СПЛАЙН-ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1997 год Выпуск 159

УДК 519.65

ОПТИМИЗАЦИЯ ВИДА РАЦИОНАЛЬНОГО СПЛАЙНА[1]

В.Л. Мирошниченко

Пусть в узлах сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ заданы значения функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Рациональным (интерполяционным) сплайном называется функция $S(x) \in C^2[a, b]$, которая при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, имеет вид

$$\begin{aligned} S(x) \;=\; & (1-t)f_i + tf_{i+1} + \\ & + C_i \left[\frac{t^3}{1+\phi_i(t)} - t\right] + D_i \left[\frac{(1-t)^3}{1+\psi_i(t)} - (1-t)\right], \quad (1) \end{aligned}$$

где $t = \dfrac{x - x_i}{h_i}$, $h_i = x_{i+1} - x_i$; C_i, D_i — числовые коэффициенты; $\phi_i(t)$, $\psi_i(t) \in C^2[0, 1]$ — заданные функции, причем

$$\phi_i(t) > -1, \quad \psi_i(t) > -1, \quad t \in [0, 1]; \quad \phi_i(1) = \psi_i(0) = 1. \qquad (2)$$

Рациональные сплайны вида (1) впервые рассмотрены в работах [1,2], как обобщение известной конструкции Шпэта [3], которая получается из (1) при

$$\phi_i(t) = p_i(1-t), \quad \psi_i(t) = q_i t, \qquad (3)$$

где $p_i > -1$, $q_i > -1$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, — заданные числа.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 97-01-00824

Очевидно, что классический кубический сплайн класса C^2 является частным случаем рационального сплайна (1) при $\phi_i(t) \equiv 0$, $\psi_i(t) \equiv 0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Достаточные условия существования и единственности рационального сплайна, удовлетворяющего, помимо условий интерполяции $S(x_i) = f_i, i = 0, 1, \ldots, N$, еще двум краевым условиям, сформулированы в [1, 2, 4] в виде ограничений на функции ϕ_i, ψ_i. Эти ограничения необременительны и позволяют вводить в рассмотрение рациональные сплайны с самыми разнообразными свойствами, выбирая соответствующим образом функции ϕ_i, ψ_i. При этом целесообразно сохранять структуру этих функций неизменной на всех промежутках $[x_i, x_{i+1}]$, меняя лишь входящие в них числовые параметры (например, p_i, q_i в (3)).

Построение рационального сплайна сводится к вычислению его коэффициентов C_i, D_i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, которые легко выражаются либо через наклоны — $m_i = S'(x_i)$, либо через моменты — $M_i = S''(x_i)$ рационального сплайна. Параметры m_i или M_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, находятся из трехдиагональных систем уравнений [1, 2].

Главным преимуществом рациональных сплайнов по сравнению с кубическим сплайном класса C^2 является возможность гибкого управления формой интерполяционного сплайна [1–5] за счет выбора свободных параметров (например, p_i, q_i в (3)). В частности, возможно решение задач монотонной и выпуклой [2, 4] или изогеометрической интерполяции [6]. При этом, наряду с функциями (3) при построении монотонной и выпуклой интерполяции в [1] рекомендуется использовать следующие варианты выбора функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$:

$$\phi_i(t) = p_i(1 - t^\alpha), \quad \psi_i(t) = q_i\left[1 - (1-t)^\alpha\right], \quad \alpha > 0; \tag{4}$$

$$\phi_i(t) = p_i(1-t) + p_i^2(1-t)^2, \quad \psi_i(t) = q_i t + q_i^2 t^2; \tag{5}$$

$$\phi_i(t) = p_i t(1-t), \quad \psi_i(t) = q_i t(1-t), \tag{6}$$

где $p_i > -1$, $q_i > -1$.

