ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И
ЭКСПЕРТНЫЕ СИСТЕМЫ
(Вычислительные системы)
1996 год Выпуск 157

УДК 519.95

БАЙЕСОВСКИЕ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ В СЛУЧАЕ МНОГОМЕРНОГО T-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА[1]

Р.А.Абусев

Введение

Обозначим $X \sim \mathcal{N}_k(\mu, \Sigma)$ тот факт, что случайная величина X имеет k-мерное нормальное распределение с плотностью

$$p_{\mu,\Sigma}(x) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}, \quad |\Sigma| > 0$$

Если же случайная $k \times k$ симметричная, положительно определенная матрица Y имеет распределение Уишарта с параметрической матрицей Σ и p степенями свободы

$$W(Y/p, \Sigma) = \frac{|Y|^{\frac{p-k-1}{2}}}{\gamma(k,p)|\Sigma|^{\frac{p}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(Y\Sigma^{-1})\right\},$$

где $p \geq k$, $|\Sigma| > 0$, $\gamma(k,p) = 2^{\frac{kp}{2}} \pi^{\frac{k(k-1)}{4}} \prod_{r=1}^{k} \Gamma\left(\frac{p-r+1}{2}\right)$, $\mathrm{Sp}A$ — след матрицы A, то это обозначим $Y \sim W_k(p, \Sigma)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 95-01-00015а

Под $Z \sim \chi^2(p)$ будем понимать, что случайная величина Z имеет хи-квадрат распределение с p степенями свободы, плотность которой обозначим $P(z/p)$.

Пусть $Y \sim \mathcal{N}_k(\mu, \Sigma)$ и $Z \sim \chi^2(p)$ независимы. Тогда случайный вектор

$$X = \mu + Y\left(\frac{z}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

по определению имеет k-мерное T-распределение с p степенями свободы. Обозначим через $p(y, z/p, \Sigma)$ плотность совместного распределения Y и Z, из которой при замене $Z = z$, $x = \mu + y(z/p)^{-1/2}$ с якобианом преобразования $(z/p)^{p/2}$ получим плотность совместного распределения случайных величин X и Z

$$p(x, z/\mu, \Sigma, p) =$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{k}{2}} p^{-\frac{k}{2}} z^{\frac{p+k}{2}}}{2^{\frac{p+k}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2p}[p + (x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)]z\right\} \tag{2}$$

где $p > 0$; $|\Sigma| > 0$.

Теперь ясно что проинтегрировав (2) по z получим [5] плотность распределения вектора X, т.е. k-мерного T-распределения с p степенями свободы и параметрами μ, Σ

$$p(x/\mu, \Sigma, p) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right) p^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{\frac{k}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} [p + (x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)]^{-\frac{p+k}{2}}. \tag{3}$$

Многомерное T-распределение впервые рассмотрено в 1954 году в связи с исследованием многомерных задач теории решений и изучением отклонений распределения выборки от нормального. Впоследствии это распределение нашло широкое применение в теоретических и прикладных исследованиях многомерного статистического анализа. Вопросы построения оценок максимального правдоподобия в случае T-распределения исследованы в [1]. Характеристическая функция для этого распределения и ее свойства изучены в [2]. Соотношения между многомерным нормальным распределением — распределением Уишарта и T-распределением, а также маргинальных распределений достаточных статистик рассмотрены в [3]. Задачи классификации наблюдений из совокупностей, имеющих T-распределения решались в [4]. Несмещенные оценки для плотностей распределений достаточных статистик многомерного T-распределения получены в [5]. Там же построены решающие правила статистической групповой классификации объектов из таких совокупностей, основанных на несмещенных оценках.

В данной работе впервые получена статистическая байесовская оценка для плотности многомерного T-распределения Стьюдента, на основе которой построен статистический классификатор объектов из совокупностей, имеющих T-распределение и исследованы их статистические свойства.

