СПЛАЙН–ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1997 год Выпуск 159

УДК 519.65

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Ю.С. Волков

Введение

Практическое построение сплайна заключается в определении каких-либо параметров (коэффициентов) сплайна, участвующих в его представлении. Эти параметры задаются явно (локальные методы) или определяются из системы уравнений, вытекающей, например, из интерполяционных условий. Для полиномиальных сплайнов нечетной степени (кубических и выше) условия интерполяции приводят к системе линейных уравнений относительно искомых параметров. Конкретный вид системы и её свойства определяются набором параметров, используемых для представления сплайна или, говоря другими словами, базисом в конечномерном пространстве полиномиальных сплайнов.

Метод построения интерполяционного сплайна в базисе из усеченных степенных функций приводит к системе уравнений с сильно заполненной матрицей. К тому же эта матрица оказывается очень плохо обусловленной даже в случае равномерной сетки. Поэтому построение интерполяционного сплайна в базисе из усеченных степенных функций оказалось не приемлемым с практической точки зрения.

Гораздо более удачным оказалось представление сплайна через узловые значения какой-либо из его производных. Для кубического сплайна системы относительно наклонов сплайна (первых производных) в узлах и моментов (вторых производных) имеют матрицу трехдиагональной структуры с диагональным преобладанием. Указанные свойства систем уравнений позволяют использовать очень эффективный и надежный метод решения — метод прогонки. Однако для сплайнов произвольной степени получение таких систем относительно узловых значений какой-либо производной довольно непростая задача. В литературе известна только одна такая система — относительно моментов (относительно $(2n-2)$-й производной, если степень сплайна равна $(2n-1)$), полученная Албергом, Нильсоном и Уолшем [1]. Но уже для сплайнов пятой степени матрица этой системы не имеет диагонального преобладания в общем случае (произвольная сетка).

Открытие устойчивого метода вычисления B-сплайнов [2,3] произвольной степени, основанного на рекуррентном соотношении, привело к широкомасштабному использованию представления сплайнов в виде разложения их по базису из B-сплайнов. B-сплайновая коллокационная матрица оказалась вполне неотрицательной ленточной матрицей. Кроме того, установлено [4], что при решении системы уравнений с этой матрицей методом Гаусса, отпадает необходимость проводить выбор главного элемента для проведения исключения. В итоге большинство современных монографий и руководств по сплайнам даже не упоминают о других возможных методах нахождения интерполяционных сплайнов.

Однако метод вычисления интерполяционного сплайна через B-сплайны нельзя считать предпочтительным по сравнению с другими методами. Поясним это на примере кубических сплайнов. В методе B-сплайнов матрица системы уравнений, вообще говоря, не имеет диагонального преобладания, и в [2] показано, что обусловленность системы может быть как угодно большой при решении задачи интерполяции на существенно неравномерных сетках. В то же время величина числа обусловленности матрицы соответствующей системы уравнений при представлении кубического сплайна через наклоны или моменты на любой сетке равна 3. Данное обстоятельство зачастую и определяет выбор представления кубического сплайна.

Для сплайнов произвольной нечетной степени величина числа обусловленности B-сплайновой коллокационной матрицы также может быть сколь угодно большой в зависимости от неравномерности используемых сеток. Такие оценки были проведены автором в [5]. Но для сплайнов произвольной степени, в отличие от кубических, не известны способы представления, дающие методы построения интерполяционных сплайнов с хорошо обусловленной системой уравнений. В частности, система уравнений относительно моментов [1] на неравномерной сетке также может быть плохо обусловлена [6]. Отметим ещё алгоритм Анселона–Лорана, используемый при построении интерполяционных сплайнов в библиотеке программ LIDA. Однако и здесь ошибки округления не позволяют строить сплайны больших степеней ($n \sim 10$) даже при двойной точности вычислений ЭВМ (см. [7]). Упомянем, наконец, работу [12], где в качестве искомых параметров выбраны значения всех четных производных сплайна в узлах. В итоге подлежащая решению система уравнений оказывается блочно-трехдиагональной. Решать систему предлагается методом матричной прогонки. Однако никаких исследований относительно обусловленности системы, устойчивости метода реализации, точности построения сплайна, сравнения с другими распространенными методами (например, В-сплайновыми) в [12] не проводится.

