ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И
ЭКСПЕРТНЫЕ СИСТЕМЫ
(Вычислительные системы)
1996 год Выпуск 157

УДК 510

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ И ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

А.С.Нудельман

В данной работе формулируется экстраполяционная точка зрения, касающаяся природы аксиом классической теории множеств, в соответствии с которой считается, что в основе мотивировки аксиом (классической) теории множеств должна лежать только одна гносеологическая идея — идея экстраполяции (индуктивного распространения) свойств конечных, "наблюдаемых эмпирически" объектов на все объекты, включая и бесконечные. Здесь строится начальный фрагмент STE_0 экстраполяционной теории множеств STE. В основе мотивировки аксиом STE_0 лежит идея первичной экстраполяции (наследственно) конечных множеств на все множества. Здесь показывается, что $\in$ — часть теории STE_0 шире теории множеств Цермело — Френкеля ZF.

1. О природе аксиоматики теории множеств

Один из существующих взглядов на природу (аксиом) математики состоит в том, что исходные математические понятия и их первичные свойства не сконструированы свободной человеческой фантазией, а "взяты" из окружающего человека эмпирического мира, из опыта его жизни в этом мире. Наиболее отчетливо, повидимому, такой взгляд был сформулирован еще Дж.Ст.Миллем

(1806–1873), который писал: "Наука о числах не составляет таким образом никакого исключения из того положения, к которому мы раньше пришли: а именно, что даже в дедуктивных науках ... их первыми началами являются обобщения из опыта" [1, с.230], и который утверждал, что аксиомы математики есть "истины опытные, обобщения из наблюдения" [1, с.207]. Понятие "обобщение из опыта" ("обобщение из наблюдения") Дж.Ст.Милль отождествлял с понятием "индукция" и говорил, что индукция "состоит в том, что на основании нескольких отдельных случаев, в которых известное явление наблюдалось, мы заключаем, что это явление имеет место и во всех случаях известного класса, т.е. во всех случаях, сходных с наблюдавшимися в некоторых обстоятельствах, признаваемых существенными" [1, с.277]. Если перейти на современную терминологию, то вышеприведенный взгляд Дж.Ст.Милля можно выразить следующим образом: а) аксиомы математики есть результат эмпирической индукции, т.е. утверждения, получаемые в результате применения индуктивного вывода к соответствующим опытным данным, б) индуктивный вывод представляет собой эмпирическое обобщение, т.е. экстраполяцию (распространение) свойств объектов, наблюдаемых в опыте, на все объекты соответствующей предметной области. Автор данной работы разделяет именно такую точку зрения, которую назовем экстраполяционной.

Известно, что естественная формализация понятий и доказательств современной реальной классической математики осуществляется на основе теории множеств Цермело — Френкеля ZFC. Поэтому аксиомы теории ZFC можно считать аксиомами всей (или почти всей) современной математики. Далее речь пойдет только о теории ZF, т.е. о теории ZFC без аксиомы выбора.

С экстраполяционной точки зрения природа (возникновения) аксиом ZF, за исключением аксиомы бесконечности A_{inf}, выглядит следующим образом:все аксиомы теории $ZF - A_{inf}$ появились в качестве результата элементарного гносеологического приема — в качестве результата прямой экстраполяции, прямого распространения свойств конечных совокупностей на бесконечные, при этом сам факт экстраполяции обуславливается принятием аксиомы бесконечности A_{inf}. Действительно, всякая аксиома $ZF - A_{inf}$ для (наследственно) конечных множеств истинна почти "осязаемо", почти эмпирически и такая аксиома, исходно выражающая некоторое свойство конечных множеств, принимается в качестве истинной для всех множеств, как конечных ("наблюдаемых" в опыте), так и бесконечных (находящихся вне "наблюдения"). Что касается свойств обозримых конечных множеств, выраженных аксиомами $ZF - A_{inf}$, то эти свойства непосредственно усматриваются на физических прототипах этих множеств — на обозримых совокупностях физических объектов.

Итак, экстраполяционная точка зрения позволяет рассматривать классическую теорию множеств как своеобразную эмпирическую теорию, содержащую бесконечные множества в качестве полезных (и необходимых) теоретических конструктов, позволяет не удивляться тому факту, что классический математический аппарат весьма полезен для описания эмпирического мира.

Таким образом, ZF можно рассматривать как своего рода экстраполяционную теорию множеств. Поскольку в ZF неразрешимы многие фундаментальные теоретико-множественные проблемы (например, проблема больших кардиналов, континуум-проблема), попытки построения на экстраполяционной основе теории множеств более мощной, чем ZF, представляются актуальными. Одна из таких попыток предпринята ниже в п. п. 2–4. Заметим, что экстраполяционность расширенной теории множеств (STE_0 и гипотетической STE) должна гарантировать ее большую, чем у ZF, полезность для описания реального эмпирического мира.

2. Теория STE_0

Языком L^V теории STE_0 будет язык первой ступени сигнатуры $<\in, V>$, содержащей двухместный предикатный символ $\in$ и константу V. Переменными в формулах языка L^V будут символы $v_i, i \in \omega$, обозначаемые буквами x, y, z, t и f, возможно, с индексами.

Предметной областью для языка L^V будет служить семейство U совокупностей, называемых классами. Некоторые классы будут называться множествами. Символ $\in$ будет именовать стандартное отношение принадлежности между классами, а символ V будет именовать класс всех входящих в U множеств.

Логической основой теории STE_o будет исчисление предикатов (с равенством) сигнатуры $<\in, V>$.

