

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И ЭКСПЕРТНЫЕ СИСТЕМЫ (Вычислительные системы)

1996 год

Выпуск 157

УДК 621.31:534.4

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ И ОБНАРУЖЕНИЯ МОМЕНТОВ ИХ НАЧАЛА В ГАУССОВСКОМ ШУМЕ¹

А.В.Кельманов, О.А.Кутненко

В в е д е н и е

Во многих приложениях, связанных с обработкой наблюдений или сигналов, в частности, в технической диагностике, медицине, криминалистике, эконометрике, геофизике, при обработке данных в системах связи, при автоматической обработке изображений и речевых сигналов и т.п., приходится сталкиваться с необходимостью решения задач извлечения информации из квазипериодической последовательности зашумленных данных (импульсов), моменты времени начала которых неизвестны.

К указанным задачам относится рассматриваемая в данной работе задача совместного обнаружения и распознавания импульсов по зашумленной выборке, содержащей квазипериодическую последовательность импульсов из неизвестного класса. Предполагается, что эталонные импульсы, описывающие классы, отличаются своей формой, но имеют одинаковую длительность. При этом моменты появления импульсов в наблюдаемой выборке и

¹Работа выполнена в рамках проекта № 94-01-00169-а, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований.

их число неизвестны, а интервал между началами соседних импульсов лежит в некотором фиксированном диапазоне, ширина которого не меньше длительности самого импульса. Анализируется случай, когда априорные вероятности классов равны, а дисперсия помехи известна.

От хорошо изученных задач о разладке случайных последовательностей сигналов [1-5] рассматриваемая задача отличается тем, что в ней, наряду с обнаружением моментов времени изменения свойств последовательности, требуется классификация наблюдаемых данных. А от традиционных для статистической радиотехники задач совместного обнаружения и различения сигналов [6-8] данную задачу отличает необходимость принятия решения не об отдельно взятых объектах (импульсах), а о совокупности объектов, рассматриваемых как единое целое.

Цель данной работы состоит в построении и обосновании вычислительного алгоритма, обеспечивающего эффективное решение задачи совместного распознавания квазипериодической последовательности, состоящей из одинаковых импульсов фиксированной длительности и обнаружения моментов начала этих импульсов в условиях, когда наблюдения искажены гауссовской помехой с известной дисперсией.

Приведенное решение задачи относится к апостериорным методам решения подобных задач (т.е. к методам принятия решения по полной выборке) и опирается на байесовский подход, который при равных априорных вероятностях распознаваемых классов приводит к решающему правилу совместного обнаружения и распознавания, основанному на принципе максимального правдоподобия. Максимизация функции правдоподобия сведена к минимизации аддитивного функционала, которая осуществляется методом динамического программирования.

В рамках принятой квазипериодической модели сигнала получены формулы пошаговой оптимизации, составляющие сущность вычислительного алгоритма, учитывающие специфику решаемой задачи и обеспечивающие получение совместного результата распознавания после-

довательности импульсов и обнаружения моментов их начала. Дана оценка временной и емкостной сложности алгоритма. Найдена верхняя граница вероятности ошибки распознавания. Вместе с конструктивным вычислительным алгоритмом в работе приведены данные численного моделирования.

1. Постановка задачи

Пусть $u_n(k) \in \mathcal{R}$ (\mathcal{R} — числовая прямая), $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, — заданная детерминированная последовательность, описывающая k -й класс, которая при каждом $k = 1, 2, \dots, K$, $K \geq 2$, обладает свойством:

$$0 < \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(k) < \infty; u_n(k) = 0, \quad n < 0, \quad n > q-1; \\ u_0(k) \neq 0, \quad u_{q-1}(k) \neq 0. \quad (1)$$

Условимся называть вектор $U(k) = (u_0(k), u_1(k), \dots, u_{q-1}(k))$ эталонным импульсом k -го класса, а величину $q \geq 1$ — длиной импульса. Пусть $x_n(k)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, — временной ряд, образованный путем почти периодического повторения эталонного импульса k -го класса, т.е.:

$$x_n(k) = \begin{cases} u_{n-n_i}(k), & n = n_i, n_i + 1, \dots, n_i + q - 1, \\ 0, & n = n_i + q, \dots, n_{i+1} - 1, \end{cases} \quad (2) \\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где $\dots, n_{-i}, \dots, n_{-1}, n_0, n_1, \dots, n_{i-1}, n_i, \dots$, — почти периодическая последовательность моментов времени начала импульсов.

Под почти периодической детерминированной последовательностью моментов времени n_i , $i = 0, \pm 1, \dots$, условимся понимать последовательность, для которой

$$q \leq T_{\min} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}, \quad (3)$$

где T_{\min}, T_{\max} — минимальное и максимальное расстояния между двумя последовательными импульсами. Значения

T_{\min}, T_{\max} и q будем считать известными. Величина

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{i=-M}^M (n_i - n_{i-1}) = T \quad (4)$$

есть средний интервал ("период") повторения импульсов в бесконечной последовательности.

Предположим, что наблюдаемый временной ряд искажается аддитивной помехой, т.е.:

$$y_n = x_n(k) + \varepsilon_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5)$$

где ε_n — гауссовская последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих нулевое математическое ожидание $M\varepsilon_n = 0$ и известную дисперсию $M\varepsilon_n^2 = \sigma^2 < \infty$.

Пусть наблюдаемая выборка $\mathbf{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ длины N содержит неизвестное число $M \geq 1$ полных импульсов фиксированной длины q из неизвестного класса k , $k \in \{k\} = \{1, 2, \dots, K\}$, и, возможно, неполные импульсы в начале и/или в конце выборки (см. рис.1). Последовательности n_0, n_1, \dots, n_{M-1} поставим в соответствие начала M полных импульсов. Моменты времени начала неполных импульсов в начале и конце выборки обозначим через n_{-1} и n_M соответственно. Априорные вероятности $P(k)$ классов $k = 1, 2, \dots, K$ будем считать одинаковыми.

Задача состоит в том, чтобы определить, к какому именно классу k из множества $\{k\}$ относится выборка $\mathbf{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ длины N , содержащая неизвестное число M импульсов $U(k)$ фиксированной длины q , а также оценить моменты времени n_i , $i = -1, 0, \dots, M$, начала этих импульсов в квазипериодической последовательности (2), удовлетворяющей ограничению (3), при известной дисперсии σ^2 помехи. Сопутствующей задачей является оценивание средней периодичности импульсов в выборке. Таким образом, указанная задача относится к задачам совместного распознавания (импульса) и обнаружения или оценивания (моментов появления импульсов)

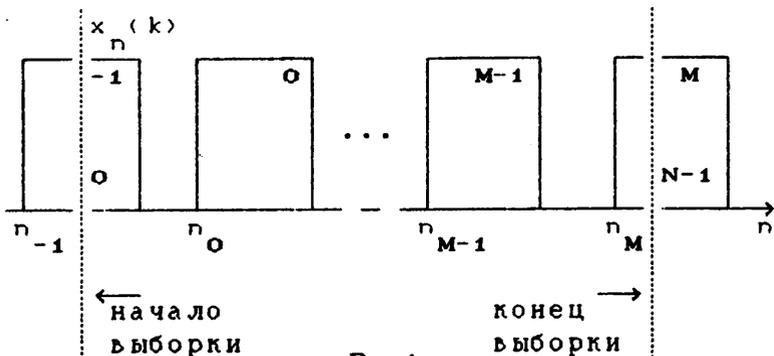


Рис.1

2. Функция правдоподобия

Плотность распределения случайного вектора \mathbf{Y} или совместное распределение наблюдаемых случайных величин y_0, y_1, \dots, y_{N-1} , как видно из (5), полностью определяется вектором $\mathbf{X}(k) = (x_0(k), x_1(k), \dots, x_{N-1}(k))$ и плотностью распределения вектора шума $\mathbf{E} = (\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{N-1})$:

$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{Y}; \mathbf{X}(k), \sigma^2) &= \\
 &= (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - x_n(k))^2\right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Поэтому для логарифмической функции правдоподобия имеем:

$$\begin{aligned}
 L = \text{Lnp}(\mathbf{Y}; \mathbf{X}(k), \sigma^2) &= \\
 &= -\frac{N}{2} \text{Lp}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - x_n(k))^2. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Пусть выборка длины N содержит $M \geq 1$ полных импульсов и, возможно, неполные импульсы в начале

и/или в конце выборки. Тогда в соответствии с (1), (2) и (3) в формулах (6) и (7)

$$x_n(k) = \sum_{i=-1}^M u_n - n_i(k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

так что функция правдоподобия

$$p(\mathbf{Y}; \mathbf{X}(k), \sigma^2) =$$

$$\begin{aligned} &= (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n - \sum_{i=-1}^M u_n - n_i(k)\right)^2\right\} = \\ &= p(\mathbf{Y}; \mathbf{U}(k), \sigma^2, n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M) \end{aligned} \quad (9)$$

и ее логарифм

$$\begin{aligned} L &= \text{Lnp}(\mathbf{Y}; \mathbf{U}(k), \sigma^2, n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M) = \\ &= -\frac{N}{2} \text{Ln}(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n - \sum_{i=-1}^M u_n - n_i(k)\right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

есть функции, зависящие от параметров $\sigma^2, n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M$ и $\mathbf{U}(k)$, среди которых неизвестными являются $n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M$ и k (напомним, что импульс \mathbf{U} для каждого класса $k = 1, 2, \dots, K$ предполагается заданным, а дисперсия σ^2 известной).