В работе [6] автором указано на связь вопроса сходимости какой-либо производной сплайна к соответствующей производной функции при минимальных требованиях гладкости интерполируемой функции и проблемы оценки величины обусловленности системы уравнений относительно узловых значений этой же производной интерполяционного сплайна. Поскольку сходимость без ограничений на расположение узлов сетки может иметь место только лишь для двух средних — $(n-1)$-й и n-й производных сплайна степени $2n-1$, то и при построении сплайна предлагалось использовать узловые значения его $(n-1)$-й или n-й производной. Именно такие алгоритмы эффективны для кубических сплайнов (см., например, [2]). Однако в случае сплайнов произвольной степени пока не удалось даже получить эти системы.

В данной работе мы попытались простоту получения определяющей системы уравнений при решении задачи интерполяции сплайном, представленным в базисе из B–сплайнов, перенести на представления, использующие производные сплайна. Нам пришлось отказаться от использования в качестве параметров значений производных сплайна в узлах. Вместо этого мы предлагаем использовать коэффициенты разложения какой–либо производной интерполяционного сплайна по соответствующим B–сплайнам. Ясно, что эти коэффициенты на самом деле "близки" к узловым значениям соответствующей производной сплайна. В работе проводится анализ обусловленности полученных систем уравнений и устанавливается его связь с исследованием сходимости процесса интерполяции для соответствующей производной. Мы ограничиваемся рассмотрением периодического случая.

1. Определения и обозначения

Рассмотрим задачу интерполяции. По заданным в узлах сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ значениям $f_i = f(x_i)$ некоторой периодической функции $f(x)$ периода $b-a$ требуется построить $(b-a)$–периодический интерполяционный сплайн $S(x)$ степени $2n-1$ $(N \geq 2n)$. Такая задача всегда разрешима (см., например, [1]).

Под числом обусловленности матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{N}$ будем понимать величину $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}|| \cdot ||\mathbf{A}^{-1}||$, где

$||\mathbf{A}|| = \max\limits_{1\le i\le N} \sum\limits_{j=1}^{N} |a_{ij}|$ есть чебышевская норма матрицы $\mathbf{A}$. Такая норма матрицы согласована с нормой $||\mathbf{b}|| = \max\limits_{1\le i\le N} |b_i|$ вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^T$.

Если $g(x)$ некоторая функция, заданная на $[a,b]$, то, как обычно,

$$\omega(g;h) = \max_{\substack{\alpha,\beta\in[a,b]\\ |\alpha-\beta|\le h}} |g(\alpha)-g(\beta)|,$$

$$||g||_\infty = \operatorname{ess}\sup_{a\le x\le b} |g(x)|.$$

Обозначим через $\widetilde{\Delta}$ периодическое продолжение разбиения Δ за пределы отрезка $[a,b]$ на всю вещественную прямую с периодом $b-a$. Пусть $\bar{h} = \max\limits_i (x_{i+1}-x_i)$ длина наибольшего интервала сетки Δ (или $\widetilde{\Delta}$).

Сплайн степени $k-1$, носитель которого состоит из k последовательных узлов сетки $\widetilde{\Delta}$, называется B–сплайном степени $k-1$ (порядка k) на сетке $\widetilde{\Delta}$. Известно [3], что B–сплайны с одинаковым носителем могут отличаться только постоянным множителем. Обычно, в качестве базисных функций используют нормализованные B–сплайны $B_{ik}(x)$, нормировка которых выбрана так, что они представляют разложение единицы, т. е.

$$\sum_i B_{ik}(x) \equiv 1. \tag{1}$$

Мы будем нумеровать B–сплайны по среднему узлу интервала–носителя с поправкой на четность количества узлов, а именно, B–сплайн $(k-1)$–й степени на носителе (x_i, x_{i+k}) обозначим $B_{i+[k/2],k}(x)$ (здесь $[\cdot]$ — целая часть числа), а носитель сплайна $B_{ik}(x)$ есть

$$\operatorname{supp} B_{ik} = (x_{i-[k/2]}, x_{i+[(k+1)/2]}).$$

Таким образом, базис на отрезке $[a,b]$ состоит из функций $B_{-[(k-1)/2],k}(x)$, $B_{1-[(k-1)/2],k}(x)$, $\ldots$, $B_{N-1+[k/2],k}(x)$.