В дальнейшем через φ, ψ (возможно, с индексами) будут обозначаться формулы языка L^V. Формула φ будет называться $\in$-формулой или формулой языка L, если φ есть формула сигнатуры $<\in>$. Запись $\varphi(x_1, \ldots, x_n), n \geq 0$, будет означать, что $x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные свободные переменные формулы φ. Запись вида $y = \{x|\varphi\}$ будет обозначать формулу $\forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi)$, а запись вида $y = \{x \in a|\varphi\}$ — формулу $\forall x(x \in y \leftrightarrow x \in a \;\&\; \varphi)$. Если q — терм (т.е. переменная или V), не входящий в формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, то через $\varphi^q(x_1, \ldots, x_n)$ или φ^q, или $[\varphi]^q$ будет обозначаться релятивизация формулы φ относительно терма q. Используемые без пояснений общеупотребительные в ZF обозначения и сокращения будут иметь обычный смысл (при замене термина "класс" на традиционный термин "множество"). В частности, входящее в формулировку аксиомы A_5 выражение $y \subseteq V$ обозначает $\forall z(z \in y \rightarrow z \in V)$, а выражение $|y| \leq |x|$ обозначает $\in$-формулу, утверждающую, что мощность класса y меньше или равна мощности класса x.

Аксиомы теории STE_o.

A_1. Аксиома экстенсиальности для множеств

$$[\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)]^V.$$

A_2. Аксиома фундирования для множеств

$$[\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists t \in x \forall z(z \in t \rightarrow z \notin x))]^V.$$

A_3. Аксиома (схема) выделения для множеств

$$[\forall t_1, \ldots, t_n \forall x \exists y(y = \{z \in x \mid \varphi(z, t_1, \ldots, t_n)\})]^V,$$

где $\varphi \in L, n \geq O$ и переменная y не входит в φ свободно.

A_4. Аксиома транзитивности класса V

$$\forall x, y(x \in V \ \& \ y \in x \rightarrow y \in V).$$

A_5. Аксиома замкнутости класса V

$$\forall x, y(x \in V \ \& \ y \subseteq V \ \& \ \mid y \mid \leq \mid x \mid \rightarrow y \in V).$$

A_6. Аксиома (схема) экстраполяции

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in V(\varphi^V(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow (x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\varphi \in L, n \geq 0$ и $x_1, \ldots, x_n$ — полный перечень свободных переменных в φ.

3. Об аксиомах STE_0

Прежде всего следует отметить, что все теоретико-множественные принципы, выраженные аксиомами STE_0, не являются неизвестными. В частности, аксиома A_6 является легкой формальной модификацией схемы $S2$ [2], а аксиома A_5 выражает, по-сути, канторовский взгляд на класс всех множеств [3].

В дальнейшем буквами $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ (возможно, с индексами) будут обозначаться переменные для ординалов, так что выражения вида $\forall\alpha\varphi$ и $\exists\alpha\varphi$ будут обозначать соответственно формулы вида $\forall x(\mathrm{ord}(x) \rightarrow \varphi)$ и $\exists x(\mathrm{ord}(x) \ \& \ \varphi)$, где $\mathrm{ord}(x)$ есть $\in$-формула, утверждающая, что x — ординал. Через $P(x)$ будет обозначаться класс $\{z \mid z \subseteq x\}$. Комулятивная иерархия определяется обычным образом: $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} P(V_\beta)$.

Определим теорию TS_π. Язык L^π этой теории — язык первой ступени сигнатуры $<\in, \pi>$, где π — одноместный предикатный символ (переменные в языках L^V

и L^{π} одни и те же). Аксиомами теории TS_{π} являются L^{π}-формулы $A_1^{\pi} - A_6^{\pi}$ такие, что для $i = 1,\dots,6$ формула A_i^{π} получается из A_i заменой в последней всякой подформулы вида $x \in V$ на подформулу вида $\pi(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если ZF непротиворечива, то TS_{π} непротиворечива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Средствами, формализуемыми в ZF, строится модель и доказывается, что эта модель является моделью для TS_{π}. Используемые ниже символы $\models$ и $\prec$ имеют общепринятый теоретико-модельный смысл.

Пусть $D = < V_{\omega}, \in^{D} >$ — модель, где V_{ω} (элемент стандартной кумулятивной иерархии) есть множество всех наследственно конечных множеств, а $\in^{D}$ — стандартное отношение принадлежности на V_{ω}. Пусть модель $\tilde{D} = \; = < V_{\tilde{\omega}}, \in^{\tilde{D}} >$ такова, что $V_{\omega} \subset V_{\tilde{\omega}}, \in^{D} = \in^{\tilde{D}} \cap (V_{\omega} \times V_{\omega})$ и $D \prec \tilde{D}$ т.е. для любой $\in$-формулы $\varphi(x_1,\dots,x_n), n \geq O$ (n — число свободных переменных в φ), и любых $a_1,\dots,a_n \in V_{\omega}$ имеет место

$$D \models \varphi(a_1,\dots,a_n) \leftrightarrow \tilde{D} \models \varphi(a_1,\dots,a_n),$$

при этом подразумевается, что входящий в φ символ $\in$ в контексте "$D \models \varphi$" именует отношение $\in$, а в контексте "$\tilde{D} \models \varphi$" — отношение $\in^{\tilde{D}}$. Существование модели $\tilde{D}$ следует из теоремы [4, гл. 5].