Статистическая байесовская оценка плотности в случае T-распределения Стьюдента

Пусть случайный вектор X имеет k-мерное T-распределение с плотностью (3). Предположим, что оба параметра μ и Σ неизвестны и дана выборка $\pi_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ объема n из распределения (3). Получим байесовскую оценку $p_B(x/\mu, \Sigma, p)$ для (3).

Известно [6,7], что байесовская оценка $g_B(x, \theta)$ для заданной функции $g(x, \theta)$, построенная по выборке π_n, извлеченной из распределения с плотностью $p(x/\theta)$ и по заданной Лебеговой мере $p(\theta)d\theta$, $\theta \in \Theta$, находится по формуле

$$g_B(x, \theta) = \frac{\int\limits_{\Theta} g(x, \theta) L(\pi_n/\theta) p(\theta) d\theta}{\int\limits_{\Theta} L(\pi_n/\theta) p(\theta) d\theta}, \qquad (4)$$

где $L(\bar{x}_n/\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i/\theta)$ — функция правдоподобия.

ТЕОРЕМА 1. *Статистическая байесовская оценка для плотности T-распрделения (3) с неизвестными параметрами μ, Σ, основанная на Лебеговой мере $p(\theta)d\theta = d\mu d\Sigma$ и построенная по выборке $\bar{x}_n$ и наблюдению $x_{n+1} = x$ имеет вид*

$$\begin{aligned} p_B(x/\mu,\Sigma,p) &= \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\pi^{\frac{k}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)} |(n+1)S_{n+1}|^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[1 - \frac{1}{n}(x - \bar{x}_{n+1})' S_{n+1}^{-1}(x - \bar{x}_{n+1})\right]^{\frac{n-k-2}{2}} \end{aligned} \qquad (5)$$

и выражена только через достаточные статистики

$$\begin{aligned} (n+1)\bar{x}_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} = n\bar{x}_n + x_{n+1}, \\ (n+1)S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1}(x_i - \bar{x}_{n+1})(x_i - \bar{x}_{n+1})' = \\ &= nS_n + \frac{n}{n+1}(x - \bar{x}_n)(x - \bar{x}_n)'. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (2) для функции совместной плотности $p(\bar{x}_n, z/\mu, \Sigma, p)$ имеем

$$\begin{aligned} p(\bar{x}_n, z/\mu, \Sigma, p) &= \prod_{i=1}^{n} p(x_i, z/\mu, \Sigma, p) = \\ &= \frac{|\Sigma|^{\frac{-n}{2}} \quad z^{\frac{kn+p-2}{2}}}{2^{\frac{kn+p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) p^{\frac{kn}{2}} \pi^{\frac{kn}{2}}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2p}\left[p + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)'\Sigma^{-1}(x_i - \mu)\right] z\right\} \end{aligned}$$

или с учетом равенства

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)'\Sigma^{-1}(x_i-\mu)=$$

$$=n(\overline{x}_n-\mu)'\Sigma^{-1}(x_i-\mu)+n\mathrm{Sp}S_n\Sigma^{-1}$$

$$p(\pi_n,z/\mu,\Sigma,p)=$$
$$= a\frac{z^{\frac{kn+p-2}{2}}}{|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{z}{2p}[p+n\mathrm{Sp}S_n\Sigma^{-1}+\right.$$
$$\left.+\ n(\overline{x}_n-\mu)'\Sigma^{-1}(\overline{x}_n-\mu)]\right\}, \qquad (6)$$

где
$$a=\left[2^{\frac{kn+p}{2}}\pi^{\frac{kn}{2}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)p^{\frac{kn}{2}}\right]^{-1}.$$

Ясно, что
$$L(\pi_n/\mu,\Sigma,p)=\int\limits_0^{\infty}L(\pi_n,z/\mu,\Sigma,p)dz \qquad (7)$$