Раскроем сумму во втором члене (10) логарифмической функции правдоподобия. При этом учтем, что возможны два случая расположения сигнала $x_n(k)$ в начале (конце) выборки: 1) левая (правая) граница выборки пересекает импульс на две части, 2) левая (правая) граница выборки не разбивает импульс. Таким образом, возможны 2×2 формы записи суммы, входящей в функцию правдоподобия. Обозначив

$$\begin{aligned}
 A_{-1}(n_{-1}, k) &= \sum_{n=0}^{q+n_{-1}-1} u_{n-n_{-1}}(k) [u_{n-n_{-1}}(k) - 2y_n] = \\
 &= \sum_{j=-n_{-1}}^{q-1} u_j(k) [u_j(k) - 2y_{j+n_{-1}}]; \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_M(n_M, k) &= \sum_{n=n_M}^{N-1} u_{n-n_M}(k) [u_{n-n_M}(k) - 2y_n] = \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1-n_M} u_j(k) [u_j(k) - 2y_{j+n_M}]; \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_i(n_i, k) &= \sum_{n=n_i}^{n_i+q-1} u_{n-n_i}(k) [u_{n-n_i}(k) - 2y_n] = \\
 &= \sum_{j=0}^{q-1} u_j(k) [u_j(k) - 2y_{j+n_i}], \quad i=0, \dots, M-1, \quad (13)
 \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
 S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M, k) &= \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} [y_n - x_n(k)]^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n - \sum_{i=-1}^M u_{n-n_i}(k) \right)^2 =
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} S_1(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M, k) = \\ \quad = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \sum_{i=-1}^M A_i(n_i, k), \\ \quad 1 - q \leq n_{-1} \leq -1, \\ \quad N - q + 1 \leq n_M \leq N - 1; \\ S_2(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \sum_{i=-1}^{M-1} A_i(n_i, k), \\ \quad 1 - q \leq n_{-1} \leq -1, \quad n_M \geq N; \\ S_3(n_0, \dots, n_{M-1}, n_M, k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \sum_{i=0}^M A_i(n_i, k), \\ \quad n_{-1} \leq -q, \quad N - q + 1 \leq n_M \leq N - 1; \\ S_4(n_0, \dots, n_{M-1}, k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \sum_{i=0}^{M-1} A_i(n_i, k), \\ \quad n_{-1} \leq -q, \quad n_M \geq N. \end{array} \right. \quad (14)$$

Сумма S зависит от k и $(M + 2)$ -х неизвестных моментов времени $n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M$. Член A_{-1} этой суммы соответствует началу выборки и описывает окончание импульса, начало которого осталось за пределами выборки. Момент времени $q + n_{-1} - 1$ окончания этого импульса может лежать в интервале $0 \leq q + n_{-1} - 1 \leq q - 2$, так что $1 - q \leq n_{-1} \leq -1$. Член A_M соответствует концу выборки. Момент времени n_M начала незавершенного импульса может располагаться в интервале $N - q + 1 \leq n_M \leq N - 1$. Наконец, член A_i , $i = 0, \dots, M - 1$, описывает i -й полный импульс. Очевидно, начало n_0 первого импульса лежит в интервале $0 \leq n_0 \leq T_{max} - 1$, а начало n_{M-1} последнего полного импульса — в интервале $N - T_{max} - q + 1 \leq n_{M-1} \leq N - q$. В том случае, когда выборка содержит ровно M полных импульсов и не содержит неполных в начале и в конце, члены A_{-1} и A_M в формуле (14) отсутствуют.

Очевидно, что для того, чтобы выборка содержала хотя бы один полный импульс, т.е. $M \geq 1$, достаточно взять ее длину $N \geq T_{max} + q - 1$. Положим $N \geq T_{max} + q - 1$,

тогда для M справедлива оценка

$$\left] \frac{N-q+1}{T_{max}} \left[\leq M \leq \right] \frac{N-q}{T_{min}} \left[+ 1. \right. \quad (15)$$

Соблюдение условия $N \geq T_{max} + q - 1$ гарантирует наличие в выборке хотя бы одного распознаваемого импульса. Если указанное условие не выполняется, возможна ситуация, когда выборка не будет содержать ни одного представителя из K распознаваемых классов. Эта ситуация противоречит исходной постановке задачи.

3. Критерий и оценки максимального правдоподобия

Обозначим через $\{n\}^{M+2} = \{n_{-1}\} \times \{n_0\} \times \dots \times \{n_{M-1}\} \times \{n_M\}$ множество всевозможных (удовлетворяющих условию (3)) последовательностей моментов времени начала M полных импульсов, а через $\mathcal{Z} = \bigcup_M \{n\}^{M+2}$, где M принимает значения из интервала (15), — объединение этих множеств. Тогда декартово произведение $\{k\} \times \mathcal{Z}$ определяет множество всевозможных гипотез о среднем $X(k)$ гауссовского N -мерного случайного вектора Y с диагональной ковариационной матрицей, у которой диагональные элементы равны σ^2 . Действительно, каждому значению $k = 1, 2, \dots, K$ однозначно соответствует импульс $U(k)$, вектор среднего $X(k)$ есть последовательность (8), образованная из импульса $U(k)$ путем его квазипериодического повторения в моменты времени $n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M$, которым однозначно соответствуют номера компонент вектора $X(k)$. Таким образом, задача состоит в выборе одной из множества $\{k\} \times \mathcal{Z}$ гипотез о среднем N -мерного вектора Y при известной диагональной ковариационной матрице с равными диагональными элементами.

Как известно, в случае равновероятных классов байесовский критерий проверки статистических гипотез, минимизирующий вероятность ошибки, эквивалентен критерию максимального правдоподобия. Решающее правило совместного обнаружения и распознавания, основанное

на принципе максимального правдоподобия, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & (\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{M-1}, \hat{n}_M, \hat{k}) = \\ & = \text{Arg max}_{\{k\} \times Z} L(\mathbf{Y}; \mathbf{U}(k), \sigma^2, n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M). \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом (10) и (14), правило (16) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & (\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{M-1}, n_M, \hat{k}) = \\ & = \text{Arg min}_{\{k\} \times Z} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M, k) \end{aligned} \quad (17)$$

и состоит в минимизации суммы $S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M, k)$, вычисляемой в виде (14), на декартовом произведении $\{k\} \times Z$. Остается заметить, что в силу независимости элементов множеств Z и $\{k\}$ минимизацию квадратичной формы S можно провести в два этапа, т.е.

$$\begin{aligned} & \min_{\{k\} \times Z} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M, k) = \\ & = \min_{\{k\} \times Z} \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n - \sum_{i=-1}^M u_n - n_i(k) \right)^2 = \\ & = \min_{\{k\}} \min_Z \sum_{n=0}^{N-1} \left(y_n - \sum_{i=-1}^M u_n - n_i(k) \right)^2 = \\ & = \min_{\{k\}} \min_Z S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k), \end{aligned}$$

вычислив сначала условные (по классу или импульсу) минимумы, а затем безусловное минимальное значение суммы S . Таким образом, показана справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если наблюдаемый временной ряд y_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, обладает свойствами (5), (3), (2), (1)

и $N \geq T_{\max} + q - 1$, то правило (16) совместного обнаружения и распознавания, основанное на принципе максимального правдоподобия, определяет следующие формулы дискретной оптимизации:

$$\left. \begin{aligned} S_{\min}(\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{\hat{M}-1}, \hat{n}_{\hat{M}}/k) = \\ = \min_{\mathcal{Z}} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k), \\ (\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{\hat{M}-1}, \hat{n}_{\hat{M}}/k) = \\ = \text{Arg} \min_{\mathcal{Z}} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k), \\ k = 1, 2, \dots, K; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\min} = \min_{\{k\}} S_{\min}(\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{\hat{M}-1}, \hat{n}_{\hat{M}}/k = \\ = \min_{\{k\}} \min_{\mathcal{Z}} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k), \\ \hat{k} = \text{Arg} \min_{\{k\}} S_{\min}(\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{\hat{M}-1}, \hat{n}_{\hat{M}}/k) = \\ = \text{Arg} \min_{\{k\}} \min_{\mathcal{Z}} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k), \\ (\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{\hat{M}-1}, \hat{n}_{\hat{M}}) = \\ = (\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{\hat{M}-1}, \hat{n}_{\hat{M}}/\hat{k}), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где S задается формулой (14).

Величина

$$\hat{T} = \frac{1}{\hat{M} + 1} \sum_{i=0}^{\hat{M}} (\hat{n}_i - \hat{n}_{i-1}) \quad (20)$$

есть оценка среднего интервала между импульсами.

4. Алгоритм совместного обнаружения и распознавания

Для построения вычислительного алгоритма заметим, что сумма S из формулы (14) может быть записана в виде:

$$S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \sum_{i=-1}^M A_i(n_i, k), \quad (21)$$

так как $\forall k \in \{k\}$, в соответствии с (11) и (12), $A_{-1}(n_{-1}, k) = 0$ при $n_{-1} \leq -q$ и $A_M(n_M, k) = 0$ при $n_M \geq N$. Теперь из (18), (19) и (21) видно, что для решения задачи совместного обнаружения и распознавания необходимо вычислить значение функции

$$\begin{aligned} S_{\min} &= \min_{\{k\}} \min_{\mathcal{Z}} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k) = \\ &= \sum_{n=-0}^{N-1} y_n^2 + \min_{\{k\}} \min_{\mathcal{Z}} \sum_{i=-1}^M A_i(n_i, k). \end{aligned} \quad (22)$$

Вычисление же S_{\min} , как следует из (22), с точностью до константы, равной сумме квадратов элементов выборки, сводится к решению K задач минимизации аддитивного функционала

$$\begin{aligned} F(n_{-1}, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k) &= \sum_{i=-1}^M A_i(n_i, k), \quad (23) \\ k &= 1, \dots, K, \end{aligned}$$

на множестве \mathcal{Z} всевозможных последовательностей искомым моментов времени с ограничениями на целочисленные переменные n_i в виде неравенств:

$$\left. \begin{aligned} -q \leq n_{-1} \leq -1, \quad 0 \leq n_0 \leq T_{\max} - 1, \\ N - T_{\max} - q + 1 \leq n_{M-1} \leq N - q, \\ N - q + 1 \leq n_M \leq N; \\ T_{\min} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}, \quad i = 1, \dots, M - 1, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

которые вытекают из (3) и (14) и, далее, к выбору наименьшего

$$F_{\min} = \min_{\{k\}} F_{\min}(k) \quad (25)$$

среди полученных условных минимумов

$$F_{\min}(k) = \min_{\mathcal{Z}} F(n_{-1}, \dots, n_M/k), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (26)$$

При этом из (18),(19),(22) и (23) следует, что условные оценки моментов начала импульсов можно определить по

формуле:

$$(\hat{n}_{-1}, \dots, \hat{n}_M/k) = \arg \min_z F(n_{-1}, \dots, n_M/k), \quad (27)$$

$$k = 1, 2, \dots, K,$$

оценку номера распознаваемого класса по формуле:

$$\hat{k} = \arg \min_{\{k\}} F_{min}(k), \quad (28)$$

а безусловные оценки моментов начала импульсов — по третьей формуле соотношений (19), т.е. по результатам вычислений (27) и (28) после указания распознанного класса. Наконец, из (21)-(26) следует, что в соответствии с (19) минимальное значение суммы можно получить из выражения:

$$S_{min} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + F_{min}. \quad (29)$$

Формулы (21)-(29) раскрывают структуру алгоритма. Ключевым моментом вычислительного алгоритма является минимизация функционала (23) при ограничениях (24). Из (23) видно, что минимизируемый аддитивный функционал от последовательности местоположений импульсов n_i , $i = -1, \dots, M$, при каждом $k = 1, 2, \dots, K$ является сепарабельной целевой функцией. Поэтому при каждом $k = 1, 2, \dots, K$ задача минимизации (23) при ограничениях (24), т.е. задача нахождения условного минимума, есть задача динамического программирования [9]. В таком случае для нахождения глобального экстремума (25) или (22) требуется решить K задач динамического программирования.

Для составления функциональных уравнений, обеспечивающих оптимизацию (23), воспользуемся теорией графов.