Несколько слов о модели $\tilde{D}$. Пусть $\in$-формула φ есть $\forall\alpha(\alpha \neq O \to \exists\beta(\alpha = \beta + 1))$. Ясно, что $D \models \varphi$. Поскольку $D \prec \tilde{D}$, имеет место $\tilde{D} \models \varphi$. Это означает, что в модели $\tilde{D}$, как и в D, нет предельных ординалов и поэтому ординалы модели $\tilde{D}$ (упорядоченные отношением $\in^{\tilde{D}}$) образуют, подобно ординалам модели D, натуральный ряд, который обозначим через $\tilde{\omega}$. Пусть далее $\in$-формула φ есть $\forall x \exists\alpha(x \in V_{\alpha})$. Ясно, что $D \models \varphi$. Следовательно, ввиду $D \prec \tilde{D}$, имеет место $\tilde{D} \models \varphi$. Это означает, что носитель модели $\tilde{D}$, подобно носителю модели D, является элементом $V_{\tilde{\omega}}$ некоторой комулятивной иерархии. Поскольку по построению $V_{\omega} \subset V_{\tilde{\omega}}$, то (доказывается в ZF) выполняется $\omega \subset \tilde{\omega}$. Таким образом $\tilde{\omega}$ является нестандартным натуральным рядом, а носитель модели $\tilde{D}$ является элементом нестандартной кумулятивной иерархии.

Продолжим доказательство. Пусть модель $\tilde{D}_\pi = =< V_{\tilde{\omega}}, \in^{\tilde{D}}, \pi^{\tilde{D}} >$, где $\pi^{\tilde{D}}$ — одноместное отношение на $V_{\tilde{\omega}}$, причем для отношения $\pi^{\tilde{D}}$ выполняется следующее: для любого $a \in V_{\tilde{\omega}}$ имеет место $\pi^{\tilde{D}}(a) \Leftrightarrow a \in^{\tilde{D}} V_\omega$.

Наконец, покажем, что все аксиомы TS_π истинны в модели $\tilde{D}_\pi$ при условии, что символ $\in$ (сигнатуры языка L^π) именует отношение $\in^{\tilde{D}}$, а символ π — отношение $\pi^{\tilde{D}}$.

Известно, что D является моделью для ZF без аксиомы бесконечности. Аксиомы A_1^π, A_2^π и A_3^π теории TS_π выражают тот факт, что в D истинны соответствующие аксиомы ZF.

Имеет место $\tilde{D}_\pi \models \forall x, y(\pi(x) \;\&\; y \in x \to \pi(y))$, поскольку в ZF доказуемо

$$\forall x, y(x \in V_\omega \;\&\; y \in x \to V_\omega).$$

Имеет место $\tilde{D}_\pi \models \forall x, y(\pi(x) \;\&\; \forall z(z \in y \to \pi(z)) \;\&\; |y| \leq \leq |x| \to \pi(y))$, поскольку в ZF доказуемо

$$\forall x, y(x \in V_\omega \;\&\; y \subseteq V_\omega \;\&\; \mid y \mid \leq \mid x \mid \to y \in V_\omega).$$

Аксиома A_6^π выражает факт

$$D \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \tilde{D}_\pi \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

(здесь $\varphi \in L, a_1, \ldots, a_n \in V_\omega$), который следует из $D \prec \tilde{D}$ и определения $\tilde{D}_\pi$.

Построенная при доказательстве утверждения модель $\tilde{D}_\pi$ является естественной (минимальной) моделью для теории TS_π. Поэтому далее будет говориться, что в теории TS_π речь идет о (наследственно) конечных множествах.

Возникает вопрос: что можно сказать о непротиворечивости STE_0, имея ввиду непротиворечивость (относительно ZF) теории TS_π? С формальной точки зрения теория STE_0 отличается от TS_π только одним — заменой в сигнатуре языка теории L^{π} одноместного предикатного символа π на константу V такую, что $V = \{x \mid \pi(x)\}$ (разумеется, после такой замены формула $A_i^{\pi}, i = 1,\ldots,6$, принимает вид A_i). С гносеологической точки зрения теория STE_0 отличается от TS_{π} тоже только одним — если в TS_{π} речь идет о бесконечном множестве, представленном в потенциальной форме, то в STE_0 бесконечное множество фигурирует в более сильной, актуальной форме. Действительно, имеет место $\exists\alpha \in \tilde{\omega}(V_{\omega} \subset V_{\alpha})$, но $\tilde{D}_{\pi} \models \neg\exists x(x = \{z \mid \pi(z)\})$. В то же время, V_{ω} является элементом носителя всякой модели STE_0, поскольку в STE_0 доказуемо $\exists x(x = V_{\omega})$. Таким образом, при переходе от TS_{π} к STE_0 осуществляется актуализация бесконечного множества (бесконечных множеств) и, ввиду аксиомы A_6, экстраполяция свойств конечных множеств на (актуально) бесконечные.

Весьма правдоподобно, что противоречие в STE_0 может возникнуть (при переходе от TS_{π}) только в том случае, когда экстраполированные теорией STE_0 свойства конечных множеств окажутся несовместимыми на области, включающей в себя актуальные бесконечные множества. Все экстраполируемые теорией STE_0 свойства конечных множеств выражены в аксиомах $A_1 - A_5$ этой теории.

Обозначим через ZF_{In} теорию $ZF+$ (существует недостижимый кардинал). Ясно, что в ZF_{In} доказуемо существование множества V_{τ}, где τ — недостижимый кардинал. Ясно, также, что V_{τ} содержит актуальные бесконечные множества (при естественной интерпретации). Существование V_{τ} свидетельствует (если ZF_{In} непротиворечива) о том, что экстраполируемые теорией STE_0 свойства конечных множеств совместны на области, включающей в себя актуальные бесконечные множества (аксиомы $A_1 - A_5$ истинны в модели $< V_{\tau} \bigcup\{V_{\tau}\}, \in, V_{\tau} >$).

Таким образом, если ZF_{In} непротиворечива, то представляется весьма вероятной непротиворечивость теории STE_0.

Кроме того, полезно отметить следующее. Пусть теория STE_o^* есть STE_o, в которой аксиома A_5 заменена аксиомой:

A_5^*.

$$\forall x, y(x \in V \,\&\, y \subseteq x \to y \in V).$$

Поскольку все аксиомы STE_o^* доказуемы в теории Рейнгардта S^* [3], а S^* равнонепротиворечива с ZF [3, замечание 4.3], то если ZF непротиворечива, то STE_o^* непротиворечива.