является функцией правдоподобия выборки π_n. Для построения байесовской оценки воспользуемся формулой (4) при $p(\theta)d\theta=d\mu d\Sigma$. Имеем

$$p_B(x/\mu,\Sigma,p)=$$
$$=\frac{\int\limits_{R^k}\int\limits_{W}p(x/\mu,\Sigma,p)L(\pi_n/\mu,\Sigma,p)d\mu d\Sigma}{\int\limits_{R^k}\int\limits_{W}L(\pi_n/\mu,\Sigma,p)d\mu d\Sigma},$$

где $L(\pi_n/\mu,\Sigma,p)$ – функция правдоподобия выборки π_n, R^k – k-мерное евклидово пространство, W – пространство всех положительно определенных симметричных квадратных порядка k матриц. Так как $x=x_{n+1}$, то под интегралом в числителе последнего равенства есть функция правдоподобия $L(\pi_{n+1}/\mu,\Sigma,p)=\prod\limits_{i=1}^{n+1}p(x_i/\mu,\Sigma,p)$ объединенной выборки $\pi_{n+1}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}\}$, то с учетом

(7), после замены порядка интегрирования получим

$p_{\text{B}}(x/\mu, \Sigma, p) =$

$$= \frac{\int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{R^k} \int\limits_W L(\pi_{n+1}, z/\mu, \Sigma, p) d\mu d\Sigma \right\} dz}{\int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{R^k} \int\limits_W L(\pi_n, z/\mu, \Sigma, p) d\mu d\Sigma \right\} dz} = \frac{\int\limits_0^\infty \psi_{n+1} dz}{\int\limits_0^\infty \psi_n dz}. \tag{8}$$

Вычислим $\int\limits_0^\infty \psi_n dz$. Для этого подставим соответствующее выражение и получим трехкратный интеграл

$$\int\limits_0^\infty \psi_n dz =$$

$$= a \int\limits_0^\infty z^{\frac{kn+p-2}{2}} \exp\left\{-\frac{z}{2}\right\} \left[\int\limits_W |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n}{2p} (\mathrm{Sp} S_n \Sigma^{-1})\right\} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int\limits_{R^k} \exp\left\{-\frac{nz}{2p}(x_{n+1} - \mu)' \Sigma^{-1} (x_{n+1} - \mu)\right\} d\mu \right) d\Sigma \right] dz.$$

Интеграл по μ равен [8]

$$\int\limits_{R^k} \exp\left\{-\frac{nz}{2p}(x_{n+1} - \mu)' \Sigma^{-1} (x_{n+1} - \mu)\right\} d\mu = \left(\frac{2\pi p}{nz}\right)^{k/2} |\Sigma|^{1/2},$$

поэтому

$$\int\limits_0^\infty \psi_n dz =$$

$$= a \left(\frac{2\pi p}{n}\right)^{k/2} \int\limits_0^\infty z^{(kn+p-2)/2} \exp\left\{-\frac{z}{2}\right\} \times$$

$$\times \left[\int\limits_W |\Sigma|^{-n/2} \exp\left\{-\frac{nz}{2p} \mathrm{Sp} S_n \Sigma^{-1}\right\} d\Sigma \right] dz.$$

После замены переменных

$$\frac{nz}{p} S_n \Sigma^{-1} = T, \qquad d\Sigma = \left|\frac{nz}{2} S_n\right|^{(k+1)/2} \frac{dT}{|T|^{k+1}}$$

имеем

$$\int_W |\Sigma|^{-(n-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left[\frac{nz}{p}\ S_n \Sigma^{-1}\right]\right\} d\Sigma =$$

$$= \left(\frac{p}{z}\right)^{\frac{(n-k-2)k}{2}} \gamma(k, n-k-2) |nS_n|^{-\frac{n-k-2}{2}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \psi_n dz = a \frac{(2\pi p)^{k/2} p^{(n-k-2)k/2} \gamma(k, n-k-2)}{n^{k/2} |nS_n|^{(n-k-2)/2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty z^{(p+k^2+k-2)/2} \exp\left\{-\frac{z}{2}\right\} dz$$