Отметим, что анализ условий монотонной или выпуклой интерполяции существенным образом опирается на диагональное преобладание в системах уравнений относительно величин m_i или M_i соответственно. В системах для m_i диагональное преобладание всегда имеет место при выполнении условий существования и единственности рационального сплайна. В то же время в системах относительно параметров M_i свойство диагонального преобладания требует дополнительных, более жестких ограничений на функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$. Так в [4] предполагается $\psi_i(t) = \phi_i(1-t)$; в [7] при использовании функций (3) считается, что $p_{i-1} = q_i$. Тем самым, по существу, в два раза сокращается количество свободных параметров сплайна.

Главной целью данной работы является оптимальный выбор функций ϕ_i, ψ_i с точки зрения диагонального преобладания в системе относительно моментов M_i (§1). Интересно, что в итоге эти системы получаются не только с диагональным преобладанием, но и более простыми по сравнению с традиционным рациональным сплайном (1), (3).

В [8] для получения диагонального преобладания в системе относительно моментов M_i предлагается под названием "обобщенный кубический сплайн" усложненная конструкция рационального сплайна (1). При этом для предложенного сплайна выполняется "условие баланса" по второй производной, которое не имеет места для рациональных сплайнов с функциями (3)–(6). В §2 настоящей работы показывается, что условию баланса по второй производной с одновременным сохранением диагонального преобладания в системе для моментов можно удовлетворить, не выходя за рамки конструкции (1), путем специального выбора функций ϕ_i, ψ_i.

Введем используемые в дальнейшем обозначения и сформулируем некоторые вспомогательные результаты. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_i &= [2+\psi_i'(0)][2-\phi_i'(1)] - 1, \\ u_i &= \{6 - 6\phi_i'(1) - \phi_i''(1) + 2[\phi_i'(1)]^2\}^{-1}, \end{aligned}$$

$$v_i = \{6 + 6\psi_i'(0) - \psi_i''(0) + 2[\psi_i'(0)]^2\}^{-1},$$
$$P_i = (u_i\Delta_i)^{-1}, \qquad Q_i = (v_i\Delta_i)^{-1}.$$

Коэффициенты C_i и D_i в (1) выражаются через наклоны $m_i = S'(x_i)$ и моменты $M_i = S''(x_i)$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_i C_i &= h_i m_i + h_i m_{i+1}[2 + \psi_i'(0)] - (f_{i+1} - f_i)[3 + \psi_i'(0)], \\ \Delta_i D_i &= (f_{i+1} - f_i)[3 - \phi_i'(1)] - h_i m_i[2 - \phi_i'(1)] - h_i m_{i+1}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$C_i = h_i^2 u_i M_{i+1}, \quad D_i = h_i^2 v_i M_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \quad (8)$$

Как обычно, символами $f[x_i, x_{i+1}]$ и $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$ обозначим первую и вторую разделенные разности.

Величины m_i удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_i P_{i-1} m_{i-1} + L_i m_i + \mu_i Q_i m_{i+1} = g_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (9)$$

где $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$,

$$L_i = \lambda_i P_{i-1}[2 + \psi_{i-1}'(0)] + \mu_i Q_i[2 - \phi_i'(1)],$$
$$g_i = \lambda_i P_{i-1}\left[3 + \psi_{i-1}'(0)\right] f[x_{i-1}, x_i] + \mu_i Q_i\left[3 - \phi_i'(1)\right] f[x_i, x_{i+1}].$$

Для того, чтобы получить систему уравнений относительно величин m_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, необходимо к (9) добавить два уравнения, вытекающие из краевых условий для сплайна. В задачах монотонной и выпуклой интерполяции удобно рассматривать краевые условия типов I и II:

$$\text{I.} \qquad S'(x_k) = f_k', \quad k = 0, N; \quad (10)$$
$$\text{II.} \qquad S''(x_k) = f_k'', \quad k = 0, N, \quad (11)$$

где f_k', f_k'' — заданные величины.