4. Некоторые следствия аксиом STE_o

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Выполняется схема*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in V(\varphi^V(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)),$$

где $\varphi \in L, n \geq 0$ *и* $x_1, \ldots, x_n$ *— полный перечень свободных переменных в* φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из аксиомы A_6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Выполняется принцип выделения в языке* L^V $\forall t_1, \ldots, t_n \forall x \exists y(y = \{z \in x | \varphi(z, t_1, \ldots, t_n)\})$, *где* $\varphi \in \in L^V, n \geq 0$ *и* y *не входит в* φ *свободно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi \in L$, то соответствующая формула выделения (посредством φ) следует из аксиом A_3 и A_6. Пусть $\varphi(z, t_1, \ldots, t_n) \in L^V, \varphi \notin L$, и переменная y не входит в φ свободно. Пусть t_o — отличная от x и y переменная, не входящая в φ. Пусть, наконец, $\varphi_o(z, t_1, \ldots, t_n, t_o)$ есть формула, полученная из φ заменой каждого вхождения символа V на вхождение переменной t_o. Ясно, что $\varphi_o \in L$. Следовательно, ввиду аксиом A_3 и A_6, будет иметь место

$$\forall t_o \forall t_1, \ldots, t_n \forall x \exists y(y = \{z \in x \mid \varphi_o(z, t_1, \ldots, t_n, t_o)\}).$$

Отсюда следует формула выделения посредством φ, поскольку $\varphi_o(z, t_1, \ldots, t_n, V)$ есть формула $\varphi(z, t_1, \ldots, t_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если* φ *— аксиома* ZF *(без аксиомы выбора), то имеет место релятивизация* $[\varphi]^V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Аксиома экстенсиональности в классе V есть аксиома A_1.

2. Аксиома фундирования в класса V есть аксиома A_2.

3. Аксиома пустого класса в классе V есть $[\exists y \forall x (x \notin y)]^V$. Из предложений 1,2 и аксиомы A_1 следует $\exists ! y(y = \{z \in V | z \neq z\})$. Обозначим такое y через $\emptyset^*$. Ясно, что $\forall z(z \notin \emptyset^*)$. Следовательно, имеет место $\exists y \forall z (z \notin y)$. Отсюда ввиду предложения 1, выводится доказуемая формула.

4. Аксиома неупорядоченной пары в классе V

$$[\forall t_1, t_2 \exists y(y = \{z | z = t_1 \vee z = t_2\})]^V.$$

Из предложений 1,2 и аксиомы A_1 следует $\forall t_1, t_2 \exists ! y(y = \{z \in V | z = t_1 \vee z = t_2\})$. Пусть $t_1^o, t_2^o \in V$. Тогда

$$\exists ! y(y = \{z \in V \mid z = t_1^o \vee z = t_2^o\}).$$

Обозначим такое y через $\{t_1^o, t_2^o\}^*$. Ясно, что

$$\forall z(z \in \{t_1^o, t_2^o\}^* \leftrightarrow z \in V \;\&\; (z = t_1^o \vee z = t_2^o)).$$

Последнее влечет $\forall z(z \in \{t_1^o, t_2^o\} \leftrightarrow z = t_1^o \vee z = t_2^o)$. Отсюда следует $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z = t_1^o \vee z = t_2^o)$, а затем, ввиду предложения 1 и $t_1^o, t_2^0 \in V$, релятивизация

$$\exists y \in V \; \forall z \in V(z \in y \leftrightarrow z = t_1^o \vee z = t_2^o).$$

Последнее влечет доказуемую формулу.

5. Аксиома суммы в классе V

$$[\forall t \exists y(y = \{z \mid \exists x(x \in t \;\&\; z \in x)\})]^V.$$

Из предложений 1,2 и аксиомы A_1 следует

$$\forall t \; \exists ! y(y = \{z \in V \mid \exists x(x \in t \;\&\; z \in x)\}).$$

Исходя из этого факта и выбора $t^o \in V$, обозначим через $S^*(t^o)$ класс такой, что

$$\forall z(z \in S^*(t^o) \leftrightarrow z \in V \;\&\; \exists x(x \in t^o \;\&\; z \in x)).$$

Последнее влечет

$$\forall z(z \in S^*(t^o) \leftrightarrow \exists x(x \in t^o \; \& \; z \in x)),$$

поскольку, ввиду $t^o \in V$ и аксиомы A_4, имеет место

$$\forall z(\exists x(x \in t^o \; \& \; z \in x) \rightarrow z \in V).$$

Следовательно, $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists x(x \in t^o \; \& \; z \in x))$. Последнее влечет, ввиду предложения 1 и $t^o \in V$, релятивизацию

$$\exists y \in V \forall z \in V(z \in y \leftrightarrow \exists x \in V(x \in t^o \; \& \; z \in x)),$$

а затем — доказуемую формулу.

6. Аксиома степени в классе V

$$[\forall t \; \exists y(y = \{z \mid z \subseteq t\})]^V.$$

Из предложений 1,2 и аксиомы A_1 следует $\forall t \; \exists! y(y = \{z \in V | z \subseteq t\})$. Исходя из этого факта и выбора $t^o \in V$, обозначим через $P^*(t^o)$ класс такой, что $\forall z(z \in P^*(t^o) \leftrightarrow z \in V \; \& \; z \subseteq t^o)$. Отсюда следует $\forall z(z \in P^*(t^o) \leftrightarrow z \subseteq t^o)$, поскольку имеет место $\forall z(z \subseteq t^o \rightarrow z \in V)$. Докажем последнее.