и вычислив последний интеграл как гамма-функцию после подстановки выражения для a и тождественных преобразований получим

$$\int_0^\infty \psi_n dz = \frac{\Gamma\left(\frac{p+k^2+k}{2}\right) \prod_{r=1}^{k} \Gamma\left(\frac{n-k-r-1}{2}\right) |nS_n|^{-(n-k-2)/2}}{\pi^{(2n-k-1)k/2} p^{(k+1)k/2} n^{k/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \tag{9}$$

Совершенно аналогично

$$\int_0^\infty \psi_{n+1} dz =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+k^2+k}{2}\right) \prod_{r=1}^{k} \Gamma\left(\frac{n-k-r}{2}\right) |(n+1)S_{n+1}|^{-(n-k-1)/2}}{\pi^{(2n-k+1)k/2} p^{(k+1)k/2} (n+1)^{k/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \tag{10}$$

Подставим (9), (10) в (8) и после упрощений получим (5), что и завершает доказательство теоремы.

Оценка (5) может быть выражена и через достаточные статистики $\bar{x}_n$, $nS_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(x_i - \bar{x}_n)'$. Рассмотрим случай, когда один из параметров известен, а другой не известен.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если параметр μ неизвестен, а Σ известен, то байесовская оценка $p'_\theta(x/\mu,\Sigma,p)$ для плотности (3) при априорной Лебеговой мере $p(\theta)d\theta = d\mu$ дается формулой*

$$p'_\theta(x/\mu,\Sigma,p) = \frac{p^{\frac{p}{2}} n^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k+p}{2}\right) |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(n+1)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \pi^{\frac{k}{2}}} \times$$

$$\times \left[p + \frac{(n+1)}{n}(x - \bar{x}_{n+1})'\Sigma^{-1}(x - \bar{x}_{n+1})\right]^{-\frac{k+p}{2}}$$

и выражена только через достаточную статистику $\bar{x}_{n+1}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *В случае неизвестной матрицы Σ и известного μ байесовская оценка $p''_\theta(x/\mu,\Sigma,p)$ для плотности (3), основанная на Лебеговой мере $p(\theta)d\theta = d\Sigma$, имеет вид:*

$$p''_\theta(x/\mu,\Sigma,p) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{kn+k+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{kn+p}{2}\right)} \prod_{r=1}^{k} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1-k-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k-2}{2}\right)} \frac{2^{\frac{k}{2}} \pi^{-\frac{k}{2}}}{|(n+1)\Sigma_{n+1}|^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{1}{n+1}(x-\mu)'\Sigma_{n+1}^{-1}(x-\mu)\right]^{\frac{n-k-1}{2}}$$

и зависит только от достаточной статистики $(n+1)\Sigma_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1}(x_i-\mu)(x_i-\mu)'$.

Покажем, что оценка (5) является смещенной оценкой и найдем величину смещения.

ТЕОРЕМА 2. *Байесовская оценка (5) для плотности (3) k-мерного T-распределения является смещенной оценкой, т.е. $\mathsf{M}[p_\theta(x/\mu,\Sigma,p)] \neq p(x/\mu,\Sigma,p)$ при конечном n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [5] получена несмещенная оценка для плотности (3), которая равна

$$\begin{aligned}\hat{p}(x/\mu,\Sigma,p) &= \left(\frac{n+1}{\pi n}\right)^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}|(n+1)S_{n+1}|^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[1-\frac{1}{n}(x-\overline{x}_{n+1})'S_{n+1}^{-1}(x-\overline{x}_{n+1})\right]^{\frac{n-k-2}{2}}\end{aligned}$$

и совпадает с несмещенной оценкой для плотности k-мерного нормального распределения [10,11].