Как видно из (24), $\forall k \in \{k\}$ областью поиска экстремума (23) является объединение множеств

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{n_{-1}\} \cup \{n_0\} \cup \dots \cup \{n_{M-1}\} \cup \{n_M\} = \\ &= \{-q, -q+1, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Для всех $n \in \mathcal{N}$ и $k \in \{k\}$ определим функцию

$$d_k(n) = \begin{cases} A_{-1}(n, k), & n = -q, \dots, -1, \\ A_*(n, k), & n = 0, \dots, N - q, \\ A_M(n, k), & n = N - q + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$A_*(n, k) = \sum_{j=0}^{q-1} u_j(k)[u_j(k) - 2y_{j+n}]. \quad (32)$$

Тогда функционал (23) можно представить в виде:

$$F(n_1, n_0, \dots, n_{M-1}, n_M/k) = \sum_{i=-1}^M d_k(n_i), \quad (33)$$

$$k = 1, 2, \dots, K.$$

Чтобы установить справедливость (33) достаточно заметить, что при любом фиксированном $k \in \{k\}$ каждый член суммы (33) равен соответствующему члену суммы (23), т.е. $d_k(n_i) = A_i(n_i, k)$, $i = -1, 0, \dots, M$. Действительно, при каждом $k \in \{k\}$ имеем: если $i = -1$, то $n_i = n_{-1} \in \{-q, \dots, -1\}$ и $d_k(n_{-1}) = A_{-1}(n_{-1}, k)$ по определению (31); если $i = M$, то $n_i = n_M \in \{N - q + 1, \dots, N\}$ и $d_k(n_M) = A_M(n_M, k)$ по определению (31); если $i = 0, 1, \dots, M - 1$, то $n_i \in \{0, 1, \dots, N - q\}$ и $d_k(n_i) = A_*(n_i, k) = A_i(n_i, k)$, что следует из (31), (32) и (13).

Зафиксируем номер класса k и объявим вершинами ориентированного графа $G_k(\mathcal{N}_*, \Gamma)$ подмножество точек $\mathcal{N}_* = \{-q, -q+1, \dots, N + T_{\min} - 1\} = \mathcal{N} \cup \{N+1, \dots, N + T_{\min} - 1\}$ числовой прямой. Ограничения (24), определяющие допустимые пути на графе, представим в виде соответствия Γ между вершинами графа в следующей форме: $\Gamma(n) = \{m : n + T_{\min} \leq m \leq n + T_{\max}, m \in \mathcal{N}_*\}$ для всех $n \in \mathcal{N}_*$. Тогда обратное соответствие примет вид:

$$\Gamma^{-1}(n) = \{m : n - T_{\max} \leq m \leq n - T_{\min}, m \in \mathcal{N}_*\}, \quad (34)$$

$$\forall n \in \mathcal{N}_*.$$

Вершины графа из множеств $\mathcal{N}_s = \{-q, -q+1, \dots, \dots, T_{min} - q - 1\}$ и $\mathcal{N}_e = \{N, N+1, \dots, N+T_{min} - 1\}$ будем считать соответственно начальными и конечными. Каждой дуге (n, m) из вершины n в вершину m графа G_k припишем длину $d_k(n)$, вычисленную по формуле (31).

Введем дополнительные дуги $(-q, n)$ нулевой длины из начальной вершины $-q$ в вершины $n = -q+1, \dots, T_{min} - q - 1$ и образуем один исток в вершине $-q$. Аналогичным образом, из конечных вершин $n = N+1, \dots, N+T_{min} - 1$ проведем дуги (n, N) нулевой длины в вершину N и получим один сток в вершине N . Таким образом, построен ориентированный ациклический граф $G_k(\mathcal{N}_*, \Gamma)$.

Нетрудно убедиться, что в терминах теории графов задача минимизации аддитивного функционала (33) при каждом фиксированном $k = 1, 2, \dots, K$ эквивалентна задаче поиска кратчайшего пути $D_k(-q, N)$ из вершины $-q$ в вершину N на графе $G_k(\mathcal{N}_*, \Gamma)$:

$$D_k(-q, N) = F_{min}(k) = \min_Z \sum_{i=-1}^M d_k(n_i), \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Обозначив через $D_k(-q, n)$ и $I_k(n)$ длину и указатель кратчайшего пути из вершины $-q$ в вершину n , воспользовавшись принципом оптимальности, получим функциональные уравнения, обеспечивающие последовательную оптимизацию:

$$\left. \begin{aligned} D_k(-q, n) &= \min_{m \in \Gamma^{-1}(n)} \{D_k(-q, m) + d_k(m)\}, \\ I_k(n) &= \arg \min_{\substack{m \in \Gamma^{-1}(n) \\ n = -q + T_{min}, \dots, N + T_{min} - 1}} \{D_k(-q, m) + d_k(m)\}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

и вычисление длины кратчайшего (при фиксированном k) пути:

$$\begin{aligned} D_k(-q, N) &= \\ &= F_{min}(k) = \min_{N \leq n \leq N + T_{min} - 1} D_k(-q, n). \end{aligned} \quad (36)$$

Начальными условиями для вычислений по формулам (35) и (36) являются нулевые значения длин и указателей кратчайших путей:

$$D_k(-q, n) = 0, I_k(n) = 0, n = -q, -q+1, \dots, T_{\min} - q - 1, \quad (37)$$

а также значения длин дуг $d_k(n)$, $n = -q, -q+1, \dots, N$, подсчитанные по формуле (31) перед началом оптимизации.

Число импульсов и их расположение в выборке для каждого $k \in \{k\}$ определяется рекуррентными вычислениями в обратном порядке по указателю $I_k(n)$ оптимального пути:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= \operatorname{arg} \min_{N \leq n \leq N + T_{\min} - 1} D_k(-q, n), \\ m_i &= I_k(m_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Вычисления заканчиваются при таком шаге $i = r$, что $I_k(m_r) = 0$, т.е. при шаге, для которого указатель I_k оптимального пути показывает на исток. В результате получаем последовательность m_r, m_{r-1}, \dots, m_1 . Величина r дает оценку числа импульсов (включая неполные), попавших в выборку. При этом из (14) следует, что если $m_r \in \{-q+1, \dots, -1\}$, то в начале выборки имеется неполный импульс. Если $m_1 \in \{N-q+1, \dots, N-1\}$, то неполный импульс имеется в конце выборки. Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для задачи минимизации (23) при ограничениях (24) справедливы рекуррентные формулы (35)-(38) динамического программирования.

Для получения безусловного минимума и принятия решения остается произвести вычисления по формулам (25), (28) и третьей формуле соотношений (19).

ТЕОРЕМА 1. Задача (16) совместного обнаружения и распознавания, при выполнении условий (1)-(3), (5) и $N \geq T_{\max} + q - 1$, полиномиально разрешима с трудоемкостью $O[K(N+q)(q+T_{\max}-T_{\min})]$ и затратами по памяти $O(N+Kq)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полиномиальная разрешимость задачи следует из утверждения 2 и того, что нахождение

глобального экстремума (25) или (22) состоит в решении K задач динамического программирования.

При каждом $k = 1, 2, \dots, K$ для вычисления начальных величин длин и указателей кратчайших путей по формуле (37), а также значений длин дуг по формуле (31) требуется порядка $(N + q + 1)q$ элементарных операций умножения, сложения и присваивания. Вычисления по рекуррентным формулам (35) требуют порядка $(N + q)(T_{max} - T_{min} + 1)$ элементарных операций сложения, сравнения и присваивания. Наконец, для вычислений по формуле (36) необходимо порядка T_{min} операций сравнения и присваивания. Поэтому для получения условного (при фиксированном k) экстремума $F_{min}(k)$ необходимо порядка

$$\begin{aligned} & (N + q + 1)q + (N + q)(T_{max} - T_{min} + 1) + T_{min} \leq \\ & \leq (N + q)q + (N + q)(T_{max} - T_{min}) + 2(N + q) = \\ & = (N + q)(q + T_{max} - T_{min} + 2) \leq \\ & \leq (N + q)[q + T_{max} - T_{min} + 2(q + T_{max} - T_{min})] = \\ & = 3(N + q)(q + T_{max} - T_{min}) \end{aligned}$$

элементарных операций, так как $1 \leq q \leq T_{min} \leq T_{max} \leq N$.

Для отыскания безусловного экстремума требуется найти K условных экстремумов и дополнительно провести порядка K операций сравнения и присваивания. Таким образом, суммарное число операций оценивается величиной

$$\begin{aligned} & 3K(N + q)(q + T_{max} - T_{min}) + K = \\ & = O[K(N + q)(q + T_{max} - T_{min})]. \end{aligned}$$

Хранение выборки длины N и $K \geq 2$ эталонных импульсов длины $q \geq 1$ требует наличия $N + Kq$ единиц памяти. Для нахождения безусловного экстремума при каждом текущем шаге $k = 1, \dots, K$ достаточно хранить только одно, наименьшее по всем предыдущим шагам, значение условного экстремума $\min_{i < k} F_{min}(i)$, номер шага (клас-

са) и указатель кратчайшего пути, соответствующие этому экстремуму, т.е. всего $2 + (N + q + 1)$ единиц памяти. Для вычисления текущего условного экстремума по формулам (31) и (35)–(38) требуется сохранять $3(N + q + 1)$ величин — длин дуг, длин и указателей кратчайших путей, которые обновляются при каждом $k = 1, \dots, K$. Таким образом, затраты по памяти оцениваются величиной $N + Kq + 4(N + q + 1) + 2 = 5N + 4q + Kq + 6 < 6N + 2Kq + Kq + 3Kq = = 6(N + Kq) = O(N + Kq)$, так как $q \geq 1$ и $K \geq 2$. Теорема доказана.

Поскольку $1 \leq q + T_{max} - T_{min} \leq N$, в наихудшем случае трудоемкость алгоритма есть величина $O(KN^2)$.

5. Верхняя граница вероятности ошибки распознавания

Как отмечено в п.3, множество \mathcal{Z} всевозможных последовательностей моментов времени начала импульсов при каждом k однозначно определяет множество всевозможных гипотез о среднем $\mathbf{X}(k)$ гауссовского N -мерного вектора \mathbf{Y} с диагональной ковариационной матрицей $\Sigma = \sigma^2 \mathbf{I}$ (\mathbf{I} — единичная матрица). Обозначим через $W = \|\mathcal{Z}\|$ число всевозможных (удовлетворяющих условию (3)) последовательностей моментов времени начала импульсов в выборке длины N . Тогда каждую из проверяемых гипотез можно представить в виде:

$$H_{kw} = \left\{ \mathbf{Y} \in \Phi_{\mathbf{X}, \sigma^2 \mathbf{I}}; \mathbf{X} = \mathbf{X}_w(k) \right\}, \quad (39)$$

$$w = 1, 2, \dots, W, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где $\Phi_{\mathbf{X}, \sigma^2 \mathbf{I}}$ означает нормальное распределение с параметрами $(\mathbf{X}, \sigma^2 \mathbf{I})$, знак \in символизирует принадлежность выборки распределению,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_w(k) &= (x_0(k, w), x_1(k, w), \dots, x_{N-1}(k, w)), \\ x_n(k, w) &= \sum_{i=-1}^{M(k, w)} u_n - n_i(k, w)(k), \\ n &= 0, 1, \dots, N-1; \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$M(k, w)$ - число импульсов в выборке; $\{n_i(k, w)\}$, $i = -1, \dots, \dots, M(k, w)$, - последовательность моментов времени начала импульсов для гипотезы H_{kw} ; w - номер одной из множества Z всевозможных последовательностей моментов времени начала импульсов.