В пространстве периодических сплайнов обычно вводится базис из периодических B-сплайнов. Периодический B-сплайн получается из обычного B-сплайна $B_{ik}(x)$ путем периодического распространения с периодом $(b-a)$ ненулевой части на всю прямую

$$\widetilde{B}_{ik}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{i+mN,k}(x).$$

Функции $\widetilde{B}_{ik}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, образуют базис пространства периодических сплайнов на отрезке $[a, b]$.

Заметим, что B-сплайны с другой нормировкой

$$Q_{ik}(x) = \frac{k}{x_{i+[(k+1)/2]} - x_{i-[k/2]}} B_{ik}(x)$$

удовлетворяют свойству

$$\int\limits_{\operatorname{supp} Q_{ik}} Q_{ik}(\tau)d\tau = 1. \tag{2}$$

По аналогии с $\widetilde{B}_{ik}(x)$ определяются и $\widetilde{Q}_{ik}(x)$.

Для периодических B-сплайнов равенства (1) и (2) трансформируются в следующие

$$\sum_{i=1}^{N} \widetilde{B}_{ik}(x) \equiv 1, \tag{3}$$

$$\int\limits_{a}^{b} \widetilde{Q}_{ik}(\tau)d\tau = 1. \tag{4}$$

Поскольку B-сплайн $Q_{ik}(x)$ степени $k-1$ есть разделенная разность k-го порядка по значениям аргумента $t = x_{i-[k/2]}, x_{i-[k/2]+1}, \ldots, x_{i+[(k+1)/2]}$ функции $k \cdot (t-x)_+^{k-1}$, то для разделенной разности некоторой функции $g(x)$ будем использовать обозначение, согласующееся с нумерацией B-сплайнов,

$$g_i^{(k)} = k! \cdot g\left[x_{i-[k/2]}, x_{i-[k/2]+1}, \dots, x_{i+[(k+1)/2]}\right].$$

2. Вывод системы уравнений

Итак, пусть требуется построить интерполяционный сплайн $S(x)$ степени $2n-1$ на сетке Δ. Поскольку $S(x) \in C^{2n-2}[a,b]$, то при $1 \le k \le 2n-2$ справедлива [3] формула

$$S\left[x_{i-[k/2]}, x_{i-[k/2]+1}, \dots, x_{i+[(k+1)/2]}\right] =$$

$$= \frac{1}{k!} \int\limits_{x_{i-[k/2]}}^{x_{i+[(k+1)/2]}} Q_{ik}(\tau) S^{(k)}(\tau) d\tau$$

или в наших обозначениях

$$S_i^{(k)} = \int\limits_{\operatorname{supp} Q_{ik}} Q_{ik}(\tau) S^{(k)}(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Условия интерполяции позволяют переписать (5) в виде

$$f_i^{(k)} = \int\limits_{\operatorname{supp} Q_{ik}} Q_{ik}(\tau) S^{(k)}(\tau) d\tau. \tag{6}$$

Функция $S^{(k)}(x)$ является сплайном степени $2n-1-k$, и, поэтому можно считать, что на отрезке $[a,b]$ имеет место представление

$$S^{(k)}(x) = \sum_{j=-[(k-1)/2]}^{N-1+[k/2]} b_{jk} B_{j,2n-k}(x) = \sum_{j=1}^{N} b_{jk} \widetilde{B}_{j,2n-k}(x).$$

для некоторых коэффициентов b_{jk}. Подставив данное B-представление производной $S^{(k)}(x)$ в (6), получаем

$$f_i^{(k)} = \sum_{j=i-n+1}^{i+n-1} b_{jk} \int\limits_{\operatorname{supp}(Q_{ik} B_{j,2n-k})} Q_{ik}(\tau) B_{j,2n-k}(\tau) d\tau. \tag{7}$$