В терминах величин m_i краевые условия типов I, II имеют соответственно следующий вид:

$$m_0 = f_0', \qquad m_N = f_N'; \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} m_0[2-\phi_0'(1)]+m_1 &= [3-\phi_0'(1)]f[x_0,x_1]-h_0Q_0^{-1}f_0'', \\ m_{N-1}+m_N[2+\psi_{N-1}'(0)] &= \\ = f[x_{N-1},x_N]&[3+\psi_{N-1}'(0)]+h_{N-1}P_{N-1}^{-1}f_N''. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Относительно функций ϕ_i, ψ_i, определяющих конкретный вид рационального сплайна будем далее, в дополнение к (2), предполагать выполнение следующих условий:

$$\phi_i'(1) \le 0, \quad \psi_i'(0) \ge 0, \quad u_i > 0, \quad v_i > 0, \quad i = 0, \ldots, N-1. \quad (14)$$

Легко видеть, что неравенства (14) обеспечивают диагональное преобладание в системах уравнений (9), (12) и (9), (13), а следовательно существование и единственность интерполяционного рационального сплайна с граничными условиями типов I, II. Заметим, что в применении к функциям (3)–(6) неравенства (14) трансформируются в условия

$$p_i \ge 0, \quad q_i \ge 0, \quad i = 0, \ldots, N-1. \quad (15)$$

На самом деле, с точки зрения существования рационального сплайна, ограничения (14) можно ослабить, потребовав выполнения условий $\phi_i'(1) < 1$, $\psi_i'(0) > -1$ [2]. Однако при построении монотонной или выпуклой интерполяции целесообразно предполагать выполнение неравенств (14), оставляющих достаточную свободу в выборе свободных параметров сплайна.

Характерным свойством рационального сплайна (1), (3) (см. [5]) является соотношение

$$\lim_{p_k,q_k\to\infty} S(x) = f_k(1-t)+f_kt, \qquad x \in [x_k, x_{k+1}]. \quad (16)$$

Именно это свойство, в значительной мере, гарантирует принципиальную возможность построения монотонной и выпуклой интерполяции с помощью рационального сплайна, так как линейная интерполяция, к которой, согласно (16), стремится сплайн при увеличении параметров p_i, q_i, $i = 0, \ldots, N-1$, очевидно сохраняет такие качественные особенности интерполируемых данных, как монотонность и выпуклость, в том числе, кусочные монотонность и выпуклость (изогеометрическая интерполяция).

Можно показать, что соотношение (16) справедливо также для рациональных сплайнов с функциями ϕ_i, ψ_i, определенными формулами (4)–(6).

Моменты M_i рационального сплайна удовлетворяют уравнениям

$$\mu_i v_{i-1} M_{i-1} + w_i M_i + \lambda_i u_i M_{i+1} = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{17}$$

где $w_i = \mu_i u_{i-1}[2 - \phi'_{i-1}(1)] + \lambda_i v_i [2 + \psi'_i(0)]$

Для краевых условий типов I и II к ним добавляются соответственно уравнения

$$\left.\begin{aligned} &v_0[2 + \psi'_i(0)]M_0 + u_0 M_1 = \frac{1}{h_0}\{f[x_0, x_1] - f'_0\}, \\ &v_{N-1}M_{N-1} + u_{N-1}[2 - \phi'_{N-1}(1)]M_N = \\ &\qquad = \frac{1}{h_{N-1}}\{f'_N - f[x_{N-1}, x_N]\}; \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$M_0 = f''_0, \qquad M_N = f''_N. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что системы относительно моментов для рассмотренных выше сплайнов, вообще говоря, не обладают диагональным преобладанием. В частности, для рационального сплайна Шпэта (1), (3) уравнения (17) имеют вид

$$\frac{\mu_i M_{i-1}}{3 + 3q_{i-1} + q_{i-1}^2} + \left[\frac{\mu_i(2 + p_{i-1})}{3 + 3p_{i-1} + p_{i-1}^2} + \frac{\lambda_i(2 + q_i)}{3 + 3q_i + q_i^2}\right] M_i + \\ + \frac{\lambda_i M_{i+1}}{3 + 3p_i + p_i^2} = 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \tag{20}$$

и, если для некоторого i положить $q_{i-1} = p_i = 0$, то при $p_{i-1} > \sqrt{3}$, $q_i > \sqrt{3}$ в (20) диагональное преобладание отсутствует.

