МОДЕЛИ КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные системы)
1997 год Выпуск 158

УДК 517.11:518.5

ПРИНЦИП РЕФЛЕКСИИ И СХЕМА МАЛО

Н.В.Белякин, В.А.Ганов

Принцип рефлексии в разных его модификациях довольно часто используется в теории множеств. Например, в [1] доказываются различные варианты, так называемого, "принципа отражения", который, в простейшем случае, выглядит следующим образом. Для произвольной ZF-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и каждого множества M_0 существует множество M такое, что $M_0 \subseteq M$ и для любых $x_1, \ldots, x_n \in M$ имеет место:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow M \models \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

В силу локальной теоремы, можно даже, не опасаясь противоречия, ввести константу M, с которой предыдущее соотношение выполняется сразу для всех формул теории ZF. В настоящей статье рассматривается формальная система S в языке множеств и классов, в которой принимается (вернее допускается) более сильный вариант принципа рефлексии, относящийся также и к формулам, содержащим (в качестве свободных параметров) переменные для классов: $Y_1, Y_2, \ldots$

Обычно в аксиоматических системах, в которых, кроме множеств, фигурируют классы, последние играют вспомогательную роль сопутствующих объектов, доставляющих определенные технические удобства. Мы можем предполагать, что существует некий универсум множеств, а над ним имеется надстройка в виде совокупности классов, каковые естественно трактовать как допущенные к рассмотрению (в качестве объектов) свойства множеств. Эта классовая надстройка, в принципе, может варьироваться — при сохранении запаса множеств; например, в теории полумножеств [2] универсум множеств можно считать таким же, как в ZF, а классов больше, чем в GB. Напротив, в рассматриваемой здесь системе S запас классов, в некотором смысле, минимизирован. При этом мы исходим из следующих эвристических соображений. Предположим, что классы — не просто какие-то совокупности множеств, а каждый класс некоторым образом "описан", т.е. свойство принадлежности данному классу задается неким (абстрактно мыслимым и не подлежащим уточнению) "текстом". При этом подразумевается, что упомянутые тексты по своей структуре обладают сходством с формулами языка ZF, так что их, в частности, можно релятивизовать к константе M. В этой связи, удобнее было бы вместо выражений вида $x \in Y$ писать $Y(x)$, а в случае релятивизации — $Y^M(x)$. Если на такие тексты распространить принцип рефлексии, то таковой запишется в виде $\forall x \in M(Y(x) \longleftrightarrow Y^M(x))$. Отсюда следует, что совокупность объектов из M, определяемая текстом $Y^M(x)$, совпадает с $Y \cap M$. По этой причине в системе S релятивизация к M любой формулы, содержащей свободные классовые переменные (и не содержащей классовых кванторов и константы M), заключается не только в ограничении множественных кванторов константой M, но и в замене Y_i на $Y_i \cap M$. Впрочем, после того, как мы "нащупали" это формальное представление рефлексии, мы можем отвлечься от вышеприведенных "интенсиональных" соображений. В данной статье мы так и поступим.

С одной стороны, такой принцип рефлексии способен давать ощутимые преимущества. Например, в подходящем контексте, он позволяет не провозглашать в качестве аксиом ряд утверждений, обычно принимаемых за аксиомы. В какой-то мере, это относится и к настоящей статье, но мы не будем на этом задерживаться. С другой стороны, возникают специфические проблемы. Нетрудно установить, что этот вид рефлексии несовместим с GB, а точнее, — с требованием, чтобы каждое множество было классом. Поэтому мы сразу отказываемся от этого требования. Вместе с тем, мы принимаем в S очень сильную (так сказать, равномерную) версию схемы аксиом Мало, что позволит обосновать наш вариант рефлексии.

В системе S рассматриваются объекты двух сортов: множества и классы. Их элементами являются множества. Строчные буквы $x, y, \ldots$ суть переменные для множеств; заглавные буквы $X, Y, \ldots$ — переменные для классов; списки множественных и классовых переменных будем обозначать $\bar{x}, \bar{Y}, \ldots$ Символы $\in$ и $=$ означают принадлежность и равенство. Атомные формулы могут быть двух видов: а) множество принадлежит множеству или классу; б) множество или класс равняется множеству или классу. Остальные формулы строятся из атомных обычным образом с помощью пропозициональных связок и кванторов; последние можно навешивать на переменные обоих сортов. Заметим, что в сигнатуру S мы не включили константу M, нужную для формулировки принципа рефлексии. Мы не будем принимать этот принцип в качестве особой схемы аксиом, а просто для каждого списка S-формул без классовых кванторов докажем в S существование нужного множества M, после чего можно сослаться на локальную теорему. Таким образом, наш принцип рефлексии будет иметь место в консервативном расширении S.

Переходим к аксиомам S. Прежде всего принимаем все аксиомы ZF, сформулированные исключительно в языке ZF-формул (это касается схемы подстановки). Некоторые из этих аксиом впоследствии окажутся избыточными, но нас это не заботит. Зато мы можем беспрепятственно ввести общеизвестные понятия и обозначения, нужные для формулировки еще одной схемы аксиом. Будем обозначать ординалы буквами $\alpha, \beta, \ldots$; V_α есть множество всех множеств ранга $< \alpha$. Так как мы не приняли аксиому выбора, целесообразно слегка изменить определение регулярного кардинала. Кардинал δ назовем вполне регулярным, если для любой функции-множества $f : V_\delta \Rightarrow V_\delta$, у которой область определения принадлежит V_δ, справедливо $f \in V_\delta$. Запись $\mathrm{Reg}(\delta)$ означает, что δ — вполне регулярный кардинал.