Для $i = 1, 2, \ldots, N$ равенство (7) запишем через периодические B–сплайны

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{k} b_{jk} = f_i^{(k)},$$

где

$$a_{ij}^{k} = \int_a^b \widetilde{Q}_{ik}(\tau)\widetilde{B}_{j,2n-k}(\tau)d\tau. \tag{8}$$

В итоге мы получили систему из N уравнений относительно неизвестных $b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{Nk}$ — коэффициентов разложения k-й производной искомого сплайна $S(x)$ по нормализованным B–сплайнам степени $2n-1-k$. Перепишем эту систему в матричном виде

$$\mathbf{A_k b_k} = \mathbf{f^{(k)}}, \tag{9}$$

где $\mathbf{f^{(k)}} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_N^{(k)})^T$, $\mathbf{b_k} = (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{Nk})^T$, а элементами $N \times N$ матрицы $\mathbf{A_k}$ являются числа a_{ij}^{k}.

Заметим, что при $k = 2n-2$ вектор $\mathbf{b_{2n-2}}$ есть вектор узловых значений сплайна первой степени $S^{(2n-2)}(x)$. Таким образом, система уравнений (9) в случае $k = 2n-2$ совпадает с системой относительно моментов, полученной в [1].

3. Свойства матриц $\mathbf{A_k}$

ЛЕММА 1. *Элементы a_{ij}^{k} матрицы $\mathbf{A_k}$ обладают свойствами*

$$a_{ij}^{k} \geq 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N; \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{k} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку B–сплайны являются неотрицательными функциями, то свойство (10) следует из формулы (8), определяющей элементы матрицы.

Свойство (11) доказывается следующей цепочкой равенств

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{k} = \sum_{j=1}^{N} \int_{a}^{b} \widetilde{Q}_{ik}(\tau)\widetilde{B}_{j,2n-k}(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{a}^{b} \widetilde{Q}_{ik}(\tau) \left(\sum_{j=1}^{N} \widetilde{B}_{j,2n-k}(\tau) \right) d\tau =$$

$$= \int_{a}^{b} \widetilde{Q}_{ik}(\tau)d\tau = 1.$$

Здесь мы использовали свойства B-сплайнов (3) и (4). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Для $f \in C^k[a,b]$ справедлива оценка*

$$\left\| S^{(k)} - f^{(k)} \right\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \left(n - \left[\frac{k}{2} \right] + (n-1+k) \left\| \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{-1} \right\| \right) \omega(f^{(k)}; \bar{h}). \qquad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сплайн $S_k(x)$ степени $2n-k-1$, у которого коэффициенты разложения по нормализованным B–сплайнам есть величины $f_i^{(k)}$:

$$S_k(x) = \sum_{j=1}^{N} f_j^{(k)} \widetilde{B}_{j,2n-k}(x).$$

Установим вначале отклонение $S^{(k)}(x)$ от сплайна $S_k(x)$. Тождество (3) позволяет написать оценку

$$\left| S^{(k)}(x) - S_k(x) \right| = \left| \sum_{j=1}^{N} \left(b_{jk} - f_j^{(k)} \right) \widetilde{B}_{j,2n-k}(x) \right| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq j \leq N} \left| b_{jk} - f_j^{(k)} \right| = \left\| \mathbf{b_k} - \mathbf{f^{(k)}} \right\|. \qquad (13)$$

Перепишем систему уравнений (9) в виде

$$\mathbf{A_k}\left(\mathbf{b_k}-\mathbf{f^{(k)}}\right)=\mathbf{f^{(k)}}-\mathbf{A_k}\mathbf{f^{(k)}}. \tag{14}$$

