) - k_i = cch_{t_i}(x \setminus a)$ и $cch_p(y \setminus b) = = cch_p(y) + k_i = cch_p(x \setminus a)$, где тип p соответствует I-алгебре $\mathcal{A}^{k_i} \setminus \overline{\mathcal{A}_i}$. Если $\mathcal{A}_i \setminus \overline{\mathcal{A}_i} \cong \mathcal{A}_i$, то $f_i(\mathcal{A}_i \setminus \overline{\mathcal{A}_i}) \cong f_i(\mathcal{A}_i)$, и, следовательно, $cch_{t_i}(x \setminus a) = cch_{t_i}(y \setminus b) = cch_{t_i}(y)$. В силу выше изложенного, $\langle x \setminus a, y \setminus b\rangle \in S$.

3) Пусть $rank(x) = rank(y) = rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{B})$. Возьмем a такое, что $rank(a) = rank(x)$. Положим $a' = x \setminus a$, тогда в силу предыдущего существует b такое, что $\langle a',b'\rangle \in \in S \& \langle x \setminus a', y \setminus b'\rangle \in S$ или $\langle x \setminus a, y \setminus b\rangle \in S \& \langle a,b\rangle \in S$.

Ax6. Пусть $\langle x,y\rangle \in S$. Если $rank(x) = rank(y) = = rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{B})$, то $x \notin I$ и $y \notin J$. Если $rank(x) < < rank(\mathcal{A})$, то в силу условия $(\mathcal{A}_i, I \cap |\mathcal{A}_i|) \cong (\mathcal{B}_i, J \cap |\mathcal{B}_i|)$, получаем, что $x \in I \iff y \in J$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В обратную сторону лемма неверна, т. е. из того, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, не следует, что $cch\omega_{\mathcal{A}} = cch\omega_{\mathcal{B}}$.

2. Типы изоморфизма суператомных I-алгебр, характеристики $(1,0,n), n \leq 4$

В этом пункте будем предполагать, что произвольная I-алгебра $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию $\mathcal{B}|_\Sigma \cong \mathcal{B}_{\omega^\alpha}$.

Пусть $r(\mathcal{B}) = (k,0,1)$. Если k конечно, то любые две такие I-алгебры изоморфны. В этом случае полагаем $nsch(\mathcal{B}) = (k,0,1)$. Если $k = \infty$, то для того, чтобы $\mathcal{B}_1 \cong$

$\cong \mathcal{B}_2$ необходимо и достаточно, чтобы $rank(\mathcal{B}_1) = rank(\mathcal{B}_2)$. Тогда положим $nsch(\mathcal{B}) = (\infty, 0, 1, rank(\mathcal{B}))$.

Пусть $r(\mathcal{B}) = (k, 0, 2)$. Если $k < \infty$, то любые две такие I-алгебры изоморфны. В этом случае полагаем $nsch(\mathcal{B}) = (k, 0, 2)$. Пусть $r(\mathcal{B}) = (\infty, 0, 2)$. Такие I-алгебры характерны тем, что любой атом z I-алгебры $\mathcal{B}$ не принадлежит идеалу I. Следовательно, для того чтобы $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$, необходимо и достаточно, чтобы $rank(\mathcal{B}_1) = rank(\mathcal{B}_2)$. Тогда положим $nsch(\mathcal{B}) = (\infty, 0, 1, rank(\mathcal{B}))$.

Пусть $r(\mathcal{B}) = (1, 0, 3)$. В силу точечности формулы V_3 можно записать, что $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$, где $\mathcal{B}_1$ удовлетворяет следующему условию:

$$(\forall \mathcal{C} \leq \mathcal{B}_1)(r(\mathcal{C}) = r(\mathcal{B}_1) = (1, 0, 3) \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow rank(\mathcal{C}) = rank(\mathcal{B}_1)), \tag{1}$$

а I-алгебра $\mathcal{B}_2$ такова, что $r(\mathcal{B}_2) = (m, 0, 2)$. Если $rank(\mathcal{B}_2) < rank(\mathcal{B}_1)$, то существует разложение $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$, где $\mathcal{B}_2 = 0$. Если $rank(\mathcal{B}_2) > rank(\mathcal{B}_1)$, то разложение $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$ однозначно с точностью до изоморфизма. Поэтому достаточно описать I-алгебру $\mathcal{B}_1$. Очевидно, что любые две такие I-алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда эти алгебры имеют один и тот же ранг Фреше.

В этом случае полагаем $nsch(\mathcal{B}_1) = (1, 0, 3, rank(\mathcal{B}_1))$.

Перейдем к описанию типов I–алгебры $\mathcal{B}$, для которой $r(\mathcal{B}) = (1, 0, 4)$. Предположим, что для $\mathcal{B}$ выполнено следующие условие:

$$(\forall \mathcal{C} \leq \mathcal{B})(r(\mathcal{C}) = r(\mathcal{B}) = (1, 0, 4) \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow rank(\mathcal{C}) = rank(\mathcal{B})). \tag{2}$$

При этом ограничимся случаем, когда ранг Фреше I-алгебры $\mathcal{B}$ конечен. В силу следствия 1, можно считать, что $\mathcal{B}$ является ω-смешиванием I-алгебр $\{\mathcal{M}_i\}$, причем $r(\mathcal{M}_i) = (i, 0, t)$, где $i \in \{1, \infty\}$, $t \in \{1, 2\}$. Квазихарактеристику $\omega_{\mathcal{B}} \cong \omega\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \ldots\}$ будем записывать следующим образом: $cch\omega_{\mathcal{B}} = (i_{n-1}, \ldots, i_0; j_{n-1}, \ldots, j_0)$, где $i_m = cch_t\omega_{\mathcal{B}}$ и

t описывает I-алгебру $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}_{\omega^m}$ и $(1_{\mathcal{C}} \in I)$; (Δ)

а $j_m = cch_t\omega_B$, где

$$\left.\begin{array}{c} t \text{ описывает } I\text{-алгебру } C \cong C_{\omega^m} \\ \text{и } (\forall z - \text{ атома } \leq C)(z \notin I). \end{array}\right\} (\Delta\,\Delta)$$

В этих обозначениях справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть B, C — произвольные I-алгебры, удовлетворяющие условию (2). Допустим, что $B \cong \cong \omega_B\{B_1, B_2, \ldots\}$ и $C \cong \omega_N\{\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \ldots\}$. Тогда если*

$$cch\omega_B = (i_m, \ldots, \infty, i_{n-2}, i_{n-3}, \ldots, i_0; j_m, \ldots, j_0),$$

$$cch\omega_C = (i_m, \ldots, i_n, \infty, 0, 0, \ldots, 0; j_m, \ldots, j_0),$$

то $B \cong C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести по шагам.