Пусть класс z^o таков, что $z^o \subseteq t^o$. Поскольку $t^o \in V$, то, виду аксиомы A_4, выполняется $z^o \subseteq V$. Ввиду уже доказанного п.4, предложений 1,2 и аксиомы A_1, имеет место

$$\exists! f(f = \{z \in V \mid \exists x \in z^o(z =< x, x >)\}),$$

где выражение $< x, x >$ обозначает неупорядоченную пару $\{\{x\}, \{x, x\}\}$. Ясно, что такое f является разнозначным отображением $z^o \rightarrow t^o$. Следовательно, $| z^o | \leq |t^o|$. Отсюда, ввиду $t^o \in V, z^o \subseteq V$ и аксиомы A_5, следует $z^o \in V$.

Продолжая основное доказательство, получаем $\exists y \; \forall z \; (z \in y \leftrightarrow z \subseteq t^o)$, что влечет, ввиду $t^o \in V$ и предложения 1, релятивизацию $\exists y \in V \;\; \forall z \in V(z \in y \leftrightarrow \forall x \in V(x \in z \rightarrow x \in t^o))$, а затем — доказуемую формулу.

7. Аксиома (схема) подстановки в классе V

$$[\forall t_1,\ldots,t_n(\forall x\ \exists! y\varphi(t_1,\ldots,t_n,x,y) \to$$

$$\to \forall t\ \exists y(y=\{z \mid \exists x\in t\ \varphi(t_1,\ldots,t_n,x,z)\}))]^V,$$

где $\varphi \in L$, $n \geq O$ и φ содержит точно $n+2$ свободных переменных.

Пусть $\in$-формула $\varphi(t_1,x,y)$ и $t_1^o \in V$ таковы, что выполняется $[\forall x\ \exists! y\varphi(t_1^o,x,y)]^V$ (наличие в φ только одного параметра не ограничивает общность доказательства). Из предложений 1,2 и аксиомы A_1 следует

$$\forall t_1\ \forall t\ \exists! y(y=\{z\in V \mid \exists x\in t\ \ \varphi(t_1,x,z)\}).$$

Исходя из этого факта и выбора $t^o \in V$, обозначим через a^* класс такой, что

$$\forall z(z\in a^* \leftrightarrow z\in V\ \&\ \exists x\in t^o\ \ \varphi(t_1^o,x,z)).$$

Отсюда следует $\forall z(z\in a^* \leftrightarrow \exists x\in t^o\ \ \varphi(t_1^o,x,z))$, поскольку аксиома A_4 и имеет место $\forall z\ \forall x\in V(\varphi(t_1^o,x,z)\to z\in V)$. Докажем последнее.

Пусть $x^o \in V$ и класс z^o таковы, что $\varphi(t_1^o,x^o,z^o)$. Пусть $z^V \in V$ таково, что $\varphi^V(t_1^o,x^o,z^V)$ (существование z^V обеспечивается принятым условием на формулу φ). Поскольку $t_1^o,x^o,z^V \in V$, то, ввиду аксиомы A_6, выполняется $\varphi(t_1^o,x^o,z^V)$. Из принятого условия на φ и аксиомы A_6 следует $\forall x\ \exists! y\varphi(t_1^o,x,y)$, что влечет $\exists! y\varphi(t_1^o,x^o,y)$. Ясно, что такое y есть и z^o, и z^V.

Продолжая основное доказательство, получаем $\exists y\ \forall z\ (z\in y \leftrightarrow \exists x\in t^o\varphi(t_1^o,x,z))$, что влечет, ввиду $t_1^o,t^o\in V$ и предложения 1, релятивизацию

$$\exists y\in V\forall z\in V(z\in y \leftrightarrow \exists x\in V(x\in t^o\ \&\ \varphi^V(t_1^o,x,z))),$$

а затем — $[\forall t\ \exists y(y=\{z \mid \exists x\in t\varphi(t_1^o,x,z)\})]^V$.

8. Аксиома бесконечности в классе V

$$[\exists y(\emptyset\in y\ \&\ \forall x(x\in y\to x\cup\{x\}\in y))]^V.$$

На основании рассмотренных п.п.1-7 и аксиомы A_6 ниже будут использоваться (без особых ссылок) результаты о классах, получаемые в рамках аксиом ZF без аксиомы бесконечности. Обозначим через $Of(z)$ следующую $\in$-формулу

$$\mathrm{ord}(z)\ \&\ \forall x(x \neq \emptyset\ \&\ (x \in z \vee x = z) \rightarrow \exists t(x = t \cup \{t\})),$$

выражающую свойство классов "быть конечным ординалом". Из предложения 2 следует $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in V\ \&$ $\&\ Of(z))$, что влечет $\exists y\ \forall z(z \in y \leftrightarrow Of(z))$, поскольку имеет место $\forall z(Of(z) \rightarrow z \in V)$. Последнее же следует из факта $\forall z(Of(z) \rightarrow \exists z^V \in V(Of^V(z^V)\ \&\ z = z^V))$, который доказывается индукцией по конечным ординалам — классам.

Пусть класс $z = \emptyset$. Ввиду п.3 и аксиомы A_1 имеет место $\exists! y \in V \forall x \in V(x \notin y)$. Пусть $\emptyset^V$ — множество такое, что $\forall x \in V(x \notin \emptyset^V)$. Отсюда, ввиду $\emptyset^V \in V$ и аксиомы A_6, следует $\forall x(z \notin \emptyset^V)$, что влечет, ввиду аксиомы A_1, предложения 1 и $z = \emptyset$, равенство $z = \emptyset^V$. Очевидно, что $Of^V(\emptyset^V)$. Теперь пусть классы z и z^V таковы, что $Of(z), z^V \in V, Of^V(z^V)$ и $z = z^V$. Ясно, что $Of(z \cup \{z\})$ и $Of^V(z^V \cup^V \{z^V\}^V)$, где через $\cup^V$ и $\{\ \}^V$ обозначены, соответственно, операции $\cup$ и $\{\ \}$ в классе V, т.е. операции $\cup^V$ и $\{\ \}^V$ удовлетворяют условию

$$\forall x, y \in V\ \forall t \in V((t \in \{x\}^V \leftrightarrow t = x)\ \&\ (t \in x \cup^V y \leftrightarrow t \in x \vee t \in y)).$$