Поскольку $f_i^{(k)} = f^{(k)}(\xi)$ для некоторого $\xi \in (x_{i-[k/2]}, x_{i+[(k+1)/2]})$, то $\left|f_i^{(k)} - f_j^{(k)}\right| \le (|i-j|+k)\ \omega(f^{(k)};\bar{h})$. Поэтому для i-й компоненты вектора правой части системы (14) имеем

$$\left|f_i^{(k)} - \sum_{j=1}^{N} f_j^{(k)} a_{ij}^k\right| = \left|\sum_{j=1}^{N}\left(f_i^{(k)} - f_j^{(k)}\right) a_{ij}^k\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=i-n+1}^{i+n-1}\left(f_i^{(k)} - f_j^{(k)}\right) \int\limits_{\operatorname{supp}(Q_{ik}B_{j,2n-k})} Q_{ik}(\tau)B_{j,2n-k}(\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le (n-1+k)\ \omega(f^{(k)};\bar{h}).$$

И, следовательно, для решения системы (14) выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{b_k}-\mathbf{f^{(k)}}\right\| &\le \left\|\mathbf{A_k^{-1}}\right\|\cdot\left\|\mathbf{f^{(k)}}-\mathbf{A_k}\mathbf{f^{(k)}}\right\| \le \\ &\le (n-1+k)\left\|\mathbf{A_k^{-1}}\right\|\omega(f^{(k)};\bar{h}).\end{aligned}$$

Комбинируя это неравенство с (13), получаем

$$\left|S^{(k)}(x) - S_k(x)\right| \le (n-1+k)\left\|\mathbf{A_k^{-1}}\right\|\ \omega(f^{(k)};\bar{h}). \tag{15}$$

Теперь найдем отклонение сплайна $S_k(x)$ от $f^{(k)}(x)$. Пусть $x \in [x_i, x_{i+1}]$, тогда

$$\left|S_k(x) - f^{(k)}(x)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N}\left(f_j^{(k)} - f^{(k)}(x)\right)\widetilde{B}_{j,2n-k}(x)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=i-n+1+[k/2]}^{i+n-[(k+1)/2]}\left(f_j^{(k)} - f^{(k)}(x)\right) B_{j,2n-k}(x)\right| \le$$

$$\le (n-[k/2])\ \omega(f^{(k)};\bar{h}). \tag{16}$$

Итоговая оценка (12) складывается из оценок (15) и (16), т.е.

$$\left\|S^{(k)} - f^{(k)}\right\|_\infty = \max_{a\le x\le b}\left|S^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\right| \le$$

$$\le \max_{a\le x\le b}\left|S^{(k)}(x) - S_k(x)\right| + \max_{a\le x\le b}\left|S_k(x) - f^{(k)}(x)\right| \le$$

$$\le \left((n-1+k)\left\|\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{-1}\right\| + n - [k/2]\right)\omega(f^{(k)};\bar{h}).$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $k = 2n-2$ в работе [6] установлена оценка (12) с более точной константой.

Отметим, что из леммы 1 следует $\|\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\| = 1$, а значит $\mathrm{cond}(\mathbf{A}_{\mathbf{k}}) = \|\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{-1}\|$. Как известно, степень влияния ошибок округления при решении системы уравнений характеризуется величиной числа обусловленности матрицы системы. Таким образом, помимо того, что хорошая обусловленность $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ гарантирует хорошую точность вычисления сплайна $S(x)$ в результате решения системы уравнений (9), но и уменьшает величину константы в оценке (12). Однако хорошее приближение $f^{(k)}(x)$ сплайном $S^{(k)}(x)$ не влечет хорошей обусловленности матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$.

Рассмотрим последовательность сеток $\Delta_\nu : a = x_{0\nu} < < x_{1\nu} < \ldots < x_{N\nu} = b$, $\nu = 1, 2, \ldots$ такую, что

$$\bar{h}_\nu = \max_i (x_{i+1,\nu} - x_{i\nu}) \to 0 \quad \text{при } \nu \to \infty. \tag{17}$$

Пусть $(b-a)$-периодический сплайн $S_{\Delta_\nu}(x)$ степени $2n-1$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах сетки Δ_ν.

ТЕОРЕМА 1. *Если матрица $\mathbf{A}_{\mathbf{k}_\nu}^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n-2$, обратная к матрице $\mathbf{A}_{\mathbf{k}_\nu}$ коэффицентов системы уравнений* (9), *равномерно ограничена относительно ν, то*

$$S_{\Delta_\nu}^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) = o(1) \tag{18}$$

равномерно относительно x на $[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из леммы 2.