Шаг 1. Сначала докажем, что для произвольной I–алгебры $\mathcal{M}$ такой, что $cch\omega_{\mathcal{M}} = (i_m, \ldots, i_n, \infty, 0, i_{n-3}, \ldots \ldots, i_0; j_m, \ldots, j_0)$ выполнено равенство $B \cong \mathcal{M}$. Рассмотрим два случая.

А) Пусть $i_{n-2} < \infty$. Обозначим через $\mathcal{M}^1_{n-2}, \ldots, \mathcal{M}^{i_{n-2}}_{n-2}$ все I-алгебры из ω_B-смешивания B (I-алгебра A принадлежит данному ω_A-смешиванию, если $A \leq \omega_A$), соответствующие типу t_1, где t_1 удовлетворяет условию (Δ) при $m = n-2$. Пусть $\mathcal{M}^1_{n-1}$ — произвольная I-алгебра из ω_B-смешивания B, соответствующая типу t_2, где t_2 удовлетворяет условию (Δ) при $m = n-1$. Очевидно, что $B \cong \omega_B\{\mathcal{M}^1_{n-1}, \mathcal{M}^1_{n-2}, \ldots, \mathcal{M}^{i_{n-2}}_{n-2}, C_1, C_2 \ldots\}$, где C_1, $C_2, \ldots$ — I-алгебры из ω_B-смешивания B, не соответствующие ни типу t_1 ни типу t_2. Тогда, так как $\mathcal{M}^1_{n-1} \cong \cong \mathcal{M}^1_{n-1} \oplus \mathcal{M}^1_{n-2} \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}^{i_{n-2}}_{n-2}$, то, в силу замечания 1, заключаем, что $B \cong \omega_{\mathcal{M}}\{\mathcal{M}^1_{n-1}, C_1, C_2 \ldots\}$, следовательно, $cchB = (i_m, \ldots, i_n, \infty, 0, i_{n-3}, \ldots, i_0; j_m, \ldots j_0)$, и значит $\mathcal{M} \cong B$.

Б) Пусть теперь $i_{n-2} = \infty$. Пусть $\{\mathcal{M}^i_{n-2}\}^{\omega}_{i=1}$ — счетное семейство I-алгебр из ω_B-смешивания B, соответствующих типу t_1, где тип t_1 удовлетворяет условию (Δ) при $m = n-2$. Пусть $\{\mathcal{M}^i_{n-1}\}^{\omega}_{i=1}$ — счетное семейство I-алгебр из ω_B-смешивания B, соответствующих типу t_2, где t_2 удовлетворяет условию (Δ) при $m = n-1$. В силу леммы 2 можно считать, что $B \cong \omega_B\{\mathcal{M}^1_{n-1}, \mathcal{M}^1_{n-2}, C_1, \ldots\}$. Очевидно, что $\mathcal{M}^i_{n-2} \oplus \mathcal{M}^i_{n-1} \cong \mathcal{M}^i_{n-1}$, тогда $B \cong \omega_{\mathcal{M}}\{\mathcal{M}^1_{n-1}, C_1 \ldots\}$, поэтому $cch\omega_{\mathcal{M}} = (i_m, \ldots, i_n\infty, 0, i_{n-3}, \ldots j_0)$, и в силу леммы 2, получаем, что $B \cong \mathcal{M}$.

Шаг 2. Применяя шаг 1 конечное число раз получим, что $B \cong C$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть B и C — произвольные I-алгебры, удовлетворяющие условию (2), $B \cong \omega_B\{B_1, B_2, \ldots\}$, $C \cong \omega_C\{C_1, C_2, \ldots\}$. Допустим, что*

$$cch\omega_B = (i_k, \ldots, i_{n-1}, i_{n-2}, i_{n-3}, \ldots j_0),$$

$$cch\omega_C = (i_k, \ldots, i_{n-1}, 0, i_{n-3}, \ldots, j_0),$$

тогда, если $i_{n-1}, i_{n-2} < \infty, i_{n-1} \neq 0$, то $B \cong C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}_{n-1}$ — произвольная I-алгебра из ω_B-смешивания B, соответствующая типу t_1, где тип t_1 удовлетворяет условию (Δ) при $m = n-1$. Пусть $\{\mathcal{M}^i_{n-2}\}_{i=1}^{i_{n-2}}$ — семейство всех I-алгебр из ω_B-смешивания, соответствующих типу t_2, где t_2 удовлетворяет условию (Δ). Тогда можно считать, в силу леммы 2, что $B \cong$ $\cong \omega_{\mathcal{M}}\{\mathcal{M}_{n-1}, \mathcal{M}^1_{n-2}, \ldots, \mathcal{M}^{i_{n-2}}_{n-2}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots\}$, где $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots$ — I-алгебры из ω_B-смешивания B, которые не соответствуют ни типу t_1, ни t_2. Очевидно, что $\mathcal{M}_{n-1} \cong \mathcal{M}_{n-1} \oplus \mathcal{M}^1_{n-2} \oplus \ldots$ $\ldots \oplus \mathcal{M}^{i_{n-2}}_{n-2}$, следовательно, $cch\omega_{\mathcal{M}} = cch\omega_C$. Тогда, апеллируя к лемме 2, заключаем, что $B \cong C$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть B и C — произвольные I-алгебры, удовлетворяющие условию (2), $B \cong \omega_B\{B_1, B_2, \ldots\}$ и $C \cong \omega_C\{C_1, C_2 \ldots\}$. Тогда если*

$$cch\omega_B = (\{i_s\}_{s=0}^k, \{j_s\}_{s=0}^k),$$

$$cch\omega_C = (i_k, \ldots, i_{n-1}, 0, \ldots, 0; j_m, \ldots, j_0)$$

и при этом выполнено условие, что $i_{n-1}, \ldots, i_m < \infty$, $i_{m-1} = \infty$, $i_{n-1} \neq 0$, то $B \cong C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3, $B \cong C'$, где $cchC' = (i_k, \ldots, i_{n-1}, 0, \ldots, 0, \infty, i_{m-2}, \ldots, i_0, \ldots j_0)$. Из предложения 2, где в качестве C берем C', нетрудно заключить, что $B \cong C$. Следствие доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.*Пусть B и C — произвольные I-алгебры, удовлетворяющие условию (2). Допустим, что $B \cong \cong \omega_B\{B_1, B_2, \ldots\}$, $C \cong \omega_C\{C_1, C_2, \ldots\}$. Тогда если*

$$cch\omega_B = (\{i_s\}_{s=0}^{k}; \{j_m\}_{m=0}^{k}),$$

$$cch\omega_C = (i_k, \ldots, i_0; j_m, \ldots, j_{n-1}, 0, 0, \ldots, j_{m-1}, 0, \ldots, 0)$$