Так как задача классификации при числе классов больше двух сводится к последовательному решению задач классификации двух классов, ограничимся оцениванием вероятности ошибки распознавания для $K = 2$ (случай двух классов) и положим $P(k) = \frac{1}{2}$, $k = 1, 2$. При $K = 2$ имеем множество $\{(H_{1v}, H_{2w}), v, w = 1, \dots, W\}$ всевозможных пар противопоставляемых гипотез о среднем, причем пары гипотез H_{1v} и H_{2w} , $v, w = 1, \dots, W$, являются случайными событиями. Обозначим вероятности совмещения этих событий через $P(H_{1v}, H_{2w})$, $v, w = 1, \dots, W$. Тогда вероятность ошибки распознавания

$$\alpha = \sum_{v,w} P(H_{1v}, H_{2w}) \alpha_{v,w}, \quad (41)$$

где $\alpha_{v,w} = P(1)\alpha_v(1) + P(2)\alpha_w(2) = 0.5\alpha_v(1) + 0.5\alpha_w(2)$ - вероятность ошибки при разделении двух равновероятных гипотез H_{1v} и H_{2w} , а

$$\alpha_v(1) = P\{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X = X_w(2)/X = X_v(1)\},$$

$$\alpha_w(2) = P\{Y \in \Phi_{X, \sigma^2 I}; X = X_v(1)/X = X_w(2)\} -$$

вероятности ошибки при проверке гипотез H_{1v} и H_{2w} соответственно.

Обозначим через $\alpha_{v,w}^*$ верхнюю границу вероятности ошибки при разделении гипотез H_{1v} и H_{2w} , а через

$$\alpha^* = \max_{v,w} \alpha_{v,w}^* - \quad (42)$$

наибольшую из всевозможных верхних границ. Тогда из (41), (42) и неравенства

$$\alpha_{v,w} \leq \alpha_{v,w}^* \quad (43)$$

следует, что для α справедлива оценка сверху

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \sum_{v,w} P(H_{1v}, H_{2w}) \alpha_{vw}^* \leq \\ &\leq \sum_{v,w} P(H_{1v}, H_{2w}) \max_{v,w} \alpha_{vw}^* = \max_{v,w} \alpha_{vw}^* = \alpha^*. \end{aligned} \quad (44)$$

Выбрав в качестве α_{vw}^* границу Чернова [10]:

$$\alpha_{vw}^* = \frac{1}{2} \exp[-\mu(v, w)], \quad (45)$$

где

$$\mu(v, w) = \frac{1}{8} (\mathbf{X}_v(1) - \mathbf{X}_w(2))' \Sigma^{-1} (\mathbf{X}_v(1) - \mathbf{X}_w(2)) - \quad (46)$$

расстояние Бхатачария между векторами $\mathbf{X}_v(1)$ и $\mathbf{X}_w(2)$, а $\Sigma^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{\sigma^2}$, замечаем, что для получения оценки (44) достаточно, в соответствии с (45) и (46), найти

$$\mu_{\min} = \min_{v,w} \mu(v, w) - \quad (47)$$

минимальное из всевозможных расстояний $\mu(v, w)$, $v, w = 1, \dots, W$, поскольку

$$\alpha^* = \max_{v,w} \alpha_{vw}^* = \frac{1}{2} \exp[-\mu_{\min}]. \quad (48)$$

Так как расстояние

$$\begin{aligned} \mu(v, w) &= \mu[\mathbf{X}_v(1), \mathbf{X}_w(2)] = \mu[\bullet] = \\ &= \mu[\mathbf{U}(1), \mathbf{U}(2), n_{-1}(1, v), \dots, n_{M(1,v)}(1, v); \\ &\quad n_{-1}(2, w), \dots, n_{M(2,w)}(2, w)] - \end{aligned} \quad (49)$$

есть квадратичная форма, зависящая от местоположения импульсов, а моменты времени начала импульсов $n_i(1, v)$ и $n_j(2, w)$, $i = -1, \dots, M(1, v)$, $j = -1, \dots, M(2, w)$, при каждом

$v, w = 1, \dots, W$ принадлежат одному и тому же множеству \mathcal{N} , определенному формулой (30), имеем

$$\begin{aligned} \mu_{\min}[\bullet] &= \min_{v,w} \mu(v, w) = \\ &= \{n\}^{M(1,v)+2} \times \{n\}^{M(2,w)+2} \mu[\bullet] = \\ &= \min_{M(1), M(2)} \mu_{\min}[\bullet/M(1), M(2)], \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{\min}[\bullet/M(1), M(2)] &= \\ &= \{n\}^{M(1)+2} \times \{n\}^{M(2)+2} \mu[\bullet/M(1), v] = \\ &= M(1), M(2), w = M(2)] - \end{aligned} \quad (51)$$

условный минимум расстояния Бхатачария на множестве всевозможных пар импульсных последовательностей длины N , содержащих фиксированные числа $M(1)$ и $M(2)$ импульсов $U(1)$ и $U(2)$, причем в соответствии с (15) эти числа лежат в интервале:

$$\begin{aligned} M_{\min} &= \\ &= \left] \frac{N-q+1}{T_{\max}} \left[\leq M(1), M(2) \leq \left] \frac{N-q}{T_{\min}} \left[+1 = M_{\max}. \end{aligned} \quad (52)$$

Положим

$$U^2(1) = \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(1), \quad U^2(2) = \sum_{n=0}^{q-1} u_n^2(2) \quad (53)$$

и найдем условный минимум (51) расстояния Бхатачария $\mu[\bullet/M(1), M(2)]$ между векторами $X(1)$ и $X(2)$, компоненты каждого из которых связаны соотношением (40), т.е.:

$$\left. \begin{aligned} x_n(1) &= \sum_{i=-1}^{M(1)} u_n - n_i(1), \\ x_n(2) &= \sum_{j=-1}^{M(2)} u_n - m_j(2), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Опустим для простоты в правой части (46) индексы v и w в соответствии с (49) и получим:

$$8\sigma^2 \mu[\bullet/M(1), M(2)] = \sum_{n=0}^{N-1} [x_n(1) - x_n(2)]^2. \quad (55)$$

Ограничимся анализом расстояния Бхатачария между последовательностями, у которых

$$T_{m;n} \geq 2q - 1. \quad (56)$$

Импульсы $U(1)$ и $U(2)$, имевшие место в моменты времени n_i и m_j , условимся называть пересекающимися (перекрывающимися) по времени, если $|n_i - m_j| < q$, и непересекающимися по времени, если $|n_i - m_j| \geq q$.

Определим свертку импульсов $U(1)$ и $U(2)$ в виде:

$$R(i, j) = \sum_{n=0}^{N-1} u_{n-i}(1)u_{n-j}(2), \quad i, j \in \mathcal{N}, \quad (57)$$

и максимальное значение свертки пересекающихся полных импульсов:

$$R_{max} = \max_{|l| < q} \sum_{n=-(q-1)}^{q-1} u_n(1)u_{n+l}(2). \quad (58)$$

Так как $u_n = 0$ при $n < 0$ и $n \geq q$, из (57) следует, что свертка неперекрывающихся импульсов равна нулю, т.е.:

$$R(n_i, m_j) = 0, \quad |n_i - m_j| \geq q, \quad (59)$$

а из (54) и (56) видно, что в последовательностях $X(1)$ и $X(2)$ для каждого n_i , $i = -1, 0, \dots, M(1)$, имеется не более одного m_j , $j = -1, 0, \dots, M(2)$, такого, что $|n_i - m_j| < q$, т.е. каждый импульс $U(1)$ перекрывается по времени не более, чем с одним импульсом $U(2)$. Таким образом, если обозначить через

$$B = \{(i, j) : i = -1, 0, \dots, M(1), \\ j = -1, 0, \dots, M(2); |n_i - m_j| < q\} \quad (60)$$

множество пар номеров перекрывающихся по времени импульсов, то в зависимости от взаимного расположения импульсов в последовательностях число $\|B\|$ пар (i, j) множества B лежит в интервале $0 \leq \|B\| \leq \min[M(1), M(2)] + 2$.

Положим

$$\left. \begin{aligned} Q &= 8\sigma^2 \mu[\bullet/M(1), M(2)], \\ \varphi_1^2 &= \sum_{n=-n_{-1}}^{q-1} u_n^2(1), \\ \psi_1^2 &= \sum_{n=0}^{N-n_{M(1)}-1} u_n^2(1), \\ \varphi_2^2 &= \sum_{n=-m_{-1}}^{q-1} u_n^2(2), \\ \psi_2^2 &= \sum_{n=0}^{N-m_{M(2)}-1} u_n^2(2), \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

и, подставив (54) в (55), раскрыв сумму и перегруппировав ее члены с учетом (53), (56), (57) и (59)-(61), получим:

$$\begin{aligned} Q &= M(1)U^2(1) + M(2)U^2(2) + \\ &+ \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 - 2 \sum_{(i,j) \in B} R(n_i, m_j). \end{aligned} \quad (62)$$

Условимся для определенности, что $M(1) \leq M(2)$ и проанализируем (62) для 4-х возможных вариантов перекрытия полных и неполных импульсов, расположенных в началах и концах двух последовательностей.

1. Ни один из полных импульсов одной последовательности не перекрывается с неполным импульсом другой последовательности, т.е. $|n_{-1} - m_0| \geq q$, $|n_0 - m_{-1}| \geq q$, $|n_{M(1)} - m_{M(2)-1}| \geq q$, $|n_{M(1)-1} - m_{M(2)}| \geq q$.

2. Единственное перекрытие неполного импульса одной последовательности с полным импульсом другой имеет место в начале последовательностей, т.е.:

а) либо $|n_0 - m_{-1}| < q$,

б) либо $|n_{-1} - m_0| < q$

при $|n_{M(1)} - m_{M(2)-1}| \geq q$ и $|n_{M(1)-1} - m_{M(2)}| \geq q$.

3. Единственное перекрытие неполного импульса одной последовательности с полным импульсом другой имеет место в конце последовательностей, т.е.:

а) либо $|n_{M(1)} - m_{M(2)-1}| < q$,

б) либо $|n_{M(1)-1} - m_{M(2)}| < q$

при $|n_{-1} - m_0| \geq q$, $|n_0 - m_{-1}| \geq q$.