Удивительно, но в [3], где введены рациональные сплайны вида (1), (3), при правильной записи системы относительно M_i, утверждается, что она имеет диагональное преобладание.

Отсутствие диагонального преобладания в системе для моментов рационального сплайна осложняет разработку алгоритмов выбора свободных параметров сплайна при построении выпуклой интерполяции по выпуклым исходным данным.

В некоторых случаях более удобной оказывается другая форма записи рационального сплайна (1). А именно, определим функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$ формулами

$$\phi_i(t) = \frac{t^3}{\xi_i(t)} - 1, \qquad \psi_i(t) = \frac{(1-t)^3}{\eta_i(t)} - 1,$$

где функции $\xi_i(t), \eta_i(t) \in C^2[0,1]$ и в соответствии с (2)

$$\xi_i(t) \geq 0, \quad \eta_i(t) \geq 0, \quad t \in [0,1], \quad \xi_i(1) = \eta_i(0) = 1. \tag{21}$$

В этом случае выражение для рационального сплайна (1) приобретает "нерациональный" вид

$$S(x) \;=\; (1-t)f_i + tf_{i+1} + C_i[\xi_i(t) - t] + D_i[\eta_i(t) - (1-t)]. \tag{22}$$

Сплайн такого типа в [3] называется обобщенным кубическим сплайном.

Учитывая (21), имеем

$$\begin{aligned}
&\phi_i'(1) = 3 - \xi_i'(1), \quad \psi_i'(0) = -3 - \eta_i'(0),\\
&\phi_i''(1) = 6 - 6\xi_i'(1) - \xi_i''(1) + 2[\xi_i'(1)]^2,\\
&\psi_i''(0) = 6 + 6\eta_i'(0) - \eta_i''(0) + 2[\eta_i'(0)]^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

Подставив (23) в формулы для $\Delta_i, u_i, v_i, P_i, Q_i$, получаем

$$\begin{aligned}
&\Delta_i = [1 - \xi_i'(1)][1 + \eta_i'(0)] - 1,\\
&u_i = [\xi_i''(1)]^{-1}, \quad v_i = [\eta_i''(0)]^{-1},\\
&P_i = \xi_i''(1)\Delta_i^{-1}, \quad Q_i = \eta_i''(0)\Delta_i^{-1}.
\end{aligned}$$

Эти выражения позволяют при конкретных функциях $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ сразу записать соответствующие уравнения (9), (12), (13) и (17)–(19) для наклонов m_i и моментов M_i сплайна (22). Условия (14), обеспечивающие диагональное преобладание в системах для наклонов, а вместе с тем существование и единственность интерполяционного сплайна (22), приобретают следующий вид

$$\xi_i'(1) \geq 3, \quad \eta_i'(0) \leq -3, \quad \xi_i''(1) > 0, \quad \eta_i''(0) > 0. \tag{24}$$

Выбор функций ξ_i, η_i по формулам

$$\xi_i(t) = \frac{(t-\alpha_i)_+^3}{(1-\alpha_i)^3}, \qquad \eta_i(t) = \frac{(\beta_i - t)_+^3}{\beta_i^3}, \tag{25}$$

где $0 \leq \alpha_i < 1$, $0 < \beta_i \leq 1$, $(z)_+ = \max\{0, z\}$, порождает кубический сплайн с дополнительными узлами [1,4], который, наряду с описанными выше рациональными сплайнами, также может применяться для интерполяции с сохранением монотонности и выпуклости. Частный случай функций (25) при $\alpha_i = \beta_i$, $i = 0, \ldots, N-1$, рассматривался в работах [9,10].

Аналогом равенства (16) для кубических сплайнов с дополнительными узлами (22), (25) служит соотношение

$$\lim_{\alpha_k \to 1, \beta_k \to 0} S(x) = (1-t)f_k + tf_{k+1}, \qquad x \in [x_k, x_{k+1}]. \tag{26}$$

Заметим, что непосредственно из определения функций ξ_i, η_i при $\alpha_k \geq \beta_k$ следует равенство

$$S(x) = (1-t)(f_k - D_k) + t(f_{k+1} - C_k), \qquad x \in [x_k + \beta_k h_k, x_k + \alpha_k h_k],$$

т. е. на указаном отрезке сплайн является полиномом первой степени.