Наша главная схема аксиом выглядит так: для любой φ следующая формула есть аксиома:

$$\forall \bar{Z}, \bar{x}(\forall\alpha\ \exists!\beta\varphi(\alpha,\beta,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z}) \rightarrow \forall\gamma\ \exists\delta > \gamma(\mathrm{Reg}(\delta)\ \&$$

$$\&\ \forall\bar{Y}\ \forall\alpha\beta(\alpha < \delta\ \&\ \varphi(\alpha,\beta,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z}) \rightarrow \beta < \delta))).$$

Её связь с так называемыми кардиналами Мало достаточно ясна. Наличие кванторного блока $\forall\bar{Y}$ сигнализирует, что запас классов должен быть невелик. На самом деле мы подразумеваем, что все классы можно заиндексировать элементами некоторого множества. Такое индексированное семейство классов формально представимо посредством двуместного предикаткого символа R, так что мы могли бы ввести этот символ в сигнатуру вместо классовых переменных. Такая модификация системы S выглядела бы даже более естественно, но мы предпочитаем иметь дело с классовыми переменными. Напоследок, еще распространим схему аксиом выделения на все S-формулы, чем и завершается построение S. Из схем выделения и Мало немедленно следует, что и схема подстановки выполняется для всех формул. В предположении существования кардинала Мало, непротиворечивость S устанавливается тривиально. Поэтому данная система может служить отправным пунктом дальнейших усилений, а также, возможно, — в обнаружении противоречивости некоторых систем подобного рода, опирающихся на рассматриваемый вариант принципа рефлексии. Это представляет интерес в связи с выяснением границ "интенсионального" подхода к теории множеств.

Назовем S-формулу чистой, если в ней нет классовых кванторов.

ЛЕММА 1. *Пусть дан произвольный список чистых формул вида:* $\exists y\varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z})$, $i = 1,\ldots,m$. *Тогда:*

$$\forall\gamma\exists\delta > \gamma(\mathrm{Reg}(\delta)\ \&\ \forall\bar{\mathrm{Y}}\ \forall\bar{\mathrm{x}} \in$$

$$\in V_\delta \mathop{\&}_{i=1}^{m} (\exists y\ \varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z}) \longleftrightarrow \exists y \in V_\delta \varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\bar{Y},\bar{Z}$ и для произвольного α рассмотрим множество:

$$a = \{< i,\bar{x} >:\ i \in \{1,\ldots,m\}\ \&\ \bar{x} \in V_\alpha\ \&\ \exists y \varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z})\}.$$

Каждому $< i,\bar{x} >\in a$ соответствует наименьший ординал σ, для которого справедливо $\exists y \in V_\sigma \varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z})$. Согласно схеме подстановки, существует супремум β всех таких σ. Тем самым мы показали:

$$\forall\alpha\exists\beta\forall\bar{x} \in V_\alpha \mathop{\&}_{i=1}^{m} (\exists y\ \varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z}) \longleftrightarrow \exists y \in V_\beta \varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z})).$$

Согласно схеме Мало, имеем:

$$\forall\gamma\exists\delta > \gamma(\mathrm{Reg}(\delta)\ \&\ \forall\bar{\mathrm{Y}}\ \forall\alpha < \delta\forall\bar{\mathrm{x}} \in$$

$$\in V_\alpha \mathop{\&}_{i=1}^{m} (\exists y\ \varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z}) \longleftrightarrow \exists y \in V_\delta \varphi_i(y,\bar{x},\bar{Y},\bar{Z})).$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что $V_\delta = \bigcup\limits_{\alpha<\delta} V_\alpha$.

ЛЕММА 2. *Для произвольного списка* $\varphi_i(\bar{x},\bar{Y},\bar{Z}),\ldots$ $\ldots,\varphi_m(\bar{x},\bar{Y},\bar{Z})$ *чистых формул справедливо:*

$$\forall\gamma\exists\delta > \gamma(\mathrm{Reg}(\delta)\ \&\ \forall\bar{\mathrm{Y}}\forall\bar{\mathrm{x}} \in$$

$$\in V_\delta \mathop{\&}_{i=1}^{m} (\varphi_i(\bar{x},\bar{Y},\bar{Z}) \longleftrightarrow \varphi_i^{V_\delta}(\bar{x},\bar{Y} \cap V_\delta,\bar{Z} \cap V_\delta)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО носит рутинный характер. Надо пополнить данный список формул всеми их подформулами и провести метаматематическую индукцию по глубине этих формул. Случай атомных формул тривиален; на индукционном шаге используется лемма 1.

Опираясь на лемму 2 (с пустым списком $\bar{Z}$), получаем, что для произвольного списка чистых формул $\varphi_i(\bar{x},\bar{Y})$,

$i = 1, \ldots, m$ существует множество M такое, что: $\forall \bar{Y}\ \forall \bar{x} \in \in M(\varphi_i(\bar{x}, \bar{Y}) \longleftrightarrow \varphi_i^M(\bar{x}, \bar{Y} \cap M))$. Тем самым доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Система S совместна с принципом рефлексии для всех чистых S-формул.*

В заключение отметим, что система S оставляет значительный простор для варьирования классовой надстройки, в пределах ее "дозволенной малости". Эффекты такого варьирования могут составить предмет дальнейших исследований.

Литература

1. ЙЕХ Т. Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир. — 1973. - 150 с.

2. VOPENKA P., HAJEK P. The theory of semisets. — Amsterdam–London, 1972. — 332 c.

Поступила в редакцию
24 декабря 1996 года