4. В начале и конце последовательностей имеется перекрытие полного импульса одной последовательности с неполным импульсом другой, т.е.:

а) либо $|n_0 - m_{-1}| < q$ и $|n_{M(1)-1} - m_{M(2)}| < q$,

б) либо $|n_{-1} - m_0| < q$ и $|n_{M(1)-1} - m_{M(2)}| < q$,

в) либо $|n_{-1} - m_0| < q$ и $|n_{M(1)} - m_{M(2)-1}| < q$,

г) либо $|n_0 - m_{-1}| < q$ и $|n_{M(1)} - m_{M(2)-1}| < q$.

Рассмотрим *первый* вариант. Обозначим через

$$B_0 = \{(i, j) : i = 0, \dots, M(1) - 1, \\ j = 0, \dots, M(2) - 1; |n_i - m_j| < q\} \quad (63)$$

множество пар номеров перекрывающихся полных импульсов. Нетрудно заметить, что число $J_0 = ||B_0||$ этих пар лежит в интервале:

$$0 \leq J_0 \leq M(1). \quad (64)$$

Учитывая (58) и очевидные неравенства: $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2R(n_{-1}, m_{-1}) \geq 0$; $\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)}) \geq 0$; $U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j) \geq 0$ при любых $i = 0, 1, \dots, M(1) - 1$, $j = 0, 1, \dots, M(2) - 1$, перегруппировав члены в правой части (62) в соответствии с (63) и (64), получим:

$$Q = [M(1) - J_0]U^2(1) + [M(2) - J_0]U^2(2) + \\ + \sum_{(i, j) \in B_0} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] + \\ + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2R(n_{-1}, m_{-1}) + \psi_1^2 + \psi_2^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)}) \geq [M(1) - J_0]U^2(1) + \\
& + [M(2) - J_0]U^2(2) + J_0[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}]. \quad (65)
\end{aligned}$$

Из (65) следует, что поиск условного минимума (51) сводится к минимизации расстояния Вхатачария как функции от числа J_0 перекрывающихся импульсов. Продифференцировав правую часть (65) по J_0 , замечаем, что при $R_{max} > 0$ правая часть (65) есть строго убывающая функция числа J_0 пересекающихся по времени полных импульсов, имеющая минимум на правой границе (64), т.е. при $J_0 = M(1)$. Поэтому при $R_{max} > 0$

$$Q \geq [M(2) - M(1)]U^2(2) + M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}]. \quad (66)$$

Если $R_{max} < 0$, то минимум (65) имеет место на левой границе (64), т.е. при $J_0 = 0$ или когда импульсы не пересекаются. Поэтому при $R_{max} < 0$

$$Q \geq [M(2) - M(1)]U^2(2) + M(1)[U^2(1) + U^2(2)]. \quad (67)$$

Если же $R_{max} = 0$, то непосредственно из (65) находим:

$$Q \geq [M(2) - M(1)]U^2(2) + M(1)[U^2(1) + U^2(2)], \quad (68)$$

что совпадает с (67) и с (66) при $R_{max} = 0$. Таким образом, для первого варианта имеем:

$$\begin{aligned}
Q & \geq [M(2) - M(1)]U^2(2) + M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*] \geq \\
& \geq M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*], \quad (69)
\end{aligned}$$

где

$$R_{max}^* = \max(0, R_{max}). \quad (70)$$

Проанализируем *второй* вариант. Рассмотрим случай "а". Обозначим через

$$B_1 = \{(i, j) : i = 1, \dots, M(1) - 1, j = 0, \dots, M(2) - 1; |n_i - m_j| < q\}$$

множество пар номеров перекрывающихся полных импульсов. Очевидно, что в данном случае число $J_1 = \|B_1\|$

этих пар лежит в интервале $0 \leq J_1 \leq M(1) - 1$. Поскольку $|n_0 - m_{-1}| < q$, из (3) и (56) следует: $n_{-1} \leq -q$, $1 - q \leq m_{-1} \leq -1$, $|n_{-1} - m_0| \geq q$, $|n_{-1} - m_{-1}| \geq q$. Так что, в соответствии с (61), $\varphi_1^2 = 0$, $\varphi_2^2 > 0$, и, в соответствии с (59), $R(n_{-1}, m_{-1}) = R(n_{-1}, m_0) = 0$. Поэтому из (62), перегруппировав члены и учитывая, что $R(n_0, m_{-1}) \leq R_{max}$, получим:

$$\begin{aligned}
 Q &= [M(1) - 1 - J_1]U^2(1) + [M(2) - 1 - J_1]U^2(2) + \\
 &+ U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_0, m_{-1}) + \\
 &+ \sum_{(i,j) \in B_1} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] + \\
 &+ \varphi_2^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)}) > [M(1) - 1 - J_1]U^2(1) + \\
 &+ [M(2) - 1 - J_1]U^2(2) + (J_1 + 1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}].
 \end{aligned}$$

Рассуждая далее также, как при выводе (66)-(68) для первого варианта, убеждаемся, что имеет место неравенство:

$$\begin{aligned}
 Q &> [M(2) - M(1)]U^2(2) + M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*] \geq \\
 &\geq M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*], \quad (71)
 \end{aligned}$$

где R_{max}^* определяется формулой (70).

Рассмотрим случай "б". Определим множество

$$B_2 = \{(i, j) : i = 0, \dots, M(1) - 1, j = 1, \dots, M(2) - 1; |n_i - m_j| < q\}$$

пар номеров перекрывающихся полных импульсов. Пусть сначала $M(1) = M(2)$. Тогда мощность $J_2 = ||B_2||$ множества B_2 лежит в интервале $0 \leq J_2 \leq M(1) - 1$. Поэтому действуя также, как и в случае "а", заметив только, что в данном случае $\varphi_2^2 = 0$, $R(n_{-1}, m_{-1}) = R(n_0, m_{-1}) = 0$, учитывая неравенства: $\varphi_1^2 > 0$, $R(n_{-1}, m_0) \leq R_{max}$, $\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)}) \geq 0$, перегруппировав члены в (62), получим:

$$\begin{aligned}
 Q &= [M(1) - 1 - J_2]U^2(1) + [M(1) - 1 - J_2]U^2(2) + \\
 &+ U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_{-1}, m_0) + \\
 &+ \sum_{(i,j) \in B_2} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi_1^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)}) > \\
& > [M(1) - 1 - J_2]U^2(1) + [M(1) - 1 - J_2]U^2(2) + \\
& + (J_2 + 1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] \geq \\
& \geq M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*]. \quad (72)
\end{aligned}$$

Пусть теперь $M(1) < M(2)$. Тогда мощность $J_2 = \|B_2\|$ множества B_2 лежит в интервале $0 \leq J_2 \leq M(1)$. Поэтому из (62), аналогично рассмотренным выше случаям, с учетом неравенств: $\varphi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{-1}, m_0) > 0$, $\psi_1^2 + \psi_2^2 - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)}) \geq 0$, перегруппировав члены в (62), получим:

$$\begin{aligned}
Q & = [M(1) - J_2]U^2(1) + [M(2) - 1 - J_2]U^2(2) + \\
& + \sum_{(i, j) \in B_2} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] + \\
& + \varphi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{-1}, m_0) + \\
& + \psi_1^2 + \psi_2^2 - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)}) > \\
& > [M(1) - J_2]U^2(1) + [M(2) - 1 - J_2]U^2(2) + \\
& + J_2[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] \geq \\
& \geq [M(2) - M(1) - 1]U^2(2) + M(1)[U^2(1) + \\
& + U^2(2) - 2R_{max}^*] \geq M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*]. \quad (73)
\end{aligned}$$

Анализ *третьего* варианта аналогичен анализу второго с той лишь разницей, что, в отличие от второго, перекрытие полного и неполного импульсов имеет место не на начальных, а на конечных участках двух последовательностей. Легко убедиться, что для данного варианта справедливо неравенство:

$$Q \geq M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*]. \quad (74)$$

Проанализируем последний, *четвертый* вариант. Рассмотрим сначала случаи "а" и "в". В этих случаях оба неполных импульса принадлежат одной последовательности, а оба полных импульса, с которыми пересекаются неполные в начале и конце последовательностей, - другой.

В случае "а", когда оба неполных импульса принадлежат второй последовательности, первая последовательность по условию содержит не менее двух полных импульсов, т.е. число импульсов в последовательностях связано неравенством: $2 \leq M(1) \leq M(2)$. Обозначим через

$$B_3 = \{(i, j) : i = 1, \dots, M(1)-2; j = 0, \dots, M(2)-1; |n_i - m_j| < q\}$$

множество пар номеров перекрывающихся полных импульсов, а через $J_3 = \|B_3\|$ - мощность этого множества. Тогда $0 \leq J_3 \leq M(1) - 2$. Действуя далее также, как и ранее, учитывая, что $\varphi_2^2 > 0$, $\psi_2^2 > 0$, $R(n_0, m_{-1}) \leq R_{max}$, $R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}) \leq R_{max}$, получим:

$$\begin{aligned} Q &= [M(1) - 2 - J_3]U^2(1) + [M(2) - 2 - J_3]U^2(2) + \\ &+ \sum_{(i, j) \in B_3} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] + \\ &+ U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_0, m_{-1}) + U^2(1) + U^2(2) - \\ &- 2R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}) + \varphi_2^2 + \psi_2^2 > \\ &> [M(1) - 2 - J_3]U^2(1) + [M(2) - 2 - J_3]U^2(2) + \\ &+ (J_3 + 2)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] > \\ &> [M(2) - M(1)]U^2(2) + M(1)[U^2(1) + \\ &+ U^2(2) - 2R_{max}^*] \geq M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*]. \quad (75) \end{aligned}$$

В случае "в" оба неполных импульса принадлежат первой последовательности. Вторая последовательность по условию содержит не менее двух полных импульсов, т.е. $M(2) \geq 2$. Определим множество

$$B_4 = \{(i, j) : i = 0, \dots, M(1)-1, j = 1, \dots, M(2)-2; |n_i - m_j| < q\}$$

пар номеров пересекающихся полных импульсов и его мощность $J_4 = \|B_4\|$. Пусть сначала $M(1) = M(2) \geq 2$. Тогда $0 \leq J_4 \leq M(1) - 2$. Поэтому из (62), учитывая, что $\varphi_1^2 > 0$, $\psi_1^2 > 0$, $R(n_{-1}, m_0) \leq R_{max}$, $R(n_{M(1)}, m_{M(2)-1}) \leq R_{max}$,

тем же путем, что и ранее, получим:

$$\begin{aligned}
 Q &= [M(1) - 2 - J_4]U^2(1) + [M(2) - 2 - J_4]U^2(2) + \\
 &+ \sum_{(i,j) \in B_4} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] + \\
 &+ U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_{-1}, m_0) + U^2(1) + U^2(2) - \\
 &- 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)-1}) + \varphi_1^2 + \psi_1^2 > \\
 &> [M(1) - 2 - J_4]U^2(1) + [M(2) - 2 - J_4]U^2(2) + \\
 &+ (J_4 + 2)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] > \\
 &> [M(2) - M(1)]U^2(2) + M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*] = \\
 &= M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*]. \quad (76)
 \end{aligned}$$