Автором показано [6], что если $k = 1, 2, \ldots, n-2$ или $k = n+1, n+2, \ldots, 2n-2$, то существуют функция $f(x) \in C^k[a,b]$ и последовательность сеток $\{\Delta_\nu\}$, обладающая свойством (17), такие, что

$$\left\| S_{\Delta_\nu}^{(k)} - f^{(k)} \right\|_\infty \to \infty \quad \text{при } \nu \to \infty, \tag{19}$$

т.е. соотношение (18) не выполняется. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если $k = 1, 2, \ldots, n-2$ или $k = n+1, n+2, \ldots, 2n-2$, то для любой как угодно большой константы K существует сетка Δ такая, что* $\operatorname{cond}(\mathbf{A_k}) = \|\mathbf{A_k^{-1}}\| > K$.

Обратим внимание на тот факт, что хотя $\|\mathbf{A_k^{-1}}\|$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$, и может быть как угодно большой, тем не менее при достаточно гладкой функции $f(x)$ (например, $f(x) \in C^n[a,b]$) соотношение (18) выполняется [1].

Теорема 2 оставляет нам лишь две системы уравнений ($k = n-1, n$), которые, возможно, хорошо обусловлены для произвольных сеток Δ. Однако, так это или нет установить пока не удалось.

Одна из двух матриц (а именно при $k = n$) хорошо известна, так как возникает и в других задачах (см., например, [8–11]). Существует предположение, что $\|\mathbf{A_n^{-1}}\|$ ограничена величиной не зависящей от сетки Δ. Это предположение справедливо для $n = 2, 3$ [8]. Для произвольного n установлены лишь оценки, зависящие либо от глобального сеточного отношения (наибольшего отношения шагов сетки) [9], либо от числа узлов сетки [10].

4. Примеры

Многочисленные вычислительные эксперименты, проведенные нами, показали, что наиболее плохими с точки зрения обусловленности систем уравнений (9) являются геометрические сетки, которые использовались для построения примера расходимости интерполяционного процесса [6], т. е.

$$\Delta : -1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1;$$

$$x_{i+1} = x_i + \rho(x_i - x_{i-1}), \qquad i = 0, 1, \ldots, [N/2] - 1;$$
$$x_{N-i} = x_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, [N/2].$$

Т а б л и ц а 1

Обусловленность матриц $\mathbf{A_k}$ для сплайнов пятой степени

k	N	ρ					
		1	1.5	1.8	1.9	2	3
1	10	7.5	13.72	19.88	22.46	25.34	76.58
	20	7.5	16.81	35.31	47.12	63.78	1374.
	50	7.5	17.86	67.77	148.7	381.4	$7.2 \cdot 10^6$
	100	7.5	17.88	94.36	467.5	4375.	$1.1 \cdot 10^{13}$
	200	7.5	17.88	109.3	2650.	$4.9 \cdot 10^5$	$2.8 \cdot 10^{25}$
2	10	7.5	10.48	11.86	12.26	12.64	15.35
	50	7.5	10.73	12.30	12.76	13.20	16.41
	200	7.5	10.73	12.30	12.76	13.20	16.41
3	10	7.5	8.02	8.25	8.31	8.37	8.80
	50	7.5	8.03	8.25	8.32	8.38	8.80
	200	7.5	8.03	8.25	8.32	8.38	8.80
4	10	7.5	12.84	19.15	21.98	25.25	92.92
	20	7.5	15.24	32.83	44.69	61.89	1681.
	50	7.5	16.05	61.62	138.2	364.7	$8.8 \cdot 10^6$
	100	7.5	16.06	85.19	431.7	4172.	$1.4 \cdot 10^{13}$
	200	7.5	16.06	98.40	2441.	$4.6 \cdot 10^5$	$3.4 \cdot 10^{25}$

В табл.1 приведены величины $\mathrm{cond}(\mathbf{A_k})$, $k = 1, 2, 3, 4$, для сплайнов пятой степени ($n = 3$) на геометрических сетках при различных N и ρ. Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами работы [6] о том, что расходимость процесса интерполяции для первой и четвертой производной сплайна пятой степени возможна на последовательности сеток с локальной характеристикой ρ (максимальным отношением соседних шагов) больше, чем $\rho^* \approx 1.8534$.