Сравнивая эту оценку с байесовской оценкой (5) имеем, что

$$p_{\mathrm{B}}(x/\mu,\Sigma,p) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\hat{p}(x/\mu,\Sigma,p).$$

Следовательно верно равенство

$$\mathbf{M}[p_{\mathrm{B}}(x/\mu,\Sigma,p)] =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n-k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}p(x/\mu,\Sigma,p),$$

которое и доказывает смещенность оценки (5).

Чтобы найти величину смещения воспользуемся равенством [9]

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} = \lim_{|z|\to\infty} z^a \tag{11}$$

и представим коэффициент в правой части равенства (11) в виде

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \approx$$

$$\approx \left(\frac{n-k-1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}\left(\frac{n-k}{2}\right)^{-\frac{k}{2}} \approx \left(1-\frac{1}{n-k}\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Отсюда следует, что байесовская оценка (5) является асимптотически несмещенной оценкой для (3) и при конечном n величина смещения не больше чем $\dfrac{kp(x/\mu,\Sigma,p)}{2(n-k)}$.

Статистическая классификация наблюдений из многомерных T-распределений

Пусть совокупность π_i имеет k-мерное T-распределение Стьюдента с параметрами μ_i, Σ_i и $\pi_{i0}=\{x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in_i}\}$ - независимая повторная выборка объема n_i из совокупности π_i, $i=1,2,\dots,M$. Пусть $x'=(x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(k)})$ - произвольный объект $x\in\bigcup_{i=1}^{M}\pi_i$ и $p(x/\mu_i,\Sigma_i,p)$ - плотность распределения объектов в совокупности π_i, заданной формулой (3), $i=1,2,\dots,M$. Если параметры μ_i, Σ_i известны $i=1,2,\dots,M$, то решающее правило

$$x\in\pi_j,\qquad \text{если}\qquad q_jp(x/\mu_j,\Sigma_j,p)\geq q_ip(x/\mu_i,\Sigma_i,p),\tag{12}$$

при всех $i\neq j$, $i=1,2,\dots,M$, является [4] оптимальным, где q_i - априорная вероятность совокупности π, $i=1,2,\dots,M$.

Предположим, что параметры μ_i, Σ_i совокупностей π_i неизвестны, $i=1,2,\dots,M$. Тогда на основе обучающих выборок π_{i0} строим байесовские оценки $p_B(x/\mu_i,\Sigma_i,p)$ для плотностей $p(x/\mu_i,\Sigma_i,p)$ в соответствии с формулой (5), подставим эти оценки в (12) и получим статистическое решающее правило

$$x\in\pi_j,\ \text{если}\ q_jp_B(x/\mu_j,\Sigma_j,p)\geq q_ip_B(x/\mu_i,\Sigma_i,p)\tag{13}$$

при всех $i\neq j$, $i=1,2,\dots,M$.

Основное свойство статистического решающего правила классификации (13) содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. *Статистическое правило классификации (13), основанное на байесовских оценках плотностей является асимптотически оптимальным правилом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что для доказательства теоремы достаточно [4,8] показать, что байесовская оценка (5) для плотности $p(x/\mu, \Sigma, p)$ является состоятельной оценкой, т.е.

$$p_B(x/\mu, \Sigma, p) \xrightarrow[n\to\infty]{p} p(x/\mu, \Sigma, p).$$

Для этого заметим, что $x_i = \mu + y_i(z/p)^{-1/2}$, где y_i, z независимы и $y_i \sim N(0, \Sigma)$, $z \sim \chi^2(p)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Отсюда следует, что

$$\overline{x}_n = \mu + \overline{y}(z/p)^{-1/2}, \qquad nS_n = nS_n(y)\left(\frac{z}{p}\right)^{-1},$$