Ясно также, ввиду $z^V \in V$, что $z^V \cup^V \{z^V\}^V \in V$. Поскольку $\forall x, y \in V(\{x\}^V = \{x\}\ \&\ x \cup^V y = x \cup y)$, то, ввиду $z^V \in V$ (следовательно, $\{z^V\}^V \in V$), имеет место $z^V \cup^V \{z^V\}^V =$ $= z^V \cup \{z^V\}$, откуда, ввиду $z = z^V$, следует равенство $z^V \cup^V \{z^V\}^V = z \cup \{z\}$.

Таким образом, $\exists y\ \forall z(z \in y \leftrightarrow Of(z))$, что влечет $\exists y\ \forall z(Of(z) \rightarrow z \in y)$. Отсюда, ввиду предложения 1, следует релятивизация, эквивалентная доказуемой формуле.

В дальнейшем, как правило, без особых ссылок на предложения 1 и 3 известны доказуемые в ZF факты будут использоваться как в классе V (т.е. в релятивизованном виде), так и вне этого класса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Выполняется общий принцип подстановки в языке* L^V

$$\forall t_1,\ldots,t_n(\forall x\ \exists! y\ \varphi(t_1,\ldots,t_n,x,y)\rightarrow$$

$$\rightarrow \forall t\ \exists y(y=\{z|\exists x\in t\ \varphi(t_1,\ldots,t_n,x,z)\})),$$

где $\varphi\in L^V$, $n\geq O$ *и* φ *содержит точно* $n+2$ *свободных переменных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\varphi\in L$, то доказуемая формула следует из предложения 3 и аксиомы A_6. Пусть $\varphi(t_1,x,y)\in L^V$ и $\varphi\notin L$ (наличие в φ только одного параметра не ограничивает общность доказательства). Пусть t_o — переменная, не входящая в φ и отличающаяся от t и z. Пусть, наконец, $\varphi_o(t_o,t_1,x,y)$ есть формула, полученная из φ путем замены каждого вхождения символа V на вхождение переменной t_o. Ясно, что $\varphi_o\in L$. следовательно, ввиду предложения 3 и аксиомы A_6, будет иметь место

$$\forall t_o\ \forall t_1(\forall x\ \exists! y\ \varphi_o(t_o,t_1,x,y)\rightarrow\forall t\ \exists y(y=$$

$$=\{z|\exists x\in t\ \varphi_o(t_o,t_1,x,z)\})).$$

Отсюда следует доказуемая формула, поскольку $\varphi_o(V,t_1,x,y)$ есть формула $\varphi(t_1,x,y)$.

В дальнейшем через Ω будет обозначаться класс $\{x\in V|\mathrm{ord}^V(x)\}$, а выражение $x\in ON$ будет обозначать $\in$-формулу $\mathrm{ord}(x)$. Через ω_α, $\alpha\in ON$, будут обозначаться бесконечные кардиналы и при этом будет предполагаться, что ω_o — счетный кардинал $(\omega_o=\omega)$ и ω_α, $\alpha>0$, есть минимальный из кардиналов, превышающих все ω_β, $\beta<\alpha$. О классе ординалов a будет говориться, что он неограничен в α, если $a\subsetneq\alpha$ и имеет место $\forall\beta<\alpha\ \exists\gamma\in a$ $(\gamma>\beta)$. Через $\mathrm{cf}(\alpha)$ будет обозначаться конфинальность ординала α, т.е. наименьший ординал β такой, что найдется функция $f:\ \beta\rightarrow\alpha$, область значений которой неограничена в α. Ординал α будет называться слабо недостижимым (записываться $\mathrm{In}(\alpha)$), если: а) α регулярен, т.е. $\mathrm{cf}(\alpha)=\alpha$, б) α кардинально пределен, т.е. $\forall\beta(\omega_\beta<\alpha\rightarrow\omega_{\beta+1}<\alpha)$ и в) $\omega_o<\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть* $\varphi(t_1,\ldots,t_n,\alpha) \in L$, $n \geq 0$ *и* $t_1,\ldots,t_n,\alpha$ *— полный перечень свободных переменных в* φ. *Тогда для любых* $t_1,\ldots,t_n \in V$, *если* $\varphi(t_1,\ldots,t_n,\Omega)$, *то класс* $\{\alpha \in \Omega | \varphi^V(t_1,\ldots,t_n,\alpha)\}$ *неограничен в* Ω.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(t,\alpha) \in L$ и $t \in V$ таковы, что $\varphi(t,\Omega)$ (единственность параметра t не ограничивает общность доказательства). И пусть $C = \{\alpha \in \Omega | \varphi^V(t,\alpha)\}$ (существование класса C обеспечивается предложением 2). Предположим, что C ограничен в Ω, и пусть $\gamma^o \in \Omega$ таков, что $\forall\beta \in C\ (\beta \leq \gamma^o)$. Тогда будет иметь место $\forall\beta \in \Omega\ (\varphi^V(t,\beta) \to \beta \leq \gamma^o)$, т.е.

$$\forall x \in V(\mathrm{ord}^V(x) \to (\varphi^V(t,x) \to (x \in \gamma^o \vee x = \gamma^o))).$$

Последнее, ввиду $t, \gamma^o \in V$ и аксиомы A_6, влечет

$$\forall x(\mathrm{ord}(x) \to (\varphi(t,x) \to (x \in \gamma^o \vee x = \gamma^o))),$$