и при этом выполнено условие, что $j_{n-1}, \ldots, j_m < \infty$, $j_{m-1} = = \infty$, $j_{n-1} \neq 0$, то $B \cong C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложений 2 и 4 и следствию 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Квазихарактеристику $S = (i_m, \ldots \ldots, i_0; j_m, \ldots, j_0)$ будем называть канонической, если выполненны следующие аксиомы:

01. если $i_m = \infty$, то $(\forall k < m)(i_k = 0)$;

02. если $i_m \neq \infty \& i_m \neq 0$, то $(\exists s)(i_s = \infty)\ \&\ (\forall k \neq s, m)(i_k = = 0)$;

03. если $i_m = 0$, то

$$(\exists s, s')(s < s')(i'_s = \infty, i_s < \infty)\&(\forall k \neq s, s')(i_k = 0);$$

04. если $j_m = \infty$, то $(\forall k < m)(j_k = 0)$;

05. если $j_m \neq \infty \& j_m \neq 0$, то $(\exists s)(j_s = \infty)\ \&\ (\forall k \neq s, m)(j_k = = 0)$;

06. если $j_m = 0$, то

$$(\exists s, s')(s < s')(j'_s = \infty, j_s < \infty)\&(\forall k \neq s, s')(j_k = 0);$$

07. если $i_m = 0$, то $j_m \neq 0$, и наоборот, если $j_m = 0$, то $i_m \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. ω-смешивание будем называть каноническим, если квазихарактеристика, соответствующая данному ω-смешиванию, является канонической.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Любые две I-алгебры, удовлетворяющие условию (2) и имеющие разные канонические квазихарактеристики, неизоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют следующие канонические квазихарактеристики: $cch\mathcal{A} = (\{i_s\}_{s=0}^k, \{j_s\}_{s=0}^k)$, $cch\mathcal{B} = (\{i'_s\}_{s=0}^k, \{j'_s\}_{s=0}^k)$. Допустим, что $i_m = k \neq \neq 0$, $i_s = \infty$, $i'_{m_1} = k_1 \neq 0$, $i'_{s_1} = \infty$. Остальные i_t, i'_t считаем равными нулю, на j_t можно наложить любые ограничения в соответствии с определением 3.

Пусть $m > m_1$. Допустим, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{M}_1, \ldots \ldots, \mathcal{M}_k$ — все I-алгебры из канонического ω-смешивания $\mathcal{A}$, соответствующие типу t, где t удовлетворяет условию (Δ) при $m = m$. Пусть f — изоморфизм между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Тогда $f(\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_k)$ — I-алгебра, имеющая характеристику суператомных (m, k), и единица этой I-алгебры принадлежит идеалу I. С другой стороны, такой подалгебры в $\mathcal{B}$ нет. Полученное противоречие доказывает, что $m = m_1$. Точно также можно доказать, что $k = k_1$.

Докажем, что $i_{s_1} = i'_{s_1}$. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют следующие канонические квазихарактеристики: $cch\mathcal{A} = (i_{n-1}, \ldots \ldots, i_0; j_{n-1}, \ldots, j_0)$, $cch\mathcal{B} = (i'_{n-1}, \ldots, i'_0; j'_{n-1}, \ldots, j'_0)$.

Будем считать, что $i_s = \infty, i'_{s_1} = \infty$ Остальные i_t, i'_t можно счиать равными нулю. Так как если существует такое $m > s$, что $i_m \neq 0$, то наша I-алгебра $\mathcal{A}$ есть прямая сумма I-алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1$ соответствует типу t и t удовлетворяет условию (Δ), а I-алгебра $\mathcal{A}_2$ такова, что $cch\mathcal{A}_2 = (0, \ldots, \infty, 0, \ldots, 0, j_{n-1}, \ldots)$. Поэтому достаточно рассмотреть доказательство для $\mathcal{A}_2$.

Допустим, что $s > s_1$. Тогда существует I-алгебра $\mathcal{M}$ из канонического ω-смешивания $\mathcal{B}$, соотвествующая типу t, который удовлетворяет условию (Δ) при $m = s$. Но такой подалгебры в $\mathcal{B}$ нет, следовательно, $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$. Полученное противоречие доказывает наше предложение.

ЛЕММА 3. *Любая I-алгебра, удовлетворяющая условию (2), имеет каноническую квазихарактеристику, по этой квазихарактеристике I-алгебра определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условию (2). Тогда $\mathcal{B} \cong \omega_{\mathcal{B}}\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots\}$. В силу следствия 2 можно считать, что $cch\omega_{\mathcal{B}} = = (i_k, 0, \ldots, i_{n-1}, 0, 0, \ldots, \infty, 0, \ldots, 0, j_m, \ldots, j_0)$, причем либо

$i_k = 0, i_{n-1} < \infty$, либо $i_{n-1} = 0$. По предложению 4 получаем: $cch\omega_B = (i_k, 0, \ldots, i_{n-1}, 0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots, 0, j_m, 0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots, 0)$. Следовательно, B имеет каноническую квазихарактеристику. В силу предложения 5, I-алгебра B определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в условиях леммы 2 под $cch\omega_A$, $cch\omega_B$ понимать канонические квазихарактеристики, то лемма 2 верна в обратную сторону, т. е., если $A \cong B$, то $cch\omega_A = cch\omega_B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Произвольная I-алгебра B называется неисчезающей, если для любого разложения $A \cong B \oplus C$ выполнено либо $A \cong B$, либо $A \cong C$.