где $n\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $nS_n(y) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(y_i - \overline{y})'$ и статистики $\overline{y}$, $S_n(y)$ являются оценками максимального правдоподобия для μ_i и Σ_i, т.е. $\overline{y} \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$, $S_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \Sigma$. Тогда очевидно, что

$$\overline{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \mu, \qquad S_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} \left(\frac{p}{z}\right)\Sigma$$

и, следовательно, в (5) множитель

$$\left[1 - \frac{1}{n}(x - \overline{x}_{n+1})'S_{n+1}^{-1}(x - \overline{x}_{n+1})\right]^{\frac{n-k-2}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{p}$$

$$\longrightarrow \exp\left\{-\frac{z}{2p}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\},$$

$$|S_{n+1}|^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{p} \left(\frac{p}{z}\right)^{k/2}|\Sigma|^{1/2}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{k/2} = 1$ остается множителем

$$\frac{1}{(n+1)^{k/2}}\prod_{r=1}^{k}\frac{\Gamma\left(\frac{n-k-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k-r-1}{2}\right)}.$$

С учетом асимптотической формулы (11)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^{k/2}}\prod_{r=1}^{k}\frac{\Gamma\left(\frac{n-k-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k-r-1}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k/2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-k/2}\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{n-k-r-1}{2}\right)^{1/2}=\frac{1}{2^{k/2}}.$$

Из цепочки этих равенств следует, что

$$p_{\text{B}}(x/\mu,\Sigma,p)\xrightarrow[n\to\infty]{p}$$

$$\longrightarrow\frac{z^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}p^{k/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{z}{2p}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}.$$

Если проинтегрируем правую часть последнего равенства по распределению z, т.е. найдем математическое ожидание правой части по z, то получим (3), что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что статистические правила классификации T-распределений Стьюдента можно построить и в случае, когда один из параметров известен, а другой неизвестен.

Литература

1. ANDERSON T.W., FANG K.T.,HUANG Hsu. Maximum-likehood estimates and likehood-radio criteria for multivariate elliptically nontoured distributions// Canad. J.Statist.–1986.– № 14.– P. 55–59.

2. SUTRADHAR B.C. On the characteristic function of multivariate Student t-distribution// Canad. J.Statist.– 1986.– № 14. – P. 329-337.

3. SUTRADHAR B.C., ALI M.M. A generalization of the Wishart distribution of the elliptical model and its moments for the multivariate t-model// J.Mult. Anal.– 1989.– Vol. 29. – P. 155-162.

4. SUTRADHAR B.C. Discrimination of observations into one of two t-populations// Biometrics.– 1990.– Vol. 46.– P. 827-835.

5. KRZYSKO M., WOLYNSKI W. Statistical group classification rules for the multivariate student t-distribution// Random Oper. & Stoch. Eqs.-1993.- Vol.1, № 3.- P.361-367.

6. ЗАКС Ш. Теория статистических выводов.- М.: Мир. 1975.- 776с.

7. ABUSEV R.A. Mathematical Model on Group Classification Problem // Pattern recognation and image analysis. МАИК НАУКА/ Interperiodica publishing. - 1994.- Vol. 4, № 1.- P.1-10.

8. АБУСЕВ Р.А. Групповая классификация. Решающие правила и их характеристики. -Пермь, 1992.- 220с.(Изд-во Пермского ун-та)

9. ГРАДШТЕЙН И.С., РЫЖИК И.М. Таблица интегралов сумм, рядов и произведений. -М.: ГИФМЛ, 1962.- 1100 с.

10. GHURYE S.G., OLKIN I. Unbiased estimation of some multivariate probability densities and related functions// Ann. Math. Statist.-1969.- Vol. 40.- P.1261-1271.

11. АБУСЕВ Р.А., ЛУМЕЛЬСКИЙ Я.П. Несмещенные оценки и задачи квалификации многомерных нормальных совокупностей //Теория вероятнностей и ее применения.- 1970.- № 2.- С.381-389.

Поступила в редакцию
23 октября 1996 года