Уравнения (17) для моментов применительно к кубическому сплайну с дополнительными узлами имеют вид

$$\mu_i \beta_{i-1}^2 M_{i-1} + \left[\mu_i(1-\alpha_{i-1})(2+\alpha_{i-1}) + \lambda_i \beta_i (3-\beta_i)\right] M_i +$$

$$+ \lambda_i (1-\alpha_i)^2 M_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \qquad i = 1, \ldots, N-1. \tag{27}$$

В уравнениях (27) диагональное преобладание, вообще говоря, отсутствует. Например, если для некоторого i имеем

$\beta_{i-1} = 1$, $\alpha_i = 0$, то при $\alpha_{i-1} > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\beta_i < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ в соответствующем i-ом уравнении (27) диагонального преобладания нет.

Одним из интересных обобщений классического кубического сплайна C^2 является сплайн переменной степени [11]. Эта конструкция получается как частный случай сплайна (22) при

$$\xi_i(t) = t^{k_i}, \quad \eta_i(t) = (1-t)^{n_i}, \quad k_i \geq 3, \; n_i \geq 3. \tag{28}$$

С вычислительной точки зрения целесообразно в (28) рассматривать только целые значения параметров k_i, n_i; случай $k_i = n_i = 3$ соответствует кубическому сплайну. Так как для сплайна переменной степени очевидно выполнение условий (24), то в системе уравнений относительно его наклонов m_i имеет место диагональное преобладание, что гарантирует существование и единственность интерполяционного сплайна. Кроме того, это позволяет получить соотношение

$$\lim_{k_i \to \infty, n_i \to \infty} S(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{29}$$

Вместе с тем в уравнениях относительно моментов сплайна переменной степени

$$\frac{\mu_i M_{i-1}}{n_{i-1}(n_{i-1}-1)} + \left[\frac{\mu_i}{k_{i-1}} + \frac{\lambda_i}{n_i}\right] M_i + \frac{\lambda_i M_{i+1}}{k_i(k_i-1)} = \tag{30}$$
$$= f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

вообще говоря, диагональное преобладание отсутствует. Действительно, если, например, $n_{i-1} = k_i = 3$, то при $k_{i-1} > 6$, $n_i > 6$ в i-ом уравнении (30) диагонального преобладания нет.

Подводя итог, заметим, что диагональное преобладание в системах для моментов рациональных сплайнов (мы относим этот термин ко всем рассмотренным выше конструкциям сплайнов) теряется при вполне обычных, далеких от экстремальных, значениях параметров сплайна.

В следующих разделах статьи мы попытаемся исправить этот недостаток, сохранив при этом положительные свойства рациональных сплайнов, к которым относятся: простота конструкции, диагональное преобладание в системах относительно наклонов, асимптотические соотношения типа (16), (26), (29).

§ 1. Рациональные сплайны с диагональным преобладанием в системе относительно моментов

Возьмем функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$, определяющие конструкцию рационального сплайна (1), в виде

$$\phi_i(t) = p_i(1-t) + A_i(1-t)^2, \quad \psi_i(t) = q_i t + B_i t^2, \tag{31}$$

где $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0$, и рассмотрим некоторые варианты выбора коэффициентов A_i, B_i.

Так как

$$\begin{aligned} \phi_i'(t) &= -p_i - 2A_i(1-t), & \phi_i''(t) &= 2A_i, \\ \psi_i'(t) &= q_i + 2B_i t, & \psi_i''(t) &= 2B_i, \end{aligned}$$

то

$$\phi_i'(1) = -p_i, \quad \psi_i'(0) = q_i, \quad \phi_i''(1) = 2A_i, \quad \psi_i''(0) = 2B_i$$