т.е. $\forall\beta(\varphi(t,\beta) \to \beta \leq \gamma^o)$. Отсюда следует противоречие $\Omega \leq \gamma^o$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Ординал* Ω *является слабо недостижимым кардиналом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\Omega = \omega_\Omega$. Из доказуемого (в релятивизированной ZF) факта $[\forall\alpha\, \exists\beta(\beta = \alpha + 1]^V$ следует $\forall\alpha(\alpha \in \Omega \to \alpha + 1 \in \Omega)$, т.е. предельность ординала Ω. Значит, по определению, $\omega_\Omega = \mathrm{Sup}\{\omega_\alpha | \alpha \in \Omega\}$. Из доказуемых (в релятивизованной ZF) фактов $[\forall\alpha\, \exists\beta(\beta = \omega_\alpha)]^V, [\forall\alpha(\omega_{\alpha+1} > \alpha)]^V$ и вышеупомянутого, следует неограниченность класса $\{\omega_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ в Ω. Значит, $\mathrm{Sup}\{\omega_\alpha | \alpha \in \Omega\} = \Omega$.

б) Регулярность Ω. Предположим, что $\mathrm{cf}(\Omega) = \alpha$ и $\alpha < \Omega$ (факт $\forall\gamma(\mathrm{cf}(\gamma) \leq \gamma)$ доказывается в ZF). Пусть отображение $f:\ \alpha \to \Omega$ таково, что класс $C = \{f(\beta) | \beta \in \alpha\}$ неограничен в Ω (f существует по предположению). Ясно, что $C \subseteq \Omega$ и $\mathrm{Sup}C = \Omega$. Поскольку $\Omega \subseteq V$, то $\alpha \in V$ и $C \subseteq V$. Поскольку к тому же, $|C| \leq |\alpha|$ (что доказывается в ZF), то вввиду аксиомы A_5, имеет место $C \in V$. Следовательно, $\mathrm{Sup}C \in V$, т.е. противоречие $\Omega \in V$.

в) Кардинальная предельность Ω следует из $\Omega = \mathrm{Sup}\{\omega_\alpha | \alpha \in \Omega\}$.

г) $\omega_o < \Omega$. Очевидно.

Ниже в тексте, когда речь идет о слабо недостижимых ординалах (кардиналах), выражения вида "α" и "ω_o" будут использоваться как синонимы на основании доказуемого в ZF факта $\forall\alpha(\mathrm{In}(\alpha) \to \alpha = \omega_\alpha)$.

Для всяких β, $\gamma \in ON$, определим функцию Мало $\mathrm{Ml}^\gamma_\beta : \beta \to P(\gamma)$ следующим образом:

а) $\mathrm{Ml}^\gamma_\beta(O) = \{\omega_\delta < \gamma | \mathrm{In}(\omega_\delta)\}$;

б) $\mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha+1) = \{\omega_\delta \in \mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha) |$ класс $\mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha) \cap \omega_\delta$ неограничен в $\omega_\delta\}$;

в) $\mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha) = \bigcap\limits_{\delta<\alpha} \mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\delta)$, если α — предельный ординал.

ЛЕММА. *Для любых β, γ, α, $\beta \in ON$, если $\delta \in \mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha)$, то $\alpha < \beta$, $\delta < \gamma$ и $\delta \geq \alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства $\alpha < \beta$ и $\delta < \gamma$ непосредственно следуют из определения функции Мало. Пусть $\delta \in \mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha)$. Ясно, что $\delta \in \mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha_1)$ для всех $\alpha_1 \leq \alpha$. Следовательно, все классы $\mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha_1), \alpha_1 \leq \alpha$, не пусты. Обозначим через $f(\alpha_1), \alpha_1 \leq \alpha$, минимальный кардинал, входящий в $\mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha_1) >$. Ясно, что $\forall\alpha_1, \alpha_2 \leq \alpha(\alpha_1 < \alpha_2 \to f(\alpha_1) < < f(\alpha_2))$. Отсюда, ввиду очевидного $f(0) \geq 0$, следует $\forall\alpha_1 \leq \alpha(f(\alpha_1) \geq \alpha_1)$.

Будем обозначать через $\varphi_{\mathrm{Ml}}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $\in$-формулу такую, что для любых $\beta, \gamma, \alpha, \delta \in ON$ выполняется

$$\varphi_{\mathrm{Ml}}(\beta, \gamma, \alpha, \delta) \leftrightarrow \omega_\delta \in \mathrm{Ml}^\gamma_\beta(\alpha).$$

Ясно, что φ_{Ml} существует, поскольку все понятия, используемые при определении функции Мало, являются вспомогательными (т.е. элиминируемыми) $\in$-понятиями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Для любого $\alpha < \Omega$ класс $\mathrm{Ml}^\Omega_\Omega(\alpha)$ неограничен в Ω.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится индукцией по α.

а) $\alpha = 0$. Поскольку формула $\mathrm{In}(\delta)$ есть $\in$-формула и $\mathrm{In}(\Omega)$ (предложение 6), то, ввиду предложения 5, класс $\{\omega_\delta < \Omega | \mathrm{In}^V(\omega_\delta)\}$ неограничен в Ω. На основании предложения 1 имеет место $\mathrm{In}^V(\omega_\delta) \leftrightarrow \mathrm{In}(\omega_\delta)$, если $\omega_\delta < \Omega$. Следовательно,

$$\{\omega_\delta < \Omega | \mathrm{In}^V(\omega_\delta)\} = \mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(0).$$

Ясно, что $\Omega \in \mathrm{Ml}^{\Omega+1}_{\Omega}(0)$.