Пусть теперь $M(1) < M(2)$. Тогда если $M(2) - M(1) = 1$, то число пар номеров перекрывающихся полных импульсов лежит в интервале $0 \leq J_4 \leq M(1) - 1$. Так как $\varphi_1^2 > 0$, $\psi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)-1}) > 0$, $R(n_{-1}, m_0) \leq R_{max}$, из (62), группируя члены, получим:

$$\begin{aligned}
 Q &= [M(1) - 1 - J_4]U^2(1) + [M(2) - 2 - J_4]U^2(2) + \\
 &+ \sum_{(i,j) \in B_4} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] + U^2(1) + U^2(2) - \\
 &- 2R(n_{-1}, m_0) + \psi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)-1}) + \\
 &+ \varphi_1^2 > [M(1) - 1 - J_4]U^2(1) + [M(2) - 2 - J_4]U^2(2) + \\
 &+ (J_4 + 1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] \geq \\
 &\geq [M(2) - M(1) - 1]U^2(2) + \\
 &+ M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*] = \\
 &= M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*]. \quad (77)
 \end{aligned}$$

Если же $M(2) - M(1) \geq 2$, то $0 \leq J_4 \leq M(1)$. Поэтому, учитывая, что $\varphi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{-1}, m_0) > 0$ и $\psi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)-1}) > 0$, получим:

$$\begin{aligned}
 Q &= [M(1) - J_4]U^2(1) + [M(2) - 2 - J_4]U^2(2) + \\
 &+ \sum_{(i,j) \in B_4} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varphi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{-1}, m_0) + \psi_1^2 + U^2(2) - \\
& - 2R(n_{M(1)}, m_{M(2)-1}) > [M(1) - J_4]U^2(1) + \\
& + [M(2) - 2 - J_4]U^2(2) + J_4[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] \geq \\
& \geq [M(2) - M(1) - 2]U^2(2) + \\
& + M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*] \geq \\
& \geq M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*]. \tag{78}
\end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, последние два случая "б" и "г" четвертого варианта, когда неполные импульсы принадлежат различным последовательностям. Ограничимся анализом одного из случаев, например "б", так как анализ случая "г" проводится аналогично и дает те же результаты, в чем нетрудно убедиться.

Как и ранее, определив множество

$$B_5 = \{(i, j) : i = 0, \dots, M(1)-2, j = 1, \dots, M(2)-1; |n_i - m_j| < q\}$$

пар номеров перекрывающихся полных импульсов и его мощность $J_5 = \|B_5\|$, которая в данном случае лежит в интервале $0 \leq J_5 \leq M(1) - 1$, (62) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
Q & = [M(1) - 1 - J_5]U^2(1) + [M(2) - 1 - J_5]U^2(2) + \\
& + \sum_{(i, j) \in B_5} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] + \\
& + \varphi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{-1}, m_0) + U^2(1) + \psi_2^2 - \\
& - 2R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}). \tag{79}
\end{aligned}$$

Пусть $R_{max} \leq 0$, тогда $R(n_{-1}, m_0) \leq 0$ и $R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}) \leq 0$. Поэтому из (79) получим:

$$\begin{aligned}
Q & \geq [M(1) - 1 - J_5]U^2(1) + [M(2) - 1 - J_5]U^2(2) + \\
& + J_5[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] + \varphi_1^2 + U^2(2) - 2R(n_{-1}, m_0) + \\
& + U^2(1) + \psi_2^2 - 2R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}) > [M(1) - 1]U^2(1) + \\
& + [M(2) - 1]U^2(2) + U^2(1) + U^2(2) \geq \\
& \geq M(1)[U^2(1) + U^2(2)], \tag{80}
\end{aligned}$$

так как минимум (79) имеет место при $J_5 = 0$.

Если $R_{max} > 0$, то, перегруппировав члены, (62) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 Q &= [M(1) - 1 - J_5]U^2(1) + [M(2) - 1 - J_5]U^2(2) + \\
 &+ \sum_{(i,j) \in B_5} [U^2(1) + U^2(2) - 2R(n_i, m_j)] + \\
 &+ [U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] + Q_*, \quad (81)
 \end{aligned}$$

где

$$Q_* = 2R_{max} + \varphi_1^2 - 2R(n_{-1}, m_0) + \psi_2^2 - 2R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}). \quad (82)$$

Покажем, что $Q_* > 0$ при $R_{max} > 0$. Положим

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_{11}^2 &= \sum_{n=m_0}^{q-1+n_{-1}} u_{n-n_{-1}}^2(1), \\
 \psi_{22}^2 &= \sum_{n=m_{M(2)}}^{n_{M(1)-1}+q-1} u_{n-m_{M(2)}}^2(2), \\
 \varphi_{21}^2 &= \sum_{n=m_0}^{q-1+n_{-1}} u_{n-m_0}^2(2), \\
 \psi_{12}^2 &= \sum_{n=m_{M(2)}}^{n_{M(1)-1}+q-1} u_{n-n_{M(1)-1}}^2(1).
 \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Тогда, в соответствии с (61),

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_1^2 &= \sum_{n=0}^{m_0-1} u_{n-n_{-1}}^2(1) + \varphi_{11}^2, \\
 \psi_2^2 &= \sum_{n=n_{M(1)-1}+q}^{N-1} u_{n-m_{M(2)}}^2(2) + \psi_{22}^2,
 \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

и в силу неравенства Коши-Вуняковского

$$\begin{aligned}
 R(n_{-1}, m_0) &= \\
 &= \sum_{n=m_0}^{q-1+n_{-1}} u_{n-n_{-1}}(1)u_{n-m_0}(2) \leq \varphi_{11}\varphi_{21}, \\
 R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}) &= \\
 &= \sum_{n=m_{M(2)}}^{n_{M(1)-1}+q-1} u_{n-n_{M(1)-1}}^2(1)u_{n-m_{M(2)}}(2) \leq \\
 &\leq \psi_{22}\psi_{12}.
 \end{aligned}
 \tag{85}$$

Пусть $m_0 - n_{-1} \geq m_{M(2)} - n_{M(1)-1}$. Тогда $q - 1 + n_{-1} - m_0 \leq n_{M(1)-1} + q - 1 - m_{M(2)}$ и из (83) следует, что $\psi_{22}^2 \geq \varphi_{21}^2$. Подставив (84) в (82), сгруппировав члены и заметив, что, в соответствии с (85), $\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 - 2R(n_{-1}, m_0) \geq 0$, получим:

$$\begin{aligned}
 Q_* &> \varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 - 2R(n_{-1}, m_0) + \\
 &+ (\psi_{22}^2 - \varphi_{21}^2) + 2[R_{max} - R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)})] \geq 0.
 \end{aligned}$$

Если же $m_0 - n_{-1} < m_{M(2)} - n_{M(1)-1}$, то из (83) следует: $\psi_{12}^2 < \varphi_{11}^2$. Подставив (84) в (82), перегруппировав члены с учетом неравенства $\psi_{22}^2 + \psi_{12}^2 - 2R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}) \geq 0$, справедливость которого следует из (85), получим:

$$\begin{aligned}
 Q_* &> \psi_{22}^2 + \psi_{12}^2 - 2R(n_{M(1)-1}, m_{M(2)}) + \\
 &+ (\varphi_{11}^2 - \psi_{12}^2) + 2[R_{max} - R(n_{-1}, m_0)] \geq 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $Q_* > 0$. Поэтому из (81) имеем:

$$\begin{aligned}
 Q &\geq [M(1) - 1 - J_5]U^2(1) + [M(2) - 1 - J_5]U^2(2) + \\
 &+ J_5[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] + [U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}] + \\
 &+ Q_* > M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*],
 \end{aligned}
 \tag{86}$$

так как минимум (81) имеет место при $J_5 = M(1) - 1$.

Совмещая (69)-(78), (80), (86) и первую формулу соотношений (61), находим:

$$\mu_{\min}[\bullet/M(1), M(2)] = \frac{1}{8\sigma^2} M(1)[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\max}^*]. \quad (87)$$

Для нахождения безусловного минимума (50) остается заметить, что при изменении $M(1)$ в интервале (52) правая часть (87) будет минимальна, когда $M(1) = M_{\min}$. Следовательно,

$$\mu_{\min}[\bullet] = \frac{1}{8\sigma^2} M_{\min}[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\max}^*],$$

и, в соответствии с (47), (48) и (50),

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{1}{8\sigma^2} M_{\min}[U^2(1) + U^2(2) - 2R_{\max}^*]\right\}. \quad (88)$$

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда, если $T_{\min} \geq 2q - 1$, то для верхней границы вероятности ошибки распознавания двух классов справедлива формула (88), в которой M_{\min} , $U^2(1)$, $U^2(2)$ и R_{\max}^* определяются формулами (52), (53) и (70).

Из утверждения 3 вытекает очевидное

СЛЕДСТВИЕ. Если $U(1) \neq U(2)$, то в условиях утверждения 3 вероятность ошибки распознавания $\alpha \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

6. Численное моделирование и анализ результатов

Анализ поведения верхней границы вероятности ошибки (88) в зависимости от $U^2(1)$, $U^2(2)$, R_{\max}^* , T_{\max} , q , N и σ^2 сводится к выяснению того, как ведет себя член, заключенный в фигурные скобки (88). Как видно из (88), (52), (53) и (70), изменение одного или одновременное изменение нескольких из перечисленных аргументов при фиксированных оставшихся, увеличивающее модуль

члена, заключенного в фигурные скобки (88), приводит к уменьшению верхней границы и, наоборот, изменение аргументов, уменьшающее модуль этого члена, увеличивает верхнюю границу. Естественно ожидать, что аналогичным образом ведет себя и вероятность ошибки распознавания. В связи с этим практический интерес представляют результаты, показывающие в каких случаях верхняя граница оказывается завышенной.

Величина $\rho^2 = U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}$ характеризует наибольшее среднеквадратическое сходство или близость импульсов $U(1)$ и $U(2)$ при их всевозможных взаимных перекрытиях по времени относительно друг друга. Аналогичным образом, величина $E_s = M_{min} \rho_s^2$, где $\rho_s^2 = U^2(1) + U^2(2) - 2R_{max}^*$, является мерой среднеквадратического максимального сходства между двумя квазипериодическими последовательностями, образованными из импульсов $U(1)$ и $U(2)$.