Т а б л и ц а 2

Обусловленность матриц $\mathbf{A}_{n-1}$

ρ	N	Степень сплайна						
		3	5	7	9	11	13	15
1	20	3.0	7.5	18.53	45.73	112.8	278.4	686.9
	50	3.0	7.5	18.53	45.73	112.8	278.4	686.9
	100	3.0	7.5	18.53	45.73	112.8	278.4	686.9
5	20	4.83	19.37	58.47	202.6	616.2	2252.	7587.
	50	4.83	19.52	60.32	213.9	658.4	2394.	7965.
	100	4.83	19.52	60.34	214.1	660.5	2406.	8013.
15	20	5.54	22.81	65.59	227.2	685.2	2534.	8531.
	50	5.54	23.08	68.14	240.5	729.7	2673.	8883.
	100	5.54	23.08	68.17	240.9	732.5	2687.	8933.

Т а б л и ц а 3

Обусловленность матриц $\mathbf{A}_n$

ρ	Степень сплайна						
	3	5	7	9	11	13	15
1	3.0	7.5	18.53	45.73	112.8	278.4	686.9
5	3.0	9.22	34.38	117.7	472.2	1702.	6921.
15	3.0	9.72	39.26	135.5	552.6	1973.	7995.

Табл.2 и 3 содержат значения $\mathrm{cond}(\mathbf{A}_{n-1})$ и $\mathrm{cond}(\mathbf{A}_n)$ соответственно для сплайнов нечетных степеней от третьей до пятнадцатой, вычисленные на геометрических (с показателем ρ) сетках для различных N и ρ. Значения обусловленности матриц $\mathbf{A}_n$ при разных ρ слабо реагируют на изменения N. Так как вычисленные значения обусловленности для $N = 20, 50, 100$ при каждом ρ совпадают

с точностью до всех приводимых в таблице знаков, то в табл.3 отсутствует столбец N, содержащий количество узлов сетки.

Литература

1. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. — М.: Мир, 1972. — 316 с.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.

3. Де БОР К. Практическое руководство по сплайнам. — М.: Радио и связь, 1985. — 304 с.

4. De BOOR C., PINKUS A. Backward error analysis for totally positive linear systems //Numer. Math. — 1977. — Vol. 27, № 4. — P. 485–490.

5. ВОЛКОВ Ю.С. Оценки числа обусловленности B-сплайновой коллокационной матрицы //Интерполяция и аппроксимация сплайнами. — Новосибирск, 1992. — Вып. 147: Вычислительные системы. — С. 3–10.

6. ВОЛКОВ Ю.С. Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени //Приближение сплайнами. — Новосибирск, 1984. — Вып. 106: Вычислительные системы. — С. 41–56.

7. ВАСИЛЕНКО В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. — Новосибирск: Наука, 1983. — 215 с.

8. De BOOR C. On a max-norm bound for the least-squared spline approximant //Approximation and Function Spaces: Proc. /Intern. conf., Gdansk, 1979. — New York, 1981. — P. 163–175.

9. De BOOR C. A bound on the L_∞-norm of L_2-approximation by splines in terms of a global mesh ratio //Math. Comput. — 1976. — Vol. 30, № 136. — P. 765–771.

10. SHADRIN A. On L_p-boundness of the L_2-projector onto splines //J. Approxim. Theory. - 1994. - Vol. 77, №3. — P. 331–348.

11. ИГНАТОВ М.И., ПЕВНЫЙ А.Б. Натуральные сплайны многих переменных. — Л.: Наука, 1991. - 125 с.

12. СМЕЛОВ В.В. Простой унифицированный метод реализации обобщенных сплайнов с использованием алгоритма матричной прогонки //Сиб. матем. журнал. — 1995. — Т. 36, № 3. — С. 650–658.

Поступила в редакцию
26 мая 1997 года