б) α — не предельный ординал и $\alpha = \alpha_o + 1$. Индуктивное предположение: класс $\mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_o)$ неограничен в Ω и $\Omega \in \mathrm{Ml}^{\Omega+1}_{\Omega}(\alpha_o)$. Поскольку класс $\mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_o)$ неограничен в Ω и $\mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_o) = \mathrm{Ml}^{\Omega+1}_{\Omega}(\alpha_o) \cap \Omega$, то ввиду определения функции Мало, имеет место $\Omega \in \mathrm{Ml}^{\Omega+1}_{\Omega}(\alpha_o + 1)$. Следовательно, $\varphi_{\mathrm{Ml}}(\Omega, \Omega + 1, \alpha_o + 1, \Omega)$. На основании предложения 5 класс $C = \{\delta \in \Omega | \varphi^V_{\mathrm{Ml}}(\delta, \delta + 1, \alpha_o + 1, \delta)$ неограничен в Ω. Покажем, что $C = \mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_o + 1)$. Поскольку $\delta, \delta + 1, \alpha_o + 1 \in V$, то, ввиду предложения 1, имеет место

$$\varphi^V_{\mathrm{Ml}}(\delta, \delta + 1, \alpha_o + 1, \delta) \leftrightarrow \varphi_{\mathrm{Ml}}(\delta, \delta + 1, \alpha_o + 1, \delta).$$

Следовательно,

$$C = \{\delta \in \Omega | \varphi_{\mathrm{Ml}}(\delta, \delta + 1, \alpha_o + 1, \delta)\},$$

т.е.

$$C = \{\omega_\delta < \Omega | \omega_\delta \in \mathrm{Ml}^{\delta+1}_{\delta}(\alpha_o + 1)\}.$$

Если $\omega_\delta \in C$, то $\omega_\delta \in \mathrm{Ml}^{\delta+1}_{\delta}(\alpha_o + 1)$ и, ввиду определения функции Мало, $\Omega > \delta$ и $\Omega > \delta + 1$, имет место $\omega_\delta \in \mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_o + 1)$. Пусть $\omega_\delta \in \mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_o + 1)$. Из определения функции Мало следует, что $\omega_\delta \in \mathrm{Ml}^{\gamma}_{\beta}(\alpha_o + 1)$ для любых $\beta > \alpha_o + 1$ и $\gamma > \omega_\delta$. Следовательно, $\omega_\delta \in \mathrm{Ml}^{\delta+1}_{\delta}(\alpha_o + 1)$, поскольку $\delta > \alpha_o + 1$ (ввиду $\delta = \omega_\delta \in \mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_o + 1)$, леммы и предельности ординала δ) и, очевидно, $\delta + 1 > \omega_\delta (= \delta)$.

в) α — предельный ординал, $\alpha < \Omega$. Индуктивное предположение: $\forall \alpha_1 < \alpha$ (класс $\mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_1)$ неограничен в Ω) и $\forall \alpha_1 < \alpha (\Omega \in \mathrm{Ml}^{\Omega+1}_{\Omega}(\alpha_1)$. По определению функции Мало из второй части индуктивного предположения следует $\Omega \in \mathrm{Ml}^{\Omega+1}_{\Omega}(\alpha)$. Ясно, что $\Omega \in \mathrm{Ml}^{\Omega+1}_{\Omega+1}(\alpha)$. Следовательно, $\varphi_{\mathrm{Ml}}(\Omega + 1, \Omega + 1, \alpha, \Omega)$ и, ввиду предложения 5, класс

$D = \{\delta \in \Omega | \varphi^V_{\mathrm{Ml}}(\delta+1, \delta+1, \alpha, \delta)\}$ неограничен в Ω. Доказательство равенства $D = \mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha)$ аналогично доказательству равенства $C = \mathrm{Ml}^{\Omega}_{\Omega}(\alpha_o + 1)$ из п. "б".

Заключение

1. Если принять теорию STE_o, в аксиомах которой выражена первичная экстраполяция свойств конечных объектов на бесконечные, в качестве первичной основы классической (канторовской) теории множеств, то окажется, что существование (иерархии) слабо недостижимых кардиналов обосновано не в меньшей степени, чем существование счетного кардинала ω.

2. Если при обосновании аксиом (гипотетической) экстраполяционной теории множеств STE, расширяющей в сравнении с STE_o совокупность теоретико-множественных представлений, руководствоваться только одной гносеологической идеей — идеей экстраполяции свойств конечных объектов на бесконечные, то это обстоятельство позволит не удивляться тому весьма вероятному факту, что математический аппарат, развитый на основе аксиом STE, будет полезен для описания эмпирического мира, поскольку эмпирический мир — это мир конечных объектов.

3. Один из частных случаев гносеологической идеи экстраполяции (уже не первичной) свойств конечных объектов на бесконечные позволил решить континуум-проблему вполне определенным образом — позволил "увидеть" истинность континуум-гипотезы в канторовском "мире" множеств [5]. Однако представленный в [5] для выражения этого частного случая экстраполяции формализм требует, конечно, просмотра с целью приведения его к традиционному виду. После выполнения такой работы соответствующая аксиома, решающая континуум-проблему, должна быть присоединена к аксиомам STE_o.

Литература

1. МИЛЛЬ Дж.Ст. Система логики силлогистической и индуктивной. — М., 1914. — 880 с.

2. REINHARDT W.N. Remarks on reflection principles, large cardinals, and elementary embeddings //Axiomatic Set Theory: Proc.Symp. Pure Math. — A.M.S. — 1974. — Vol.13, part 2. — P. 189-205.

3. REINHARDT W.N. Set existence principles of Shoenfield, Ackermann, and Powell //Fund. Math. — 1974. — Vol. 84, N 1. — P. 5-34.

4. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

5. НУДЕЛЬМАН А.С. Об одном индуктивном решении континуум-проблемы //Анализ последовательностей и таблиц данных. — Новосибирск, 1994. — Вып. 150: Вычислительные системы. — С. 197-210.

Поступила в редакцию
30 апреля 1996 года