При положительных R_{max} и $U(1) \neq U(2)$ наибольшее сходство между двумя последовательностями полных импульсов имеет место, когда число импульсов в последовательностях одинаково, минимально, и каждый импульс одной последовательности пересекается по времени с импульсом другой последовательности так, что свертка каждой пары пересекающихся импульсов максимальна. Для отрицательных R_{max} максимальная мера сходства между последовательностями достигается, когда ни один из импульсов одной последовательности не перекрывается по времени с каким-либо импульсом другой, а число импульсов в этих последовательностях минимально. При $R_{max} = 0$ две последовательности полных импульсов наиболее похожи, когда число импульсов в обеих последовательностях одинаково, минимально и либо импульс одной последовательности не перекрывается с импульсом другой, либо имеется такое пересечение импульса одной последовательности с импульсом другой, что свертка перекрывающихся импульсов максимальна. Чем больше R_{max} , тем ближе ρ^2 к нулю, тем более похожи

импульсы, тем меньше E_* и тем ближе верхняя граница вероятности ошибки к $1/2$.

Определим $E_{\min} = M_{\min}[U^2(1) + U^2(2)]$ — минимальное значение суммы энергий сигналов, содержащихся в двух последовательностях и $\eta_{\min} = \frac{E_{\min}}{2\sigma^2}$ — минимальное значение величины, известной как отношение "сигнал/помеха" (SNR -отношение). Тогда если $R_{\max} \leq 0$, то $R_{\max}^* = 0$ и $E_* = E_{\min}$, так что минимальное отношение сигнал/помеха характеризует отношение максимальной среднеквадратической меры сходства между импульсными последовательностями к дисперсии помехи.

Проверка работоспособности алгоритма осуществлялась на последовательностях импульсов разнообразной формы при различных значениях аргументов, входящих в формулу (88). В качестве примера ниже приведены данные, полученные в двух сериях экспериментов. В обеих сериях распознавалось 2 класса импульсов по сгенерированным квазипериодическим последовательностям данных, зашумленных с помощью гауссовского датчика случайных чисел. В первой серии моделировались разнополярные прямоугольные импульсы: $u_{n1}(1) = a$, $u_{n1}(2) = -a$, $n = 0, 1, \dots, q-1$, а во второй — разнополярные ступенчатые импульсы вида: $u_{n2}(1) = b$, $u_{n2}(2) = -b$, $n = 0, 1, \dots, q'-1$; $u_{n2}(1) = c$, $u_{n2}(2) = -c$, $n = q', q'+1, \dots, q-1$. Импульсы из разных классов имели равные энергии: $U_1^2(1) = U_1^2(2) = U_2^2(1) = U_2^2(2) = U^2$, одинаковые в обеих сериях, а максимальное значение свертки импульсов первого и второго классов и в первой, и во второй сериях было отрицательно, т.е. $R_{\max} < 0$, так что $R_{\max}^* = 0$.

Оценка вероятности ошибки получена по схеме селективной выборки. В предположении равных априорных вероятностей распознаваемых классов общее число N_b выборок в каждой из серий было разбито на 2 части — по $N_b/2$ выборок на класс. Подсчет оценки вероятности ошибочного распознавания проводился по формуле $\hat{\alpha} = \frac{N_{bc}(1) + N_{bc}(2)}{N_b}$, где $N_{bc}(1)$ и $N_{bc}(2)$ — число неправильно

опознанных выборок первого и второго классов соответственно. На контроль предъявлялось по $N_b = 1000$ выборок (500 на класс) при различных значениях дисперсии σ^2 помехи.

На рис.2 приведен график функции (кривая 1)

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{1}{4} \eta_{\min}\right\},$$

т.е. зависимости верхней границы вероятности ошибки α^* от минимального отношения η_{\min} сигнал/помеха. Здесь же представлены экспериментальные кривые оценок $\hat{\alpha}$ вероятности ошибки распознавания последовательностей разнополярных прямоугольных импульсов (первая серия) длины $q = 20$ с амплитудой $a = 60(U_1^2(1) = U_1^2(2) = 72000, R_{\max} = -3600)$ для выборок, содержащих $N = 200$ отсчетов сигнала, при фиксированном $T_{\max} = 180$ и трех значениях T_{\min} : $T_{\min} = 180$ (кривая 2), $T_{\min} = 96$ (кривая 3), $T_{\min} = 40$ (кривая 4). Каждая точка экспериментальной кривой при различных значениях дисперсии помехи (отношении сигнал/помеха) получена по 1000 выборкам.

Аналогичные данные (вторая серия) для разнополярных ступенчатых импульсов той же длины и энергии ($q = 20, q' = 10, b \cong 83.33, c = 16, U_2^2(1) = U_2^2(2) = 72000, R_{\max} \cong -1333.29$) приведены на рис.3. Значения T_{\max} , T_{\min} и номера кривых те же, что и на рис.2. Незначительные превышения кривой 1 кривыми 2 и 3 на рис. 3 лежат в пределах доверительного интервала.

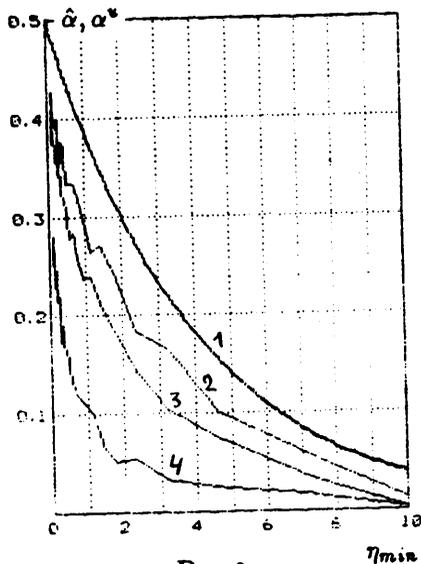
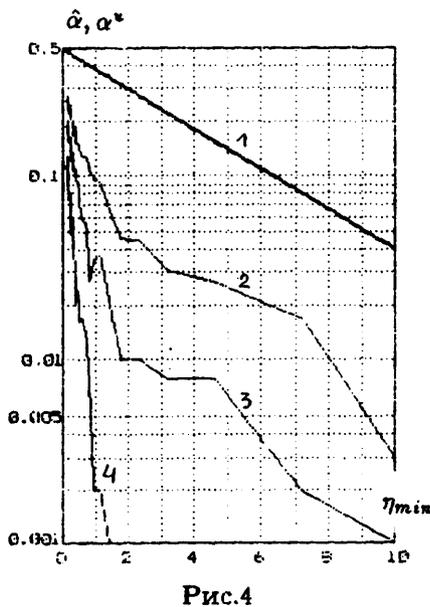
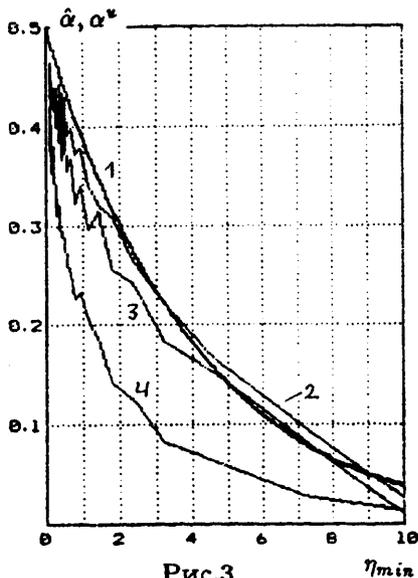


Рис.2

Результаты эксперимента подчеркивают тот факт, что, в отличие от верхней границы вероятности ошибки, вероятность ошибки зависит от вида или формы распознаваемых импульсов как функций времени, а также от T_{min} . Уменьшение вероятности ошибки с уменьшением T_{min} происходит за счет увеличения среднего числа импульсов в выборке, которое повышает в среднем отношение сигнал/помеха, в то время как минимальное отношение сигнал/помеха остается постоянным. Форма импульсов и величина T_{min} определяют близость вероятности ошибки к ее верхней границе. Чем больше похожи импульсы (т.е. чем больше R_{max}) и чем больше T_{min} (при фиксированных T_{max} , R_{max} , N и q), тем ближе вероятность ошибки к своей верхней границе.

Из формул (88) и (52) видно, что верхняя граница вероятности ошибки снижается при уменьшении T_{max} , так как с



уменьшением T_{max} увеличивается минимальное число импульсов в выборке, что приводит к повышению минимального отношения сигнал/помеха. Представляют интерес данные о поведении вероятности ошибки при изменении T_{max} , когда минимальное число импульсов в выборке постоянно. На рис. 4 приведены результаты распознавания тех же прямоугольных импульсов (первая серия) по выборке длины $N = 200$ при $T_{min} = 40$ и трех значениях T_{max} : $T_{max} = 181$ (кривая 2), $T_{max} = 135$ (кривая 3), $T_{max} = 91$ (кривая 4). Кривая 1 соответствует верхней границе вероятности ошибки. Для ступенчатых импульсов (вторая серия) результаты распознавания приведены на рис.5.

Рис.4 и 5 иллюстрируют увеличение вероятности ошибки с ростом T_{max} и R_{max} , когда минимальное число импульсов в выборке и минимальное отношение

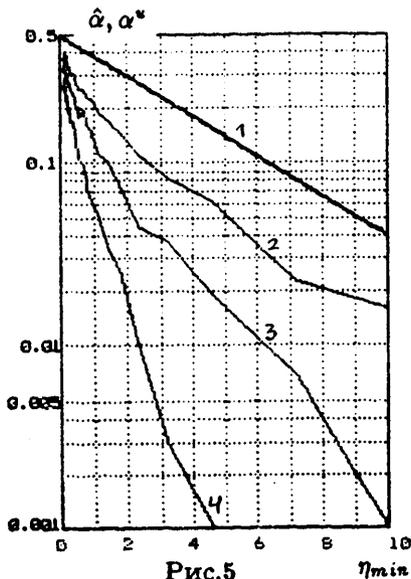


Рис.5

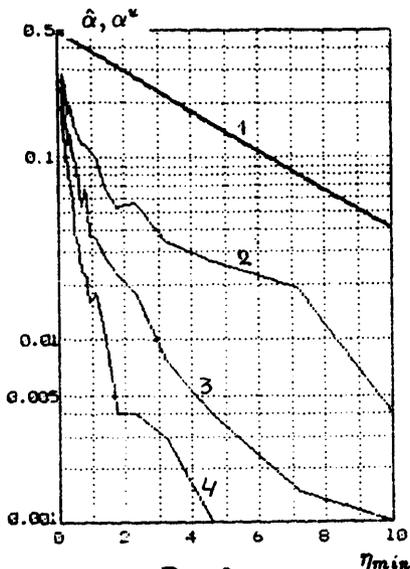


Рис.6

сигнал/помеха постоянны. Чем сильнее различаются импульсы (т.е. чем меньше R_{max}) и чем меньше T_{max} (при фиксированных T_{min} , R_{max} , N и q), тем больше вероятность ошибки отличается от своей верхней границы.