I-алгебры, удовлетворяющие условию (2) и имеющие одну из следующих канонических квазихарактеристик, являются неисчезающими: $(\infty, 0, \ldots, 0; \infty, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots, 0, i_0; \infty, 0, \ldots, 0)$, где $i_0 = 0$. I-алгебры, имеющие другие канонические квазихарактеристики, не являются неисчезающими. Нетрудно заметить, что неисчезающих I-алгебр, удовлетворяющих условию (2), в точности $2n$.

ЛЕММА 4. *Любая I-алгебра, удовлетворяющая условию (2), есть прямая сумма конечного числа неисчезающих I-алгебр. Число неисчезающих I-алгебр, удовлетворяющих условию (2), конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условию (2). Пусть $cchA = (0, \ldots, i_n, 0, \ldots, \infty, 0, \ldots, j_m, 0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots, 0)$. Тогда $A \cong B \oplus C \oplus \mathcal{M}$, причем $cchB = (0, \ldots, \infty, 0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots, 0)$. Очевидно, что B — неисчезающая. Про C можно сказать, что $C \cong C_1 \oplus \ldots \oplus C_{i_n}$, причем все C_i соответствуют одному и тому же типу t, который в свою очередь удовлетворяет условию (Δ). Очевидно, что все C_i являются неисчезающими. Следовательно, C есть прямая сумма конечного числа неисчезающих. Точно также можно показать, что $\mathcal{M}$ есть прямая сумма конечного числа неисчезающих. В силу вышесказанного можно утверждать, что A — есть прямая сумма конечного числа неисчезающих I-алгебр, и число неисчезающих I-алгебр, удовлетворяющих условию (2), конечно. Лемма доказана.

3. Типы изоморфизма суператомных I-алгебр, характеристики $(i, 0, n); n \geq 4, i \in \{1, \infty\}$

В данном пункте будем рассматривать произвольные I-алгебры такие, что $rank(B) = \alpha < \infty$ и $B \mid_{\Sigma} \cong B_{\omega^{\alpha}}$. Пусть B удовлетворяет следующиму условию:

$$(\forall C \leq B)(r(C) = r(B) = (1, 0, n) \iff$$
$$\iff rank(C) = \alpha < \infty) \vee r(B) = (\infty, 0, n), n < \infty. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 2.

а) Для любого конечного $n \geq 4$ и для любого конечного ординала α существует конечное число неисчезающих I-алгебр, удовлетворяющих условию (3);

б) любая I-алгебра есть прямая сумма конечного числа неисчезающих.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем вести по индукции следующим образом: если теорема доказана для I-алгебры, имеющей характеристику $(1, 0, n)$, то докажем нашу теорему для I-алгебры, имеющей характеристику $(\infty, 0, n)$. Если теорема доказана для I-алгебры, имеющей характеристику $(\infty, 0, n)$, то докажем нашу теорему для I-алгебры, имеющей характеристику $(1, 0, n+1)$.

Базис индукции. Пусть $n = 4$ и B — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условию (3), тогда $r(B) = (1, 0, 4)$, следовательно, наша теорема непосредственно вытекает из леммы 4.

Если B — произвольная I-алгебра, удовлетворяющая условию (3), и $r(B) = (1, 0, n)$, то $B \cong \omega\{A_1, A_2 \ldots\}$, где A_i удовлетворяют условию (3) при $\alpha \leq n - 2$, $\alpha = rank(B)$. По индукционному предположению, для любого i I-алгебра A_i есть прямая сумма конечного числа неисчезающих. Поэтому можно считать, что $B \cong \omega\{B_1, B_2, \ldots\}$, где B_i — неисчезающие I-алгебры.Пусть $S \rightleftharpoons \{t$ типов $|(\exists i)(B_i$ соответствует типу $t)\}$. По индукции $\| S \| < \omega$. Значит если типу $t \in S$ соответствует лишь конечное число I-алгебр из данного ω-смешивания, то $\mathcal{B} \cong \omega\{\mathcal{B}_{i_1}, \mathcal{B}_{i_2} \ldots\} \oplus \oplus \mathcal{M}_{j_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_{j_k}$, где $\mathcal{M}_{j_1}, \ldots, \mathcal{M}_{j_k}$ — все I-алгебры из ω-смешивания $\mathcal{B}$, соответствующие типу t. Проделывая данную процедуру для каждого типа $t \in S$, для которого существует конечное число I-алгебр из ω-смешивания $\mathcal{B}$, соответствующих данному типу t (число таких типов конечно), получим, что $\mathcal{B}$ есть прямая сумма конечного числа неисчезающих. Если для каждого $k \leq n-2$ существует не более S_k неизоморфных неисчезающих I-алгебр, удовлетворяющих условию (3) при $n = k$, то существует не более $2^{S_0 + \ldots + S_{n-2}} < \infty$ I-алгебр $\mathcal{B}$ таких, что $r(\mathcal{B}) = (1, 0, n)$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию (3).

Пусть далее $r(\mathcal{B}) = (\infty, 0, n)$. Докажем, что такая I-алгебра есть прямая сумма конечного числа неисчезающих и число неисчезающих I-алгебр, соответствующих данному элементарному типу, конечно. Будем доказывать индукцией по $\alpha \geq 3$, где $\alpha = rank(\mathcal{B})$.

Пусть $\alpha = 3$, тогда $\mathcal{B} \cong \omega\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\}$, причем для каждого i имеем, что $r(\mathcal{A}_i) = (i, 0, k)$ $(i \in \{1, \infty\}, k \leq n-2)$ и данная I-алгебра удовлетворяет условию (3). В том и в другом случае по индукции (по n) можно считать, что все $\mathcal{A}_i$ неисчезающие. Пусть $S \rightleftharpoons \{t \text{ типов } |(\exists i)\ (\mathcal{A}_i \text{ соответствует типу } t)\}$. Можно считать, что $||S|| < \infty$. Тогда точно также, как и в случае $r(\mathcal{B}) = (1, 0, n)$ можно доказать, что $\mathcal{B}$ есть прямая сумма конечного числа неисчезающих и число неисчезающих I-алгебр, соответствующих данному элементарному типу, конечно. Для $\alpha = 3$ доказано.

Пусть для любого ординала $\beta < \alpha$ теорема доказана. Пусть $\mathcal{B} \cong \omega\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots\}$. Очевидно, что $rank(\mathcal{A}_i) < rank(\mathcal{B})$. В то же время либо $r_3(\mathcal{A}_i) < n$, либо $r_3(\mathcal{A}_i) = n$, $r_1(\mathcal{A}_i) = 1$, либо $r(\mathcal{A}_i) = r(\mathcal{B})$. В первом или во втором случаях, точно также, как и раньше, можно считать, что все $\mathcal{A}_i$ неисчезающие. Пусть выполняется третий случай альтернативы. Тогда по индукции (по α) получаем, что $\mathcal{A}_i$ есть пямая сумма конечного числа неисчезающих. Нетрудно заметить, что $||S|| < \infty$, а именно: если обозначить через

S_k, $k < \alpha$, количество неизоморфных I-алгебр $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию (3), и таких, что $r_3(\mathcal{A}) < r_3(\mathcal{B})$, $k = rank(\mathcal{A})$, то $||S|| < 2^{S_0 + S_1 + \ldots + S_{\alpha-1}}$. Если типу $t \in S$ соответствует конечное число I-алгебр $\mathcal{M}_{j_1}, \ldots, \mathcal{M}_{j_k}$ из данного ω-смешивания, то $\mathcal{B} \cong \omega\{\mathcal{A}_{i_1}, \mathcal{A}_{i_2} \ldots\} \oplus \mathcal{M}_{j_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_{j_k}$.

Проделывая данную процедуру для каждого типа $t \in S$, для которого существует конечное число I-алгебр из ω-смешивания $\mathcal{B}$, соответствующих данному типу t (число таких типов конечно), получим для $\mathcal{B}$ нужное представление. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Любая неисчезающая I-алгебра, удовлетворяющая условию (3), либо представима в виде $\mathcal{B} \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^{\omega}$, либо $r(\mathcal{B} = (1, 0, k)$, $k = 1, 2$, причем все I-алгебры $\mathcal{A}_i$ неисчезающие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r(\mathcal{B}) = (\infty, 0, k)$, тогда если $(k = 1 \vee k = 2)$, то $\mathcal{B} \cong (\mathcal{A} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A})^{\omega}$, где $r(\mathcal{A}) = (i, 0, k)$, $(i = 1 \vee i = \infty)$ и $rank(\mathcal{A}) < rank(\mathcal{B})$. В этом случае будем считать, что $1_{\mathcal{B}} \in I$. Если $k = 3$, то также будем записывать $\mathcal{B} \cong (\mathcal{A} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A})^{\omega}$, где $r(\mathcal{A}) = (i, 0, 1)$, $(i = 1 \vee i = \infty)$, $rank(\mathcal{A}) < rank(\mathcal{B})$. В этом случае будем записывать $1_{\mathcal{B}} \notin I$. Если $k \geq 4$, то нужный результат следует из теоремы 2. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для любых конечных m, n, для любого элементарного типа (α, β, m) существует счетное число неизоморфных I-алгебр $\mathcal{B}$ таких, что $r(\mathcal{B}) = (\alpha, \beta, m)$ и $rank(\mathcal{B}) = n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная I-алгебра и $r(\mathcal{B}) = (\alpha, \beta, m)$. Тогда если $m = 1, 2$, то доказательство очевидно. Пусть $m > 3$. Тогда $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, где $r(\mathcal{A}_1) = (\alpha, 0, m)$ и $r(\mathcal{A}_2) = (\beta, 0, m-1)$. Можно считать, что $\alpha(\beta) = 1$ либо $\alpha(\beta) = \infty$. Отсюда видно, что наше следствие достаточно доказать для таких I-алгебр $\mathcal{B}$, что $r(\mathcal{B}) = (\alpha, 0, m)$, где $(\alpha = 1$ либо $\alpha = \infty)$. Если $\alpha = \infty$, то доказательство следует из теоремы 2. Пусть $\alpha = 1$. Достаточно показать, что $\mathcal{A}$ есть прямая сумма конечного числа I-алгебр, удовлетворяющих условию (3). Для доказательства воспользуемся методом индукции.

Базис индукции. Пусть $m = 4$, тогда из п.1 следует, что $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \oplus \mathcal{C} \oplus \mathcal{M}$, где $cch\mathcal{A} = (0,\ldots,\infty,0,\ldots,0,\infty,0,\ldots,0)$. Про $\mathcal{C}$ и $\mathcal{M}$ можно сказать, что $r(\mathcal{C}) = (i,0,1)$ и $r(\mathcal{B}) = (j,0,1)$. Легко увидеть, что $\mathcal{A},\mathcal{C},\mathcal{M}$ удовлетворяют условию (3).

Пусть $r(\mathcal{B}) = (\alpha,0,m)$. В силу точечности формулы V_m существует разложение $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$, где либо $\mathcal{A}$, либо $\mathcal{C}$ является V_m-элементом. Следовательно, существует такое разложение $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (3). В силу точечности формулы V_m получаем, что $r_3(\mathcal{C}) < r_3(\mathcal{B})$. Поэтому, в силу индукционного предположения, $\mathcal{C}$ есть также прямая сумма конечного числа I-алгебр, удовлетворяющих условию (3). Следовательно, $\mathcal{B}$ есть прямая сумма конечного числа I-алгебр, удовлетворяющих условию (3). Следствие доказано.

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная неисчезающая I-алгебра и пусть $\mathcal{B} \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega$, где все $\mathcal{A}_i$ неисчезающие. Определим по индукции следующее множество $T_\mathcal{B}$ (множество совместимых с $\mathcal{B}$ типов):

если $r(\mathcal{B}) = (i,0,1), i < \infty$, то $T_\mathcal{B} \rightleftharpoons \emptyset$;

если $r(\mathcal{B}) = (\infty,0,1)$, то при $rank(\mathcal{B}) = n$ положим $T_\mathcal{B} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \{t_0,\ldots,t_{n-1}\}$, где t_k удовлетворяет условию (Δ) для $m = k$;

если $r(\mathcal{B}) = (i,0,2), i < \infty$, то $T_\mathcal{B} \rightleftharpoons \emptyset$;

если $r(\mathcal{B}) = (\infty,0,2)$, то при $rank(\mathcal{B}) = n$ положим $T_\mathcal{B} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \{t_0,\ldots,t_{n-1}\}$, где t_k удовлетворяет условию (Δ Δ) для $m = k$;

если $r(\mathcal{B}) = (1,0,3)$, то при $rank(\mathcal{B}) = n$ положим $T_\mathcal{B} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \{t_0,\ldots,t_{n-1}\}$, где t_k удовлетворяет условию (Δ Δ) для $m = k$.