Поведение вероятности ошибки по отношению к ее верхней границе, когда изменяется длина выборки, а минимальное число импульсов в выборке и минимальное отношение сигнал/помеха остаются постоянными, характеризуют рис. 6 (прямоугольные импульсы) и рис.7 (ступенчатые импульсы). Данные, приведенные на этих рисунках, получены для тех же, что и выше, параметров q , q' , b и c , описывающих импульсы, при фиксированных $T_{min} = 40$, $T_{max} = 180$ и трех значениях длины N выборки: $N = 200$ (кривые 2), $N = 290$ (кривые 3) и $N = 378$ (кривые 4). Кривые с номером 1 на обоих рисунках соответствуют вер-

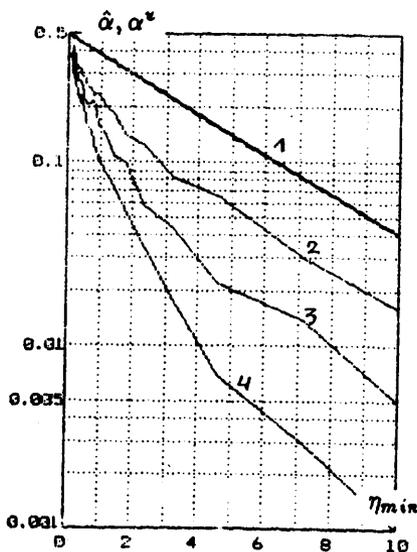


Рис.7

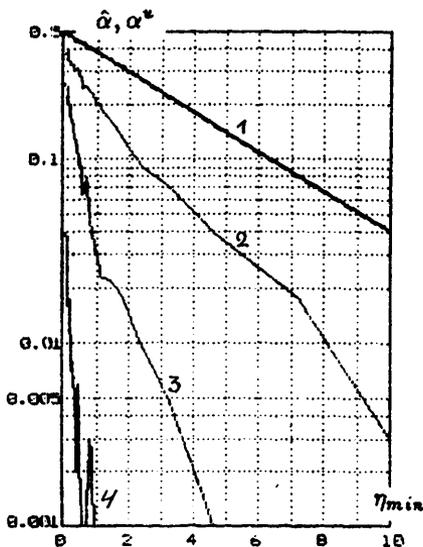


Рис.8

ней границе вероятности ошибки. По рисункам видно, что вероятность ошибки уменьшается с увеличением объема выборки. При этом, чем больше N , тем заметнее верхняя граница превышает вероятность ошибки при условии, что минимальное отношение сигнал/помеха, R_{max} , T_{min} , T_{max} и q фиксированы. Сравнивая рис. 6 и рис. 7, можно заметить, что увеличение R_{max} сближает кривые оценок вероятности ошибки и ее верхней границы.

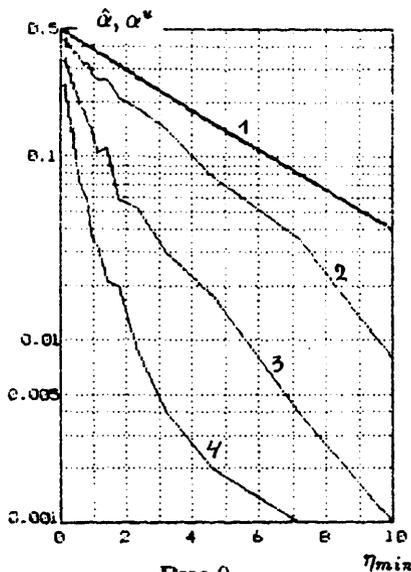


Рис.9

На рис.8 и 9 представлены результаты распознавания прямоугольных и ступенчатых импульсов для трех значений длительности q : $q = 20$ (кривые 2), $q = 40$ (кривые 3) и $q = 60$ (кривые 4) при фиксированном минимальном отношении сигнал/помеха, $N = 200$, $T_{min} = 120$, $T_{max} = 140$. Амплитуда a прямоугольного импульса и параметры b и c ступенчатого были изменены так, чтобы энергия импульсов оставалась такой же, как и в предыдущих экспериментах. Временной параметр q' ступенчатого импульса был равен половине длины q всего импульса. Кривые под номером 1 на рис.8 и 9, как и на предыдущих рисунках, соответствуют верхней границе вероятности ошибки. Рисунки иллюстрируют увеличение вероятности ошибки при уменьшении длины импульса. Чем больше длина импульса, тем значительно верхняя граница превышает вероятность ошибки, когда минимальное отношение сигнал/помеха постоянно, а параметры N , R_{max} , T_{min} и T_{max} фиксированы.

Данные, приведенные на рис.2-9, получены для случая, когда максимум свертки между импульсами двух классов отрицателен, т.е. $R_{max} < 0$ и, как следствие, $R_{max}^* = 0$. Аналогичные результаты имеют место в том случае, когда максимальное значение свертки импульсов первого и второго классов положительно, т.е. $R_{max} > 0$, так что $R_{max}^* > 0$. Разница лишь в том, что вероятность ошибки классификации и ее верхняя граница во втором случае ($R_{max} > 0$) больше, чем в первом ($R_{max} < 0$) при одном и том же отношении сигнал/помеха. Если же $R_{max} = 0$, то $R_{max}^* = 0$ и верхние границы вероятности ошибки совпадают для случаев $R_{max} = 0$ и $R_{max} \leq 0$. Однако вероятность ошибки классификации в случае $R_{max} = 0$ оказывается выше, чем в случае $R_{max} \leq 0$.

В целом, результаты численного моделирования показывают, что верхняя граница вероятности ошибки оказывается более завышенной в тех случаях, когда при фиксированном минимальном отношении сигнал/помеха:

- величина T_{min} принимает значения из области минимально возможных значений при постоянных R_{max} , T_{max} , N и q ;
- значение параметра T_{max} при постоянных R_{max} , T_{min} , N и q лежит в области минимума;
- длина N выборки максимальна, а параметры R_{max} , T_{min} , T_{max} и q фиксированы;
- длительность q импульса принимает значения из множества максимальных значений при постоянных R_{max} , T_{min} , T_{max} и N ;
- значение величины R_{max} при фиксированных T_{min} , T_{max} , q и N лежит в области наименьших значений.

З а к л ю ч е н и е

1. В работе решена задача совместного распознавания группы квазипериодических импульсов и обнаружения (оценивания) моментов их начала в условиях, когда наблюдения искажены аддитивной гауссовской помехой с известной дисперсией. Из-за необходимости принятия

решения о совокупности распознаваемых объектов (импульсов) одновременно с решением задачи оценивания (моментов возникновения импульсов), на первый взгляд, кажется, что поставленная задача не укладывается в традиционные для распознавания образов задачи групповой классификации. Однако, по ходу изложения в работе фактически показано, что в случае дискретных выборочных данных задача сводится к классическим задачам проверки статистических гипотез. При этом байесовская стратегия принятия решения в условиях равных априорных вероятностей распознаваемых классов приводит к единому правилу совместного распознавания и оценивания, основанному на принципе максимального правдоподобия.

2. Максимизация функции правдоподобия на множестве всевозможных гипотез, описывающих одновременно и распознаваемую группу импульсов, и моменты начала импульсов в выборке, требует перебора множества допустимых вариантов, число которых растет экспоненциально с ростом объема выборки. В работе показано, что для решаемой задачи максимизация функции правдоподобия эквивалентна минимизации аддитивного функционала с ограничениями в виде линейных неравенств и, таким образом, поиск экстремума может осуществляться методами динамического программирования за полиномиальное время. Затраты по памяти для данной задачи оказываются линейными.

Приведены формулы пошаговой оптимизации, составляющие сущность вычислительного алгоритма и получены оценки его временной и емкостной сложности, увязанные с исходными параметрами решаемой задачи.

3. Дана теоретическая оценка точности работы алгоритма, а именно: найдена верхняя граница вероятности ошибки распознавания. Конструктивный характер решения задачи подчеркнут результатами численного моделирования, показавшими, с одной стороны, высокую эффективность алгоритма при обработке импульсных последовательностей в условиях интенсивных помех, а с другой — совпадение теоретических результатов с эс-

периментальными. При этом указаны те ситуации, в которых верхняя граница вероятности ошибки оказывается завышенной.

4. Особенностью предложенного решения и алгоритма является апостериорный способ обработки наблюдений, при котором, в отличие от последовательного способа, совместное решение задачи распознавания группы импульсов и оценивания моментов начала импульсов в группе находится по полной совокупности наблюдений, т.е. после накопления всех выборочных данных. Здесь уместно напомнить, что апостериорные способы обработки точнее последовательных, но требуют больших временных затрат.

Другая, важная с практической точки зрения, особенность приведенного решения состоит в том, что оно учитывает неполные (рассеченные) импульсы на границах выборки и дает возможность корректной алгоритмической обработки этих импульсов в условиях, когда длина интервала наблюдения или анализируемого кадра невелика. В известных решениях задач обнаружения и распознавания влиянием членов, входящих в функцию правдоподобия и описывающих неполные импульсы на границах анализируемого кадра, обычно пренебрегают. Подобное пренебрежение оправдано лишь в асимптотике, т.е. при больших длинах анализируемого кадра. Напротив, учет рассеченных импульсов примечателен в том плане, что позволяет применять изложенный алгоритм без каких-либо усовершенствований для организации обработки протяженных сигналов и больших по объему числовых данных в режиме скользящего кадра небольшой длины.

5. Представляется, что приведенный алгоритм найдет свое применение при решении разнообразных прикладных задач групповой классификации с несинхронизованными по времени данными. Наконец, заметим, что приведенное решение легко обобщить на многомерный случай, если использованный в работе термин "импульс" интерпретировать как матрицу.

Л и т е р а т у р а

1. КЛИГЕНЕ Н., ТЕЛЬКСНИС Л. Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика.-1983.- №10.-С.5-56.
2. ТОРГОВИЦКИЙ И.Ш. Методы определения момента изменения вероятностных характеристик случайных величин //Зарубежная радиоэлектроника.-1976.- № 1.-С.3-52.
3. НИКИФОРОВ И.В. Последовательное обнаружение свойств временных рядов.- М.: Наука, 1983.- 199 с.
4. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем: Пер.с англ. /М.Бассвиль, А.Вилски, А.Банвенист и др.; под ред. М.Бассвиль, А.Банвениста. - М.: Мир, 1989.- 278 с.
5. ЖИГЛЯВСКИЙ А.А., КРАСКОВСКИЙ А.Е. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники.- Л.,1988.-221 с.(Изд-во Ленинградского университета.)
6. ТРИФОНОВ А.П., ШИНАКОВ Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех.- М.: Радио и связь,1986. - 264 с.
7. ТИХОНОВ В.И. Оптимальный прием сигналов. - М.: Радио и связь, 1983. - 320 с.
8. ЛЕВИН В.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.2. - М.: Сов.радио, 1975.-392 с.
9. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование. - М.: Иностранная литература, 1960. - 400 с.
10. CHERNOFF H. A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on the Sum of Observations // The Annals of Mathematical Statistics.- 1952.- Vol.23, № 4 (December).- P.493-507.

Поступила в редакцию
6 июня 1996 года