Пусть $\mathcal{B} \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega$, и либо $r(\mathcal{B}) = (\infty,0,n), n \geq 3$, либо $r(\mathcal{B}) = (1,0,n), n \geq 4$. Допустим, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию (3). Тогда положим $T_\mathcal{B} \rightleftharpoons \cup T_{\mathcal{A}_i} \cup \bigcup_{i=1}^{N} t_{\mathcal{A}_i}$, где $t_{\mathcal{A}_i}$ — тип, соответствующий I-алгебре $\mathcal{A}_i$. Иногда $T_\mathcal{A}$ будем обозначать через T_s, где s — тип, соответствующий I-алгебре $\mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Множество T_B определенно только для неисчезающих I-алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть $\mathcal{A}$ — неисчезающая I-алгебра, удовлетворяющая условию (3). Пусть либо $r(\mathcal{A}) = (\infty, 0, n)$, либо $r(\mathcal{A}) = (1, 0, n)$. В этих случаях $t \in T_{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_t \cong \mathcal{A}$ ($\mathcal{B}_t$ — соответствует типу t).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ удовлетвояет условиям педложения 6.

($\Rightarrow$) Докажем, что если $t \in T_{\mathcal{A}}$, то $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_t \cong \mathcal{A}$.

Будем доказывать индукцией по n, где n — ранг Фреше I-алгебры $\mathcal{A}$. Пусть для начала либо $r(\mathcal{A}) = (\infty, 0, m)$, $m \geq 3$, либо $r(\mathcal{A}) = (1, 0, m), m \geq 4$.

Базис индукции. Пусть $n = 1$. Тогда $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^{\omega}$. Из определения множества $T_{\mathcal{A}}$ следует, что либо а) $\mathcal{B}_t$ совпадает с одной из I-алгебр $\mathcal{A}_i$ и в этом случае доказательство очевидно, либо б) существует такое i, что $t \in T_{\mathcal{A}_i}$, но $\mathcal{A}_i$ — атом либо лежащий в идеале, либо нет, следовательно, $T_{\mathcal{A}_i} = \emptyset$, и случай "б" невозможен.

Пусть для всех ординалов, меньших n, предложение доказано. Пусть $\mathcal{A}^1 \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^{\omega} \oplus \mathcal{B}_t$. Мы хотим доказать, что $\mathcal{A}^1 \cong \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}^1 \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^{\omega} \oplus \mathcal{B}_t$ то $\mathcal{A}^1 \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N \oplus \mathcal{B}_t) \oplus (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^{\omega}$. Если $\mathcal{B}_t$ совпадает с одной из I-алгебр $\mathcal{A}_i$, то на $\mathcal{A}^1$ можно смотреть как на ω-смешивание, т. е. $\mathcal{A}^1 \cong \omega\{\mathcal{B}_t, (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_N)^{\omega}\}$, и, в силу леммы 2, можно заключить, что $\mathcal{A}^1 \cong \mathcal{A}$. Пусть теперь $\mathcal{B}_t$ не совпадает ни с одной из I-алгебр $\mathcal{A}_i$. Тогда существует такое i, что $t \in T_{\mathcal{A}_i}$. Без ограничения общности можно считать, что $i = 1$. Легко видеть, что $rank(\mathcal{A}_i) < rank(\mathcal{A})$, следовательно, в силу индукционного предположения, для таких I-алгебр теорема верна, значит $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{B}_t \cong \mathcal{A}_1$. В силу вышесказанного, $\mathcal{A}^1 \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^{\omega} \cong \mathcal{A}$.

Если $r(\mathcal{A}) = (i, 0, 1), (i, 0, 2), (i, 0, 3)$, то доказательство не требует особых пояснений.

($\Leftarrow$) Теперь докажем, что если $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_t \cong \mathcal{A}$, то $t \in T_{\mathcal{A}}$.

Если $r(\mathcal{A}) = (i,0,1),(i,0,2),(i,0,3)$, то доказательство непосредственно следует из определения $T_{\mathcal{A}}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — неисчезающая I-алгебра, удовлетворяющая условию (3), и либо $r(\mathcal{A}) = (\infty, 0, m), m \geq 3$, либо $r(\mathcal{A}) = (1, 0, m), m \geq 4$. Нужное нам утверждение будем доказывать индукцией по n, где n — ранг Фреше I-алгебры $\mathcal{A}$.

Базис индукции $n = 1$, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_t \cong \mathcal{A}$. Тогда t описывает I-алгебру, состоящую из одного атома, который либо принадлежит идеалу, либо нет. Следовательно, $t \in T_{\mathcal{A}}$.

Пусть $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_t \cong \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{B}_t \leq \mathcal{A}$. Пусть f — произвольный изоморфизм между I-алгебой $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_t$ и I-алгеброй $\mathcal{A}$. Покажем, что существует такое конечное M, что $\mathcal{B}_t \leq \leq \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_M$, где $\mathcal{A}_i$ — I-алгебры из ω-смешивания $\mathcal{A}$, причем $\mathcal{A}_{N+i} = \mathcal{A}_i$. Допустим, что такого M не существует. Тогда $f(\mathcal{B}_t) = 1_{\mathcal{A}} \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{M}_i$, $s < \infty$, $\mathcal{M}_i \leq \mathcal{A}_i$, причем $rank(\mathcal{M}_i) < rank(\mathcal{A})$. В таком случае $rank(f(\mathcal{B}_t)) = n = rank(\mathcal{A})$, следовательно, с одной стороны, $\mathcal{B}_t|_\Sigma \oplus \mathcal{A}|_\Sigma \cong 2\mathcal{A}|_\Sigma$, и, с другой стороны, $\mathcal{B}_t|_\Sigma \oplus \mathcal{A}|_\Sigma \cong \mathcal{A}|_\Sigma$ Противоречие. Итак, существует такое число $M < \infty$, что $\mathcal{B}_t \leq \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_M$. Тогда $\mathcal{B}_t \cong \mathcal{B}_t^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_t^M$, где $\mathcal{B}_t^i \leq \mathcal{A}_i$. Ввиду неисчезаемости I-алгебры $\mathcal{B}_t$, можно считать, что $\mathcal{B}_t^1 \cong \mathcal{B}_t$ и все $\mathcal{B}_t^i = 0, i > 1$. Если $\mathcal{B}_t \cong \mathcal{A}_1$, то $t \in T_{\mathcal{A}}$. Пусть $\mathcal{B}_t \ncong \mathcal{A}_1$, тогда $\mathcal{B}_t \leq \mathcal{A}_1$, следовательно, $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_t \oplus \mathcal{M}$ для некоторой I-алгебры $\mathcal{M}$. Так как I-алгебра $\mathcal{A}_1$ неисчезающая и $\mathcal{B}_t \ncong \mathcal{A}_1$, то $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{M}$. Поэтому $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{B}_t \oplus \mathcal{A}_1$. Про $\mathcal{A}_1$ нам известно, что $rank(\mathcal{A}_1) < rank(\mathcal{A})$. Далее применяем индукционный шаг и получаем, что $t \in T_{\mathcal{A}}$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть $\mathcal{A}$ — неисчезающая I-алгебра, удовлетворяющая условию (3). Предположим, что $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega$, тогда если $t \in T_{\mathcal{A}}$, то $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_t \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{A}_t$ совпадает с одной из I-алгебр $\mathcal{A}_i$, то, в силу леммы 2, заключаем, что $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_t \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega$. Пусть для любого i верно, что $\mathcal{A}_t \ncong \mathcal{A}_i$, тогда, по определению $T_{\mathcal{A}}$, существует такое i, что $t \in T_{\mathcal{A}_i}$. Без ограничения общности можно считать, что $i = 1$. Следовательно, в силу предложения 6,

$\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_t \cong \mathcal{A}_1$. Тогда $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega \cong (\mathcal{A}_t \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega$. В силу вышесказанного, можно заключить, что $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_t \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega$. Предложение доказано.

ЛЕММА 5. *Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — произвольные I-алгебры, удовлетворяющие условию $(*)$, то $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $T_\mathcal{A} = T_\mathcal{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

($\Rightarrow$) Докажем, что если $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, то $T_\mathcal{A} = T_\mathcal{B}$. Допустим, что $T_\mathcal{A} \neq T_\mathcal{B}$. Это означает, что либо существует тип $t \in T_\mathcal{A} \setminus T_\mathcal{B}$, либо существует тип $t \in T_\mathcal{B} \setminus T_\mathcal{A}$. Пусть для определенности $t \in T_\mathcal{A} \setminus T_\mathcal{B}$. Тогда так как $t \in T_\mathcal{A}$, то по предложению 6 имеем, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}_t$. С другой стороны, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, следовательно, $\mathcal{B} \cong \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}_t$, т. е. $t \in T_\mathcal{B}$. Противоречие.

($\Leftarrow$) Докажем, что если $T_\mathcal{A} = T_\mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N)^\omega$, $\mathcal{B} \cong (\mathcal{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_N)^\omega$. Обозначим $T \rightleftharpoons T_\mathcal{A} = T_\mathcal{B}$. Положим:

$B \rightleftharpoons \{$ типов $t \mid t \in T, \mathcal{A}_t$ изоморфна одной из $\mathcal{A}_i$,
$\mathcal{A}_t$ не изоморфна ни одной из $\mathcal{B}_i\}$;

$A \rightleftharpoons \{$ типов $t \mid t \in T, \mathcal{A}_t$ изоморфна одной из $\mathcal{B}_i$,
$\mathcal{A}_t$ не изоморфна ни одной из $\mathcal{A}_i\}$.

Применяя нужное число раз предложение 7, получим, что

$$\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_N \oplus \{\mathcal{A}_t\}_{t\in A})^\omega$$

$$\mathcal{B} \cong (\mathcal{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_N \oplus \{\mathcal{A}_t\}_{t\in B})^\omega$$

Следовательно, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Множество типов T назовем тривиальным, если либо все $t_i \in T$ удовлетворяют условию (Δ), либо все $t_i \in T$ удовлетворяют условию ($\Delta\Delta$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Всякую I-алгебру $\mathcal{A}$ такую, что $T_\mathcal{A}$ — тривиальное множество, будем называть тривиальной I-алгеброй.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если $\mathcal{A}$ — тривиальная I-алгебра, то по такой I-алгебре множество $T_\mathcal{A}$ восстанавливается однозначно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — тривиальные I-алгебры, тогда из того, что $T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B}}$, не следует, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Действительно, если I-алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таковы, что $r(\mathcal{A}) = (1,0,3)$, $r(\mathcal{B}) = (\infty,0,1)$ и $rank(\mathcal{A}) = rank(\mathcal{B})$, то $T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B}}$ и одновременно $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Для любого нетривиального множества типов $T = \{t_1, \ldots, t_N\}$, где t_i — типы, соответствующие неисчезающим I-алгебрам, существует единственная с точностью до изоморфизма I-алгебра $\mathcal{B}$ такая, что $cl(T) \rightleftharpoons \cup T_{t_k} \cup \cup \cup t_k = T_{\mathcal{B}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве $\mathcal{B}$ возьмем $\mathcal{B} \cong \cong (\mathcal{A}_{t_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_{t_N})^{\omega}$. Тогда $\cup T_{t_k} \cup \cup t_k = T_{\mathcal{B}}$. Следовательно, $\mathcal{B}$ — искомая I-алгебра. Однозначность следует из леммы 5 (так как I-алгебра $\mathcal{B}$ определяется однозначно нетривиальным множеством $T_{\mathcal{B}}$). Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Конечное нетривиальное множество типов T назовем допустимым, если существует неисчезающая I-алгебра $\mathcal{A}$, удовлетворяющая условию (3), причем такая, что $T = T_{\mathcal{A}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $T = \{t_1, \ldots, t_N\}$ — допустимое множество, и пусть $\mathcal{A}$ такова, что $T = T_{\mathcal{A}}$. Тогда $\mathcal{A} \cong \omega_{\mathcal{A}}\{\mathcal{A}_{t_1}, \ldots, \mathcal{A}_{t_N}, \ldots\}$, где $\mathcal{A}_{t_{N+i}} = \mathcal{A}_{t_i}$. Такое ω-смешивание будем называть допустимым, а соответствующую квазихарактеристику будем называть допустимой и обозначать через $nsch(\mathcal{A}) \rightleftharpoons cch\omega_{\mathcal{A}}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — произвольные неисчезающие I-алгебры, удовлетворяющие условию (3). Тогда для того чтобы $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, необходимо и достаточно, чтобы $nsch(\mathcal{A}) = nsch(\mathcal{B})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточность следует из леммы 2.

Необходимость. Пусть $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Обозначим через $T \rightleftharpoons \rightleftharpoons T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B}}$. Если T — нетривиальное множество, то допустимое ω-смешивание по данной I-алгебре определяется однозначно, следовательно, $nsch(\mathcal{A}) = nsch(\mathcal{B})$. Если T — тривиальное множество, то из определения $nsch$ для тривиальных I-алгебр следует, что $nsch(\mathcal{A}) = nsch(\mathcal{B})$. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. $t \leq t' \iff t \in T_{t}'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Тип t будем называть максимальным в I- алгебре $\mathcal{A}$, если $(\forall t' \in T_{\mathcal{A}})(t' \geq t) \Longrightarrow (t' = t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть $\mathcal{A}$ произвольная неисчезающая I-алгебра, удовлетворяющая условию (3). Тогда если $\mathrm{nsch}_t(\mathcal{A}) = \infty$, то для любого $t' \leq t$ выполнено, что $nsch_{t'}(\mathcal{A}) = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная неисчезающая I-алгебра. Легко построить изоморфную ей I-алгебру, которая имеет допустимое ω-смешивание.

Действительно, если $T_{\mathcal{B}} = \{t_1, \ldots, t_N\}$, то положим $\mathcal{A} \cong (\mathcal{A}_{t_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_{t_N})^{\omega}$. В этом случае $\mathcal{A} \cong \omega_{\mathcal{A}}\{\mathcal{A}_{t_1}, \ldots, \mathcal{A}_{t_N}, \ldots\}$, где $\mathcal{A}_{t_{N+i}} = \mathcal{A}_{t_i}$. По определению 9 можно заключить, что данное ω-смешивание является допустимым. В силу теоремы 3 заключаем, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Типом I-алгебры $\mathcal{A}$ будем называть множество максимальных в данной I-алгебре типов.

Заключение

Пусть дана произвольная I-алгебра $\mathcal{B}$, удовлетворяющая условию:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}|_{\Sigma} \cong \mathcal{B}_{\omega^{\alpha} n}, \text{ где } n, \alpha < \infty, \\ \text{предпологается, что } r_3(\mathcal{B}) < \infty. \end{array}\right\} (\Delta\Delta\Delta)$$

Опишем все типы изоморфизма таких I-алгебр.

В п.3 было доказано, что любая I-алгебра, удовлетворяющая условию $(*)$, есть прямая сумма конечного числа неисчезающих I-алгебр. С другой стороны, очевидно, что если $\mathcal{B}$ не удовлетворяет условию $(*)$, то $\mathcal{B}$ есть также прямая сумма конечного числа неисчезающих. (Это было показано при доказательстве следствия из теоремы 2.) Мы знаем, что $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_n$, где $\mathcal{B}|_{\Sigma} \cong \mathcal{B}_{\omega^{\alpha}}$. Следовательно, $\mathcal{B}$ есть также прямая сумма конечного числа неисчезающих. Очевидно, что такое разложение для $\mathcal{B}$ неоднозначно. Однако можно утверждать, что существует единственное разложение произвольной

I-алгебры $\mathcal{B}$, удовлетворяющей условию ($\Delta\Delta\Delta$), в конечную сумму неисчезающих, которые в свою очередь несравнимы в смысле " $\leq$ " между собой.

Действительно, допустим, что мы имеем два разных разложения: $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}^N \cong \mathcal{B}^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^S, S > N$.

Пусть f — соответствующий изоморфизм, тогда $f(\mathcal{A}^1) = \mathcal{B}_1^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_1^S$, где $\mathcal{B}_1^k \leq \mathcal{B}^k$. В силу неисчезаемости I-алгебры $\mathcal{A}^1$ можно считать, что $f(\mathcal{A}^1) = \mathcal{B}_1^1 \leq \mathcal{B}^1$. Покажем, что $f(\mathcal{A}^1) = \mathcal{B}^1$. Пусть это не так. Тогда $f(\mathcal{A}^1) \neq \mathcal{B}^1$, следовательно, $f^{-1}(\mathcal{B}^1) \neq \mathcal{A}^1$. Тогда в силу неисчезаемости $\mathcal{B}^1$ можно считать, что $f^{-1}(\mathcal{B}^1) = \mathcal{A}^2$. В этом случае $\mathcal{A}^1 \leq \mathcal{A}^2$. Противоречие. Итак, $f(\mathcal{A}^1) = \mathcal{B}^1$. Продолжая аналогичным образом, мы получим, что

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}^N \cong \mathcal{A}^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}^N \oplus \mathcal{B}^{N+1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}^S, \quad S > N.$$

Отсюда легко видеть, что $\mathcal{B}^{N+1} = 0, \ldots, \mathcal{B}^S = 0$.

Определим допустимую квазихарактеристику для произвольной I-алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющей условию ($\Delta\Delta\Delta$). Пусть $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}^N$, где все $\mathcal{A}^i$ несравнимы между собой, тогда положим $nsch(\mathcal{A}) = (nsch(\mathcal{A}^1), \ldots$ $\ldots, nsch(\mathcal{A}^N))$, тогда для произвольных I-алгебр верна следующая

ТЕОРЕМА 4. *Для произвольной I-алгебры, удовлетворяющей условию* ($\Delta\Delta\Delta$), *выполнено* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \iff nsch(\mathcal{A}) = nsch(\mathcal{B})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы следует из теоремы 3 и однозначного разложения произвольной I-алгебры $\mathcal{B}$, удовлетворяющей условию ($\Delta\Delta\Delta$), в конечную сумму неисчезающих I-алгебр, несравнимых между собой.

Литература

1. ПАЛЬЧУНОВ Д.Е. О неразрешимости теории булевых алгебр с выделенным идеалом // Алгебра и логика. - 1986.- Т.25, N 3.- С.326--346.

2. ПАЛЬЧУНОВ Д.Е. Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели// Труды Института Математики СО РАН. Т.25.- 1993.- С.104-131.

3. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры.– Новосибирск: Наука, 1988.

4. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика.– М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
6 августа 1996 года