и следовательно

$$\begin{aligned} u_i &= \{6 + 6p_i + 2p_i^2 - 2A_i\}^{-1}, \\ v_i &= \{6 + 6q_i + 2q_i^2 - 2B_i\}^{-1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Отметим, что при любых A_i, B_i имеем

$$\Delta_i = (2+p_i)(2+q_i) - 1. \tag{33}$$

Кроме "классического" случая $A_i = B_i = 0$ (рациональный сплайн Шпэта) представляют интерес ещё два способа выбора коэффициентов A_i, B_i:

$$\text{a)} \quad A_i = p_i^2, \qquad B_i = q_i^2 \tag{34}$$

$$\text{b)} \quad A_i = (3+p_i)p_i, \quad B_i = (3+q_i)q_i, \tag{35}$$

при которых особенно простой вид имеют выражения для u_i, v_i и, как следствие, упрощаются соответствующие системы (9), (17) для определения наклонов или моментов рационального сплайна. Отметим, что для функций (31) с коэффициентами (34), (35) выполнены условия (14) и поэтому для обоих вариантов системы относительно наклонов будут иметь диагональное преобладание, что влечет, в свою очередь, выполнение соотношения (16).

В случае "а" имеем

$$u_i = \frac{1}{6(1+p_i)}, \quad v_i = \frac{1}{6(1+q_i)},$$

$$P_i = \frac{6(1+p_i)}{\Delta_i}, \quad Q_i = \frac{6(1+q_i)}{\Delta_i},$$

и уравнения (9) относительно наклонов

$$\frac{\lambda_i(1+p_{i-1})}{\Delta_{i-1}} m_{i-1} + \left[1 - \frac{\lambda_i(1+q_{i-1})}{\Delta_{i-1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_i(1+p_i)}{\Delta_i}\right] m_i + \frac{\mu_i(1+q_i)}{\Delta_i} m_{i+1} =$$

$$= \lambda_i\left(1 + \frac{p_{i-1}-q_{i-1}}{\Delta_{i-1}}\right) f[x_{i-1},x_i] + \mu_i\left(1 + \frac{q_i - p_i}{\Delta_i}\right) f[x_i,x_{i+1}],$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1, \tag{36}$$

имеют более простой вид, чем соответствующие соотношения для сплайна Шпэта (см. [3], [5]).

Для моментов M_i из (17) в случае a) получаем

$$\frac{\mu_i}{1+q_{i-1}} M_{i-1} + \left[1 + \frac{\mu_i}{1+p_{i-1}} + \frac{\lambda_i}{1+q_{i-1}}\right] M_i + \frac{\lambda_i}{1+p_i} M_{i+1} =$$

$$= 6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}], \qquad i = 1,\ldots,N-1. \tag{37}$$

Эти уравнения, во-первых, значительно проще аналогичных уравнений (20) для рационального сплайна Шпэта. Во-вторых, и это самое главное, при любых $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0$, $i = 0, \ldots, N-1$, в них имеет место диагональное преобладание.

В случае "б" находим

$$u_i = v_i = \frac{1}{6}, \quad P_i = Q_i = \frac{6}{\Delta_i}.$$

В результате система относительно m_i имеет вид

$$\frac{\lambda_i}{\Delta_{i-1}} m_{i-1} + \left[\frac{\lambda_i(2+q_{i-1})}{\Delta_{i-1}} + \frac{\mu_i(2+p_i)}{\Delta_i}\right] m_i + \frac{\mu_i}{\Delta_i} m_{i+1} =$$

$$= \frac{\lambda_i(3+q_{i-1})}{\Delta_{i-1}} f[x_{i-1}, x_i] + \frac{\mu_i(3+p_i)}{\Delta_i} f[x_i, x_{i+1}], \tag{38}$$

$$i = 1, \ldots, N-1.$$

Особенно простой вид в случае б) имеет система для моментов M_i:

$$\mu_i M_{i-1} + (2 + \mu_i p_{i-1} + \lambda_i q_i) M_i + \lambda_i M_{i+1} = 6 f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}],$$

$$i = 1, \ldots, N-1, \tag{39}$$

которая обладает ярко выраженным диагональным преобладанием.

Заметим, что функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$, соответствующие случаю "а", это не что иное, как упомянутые во введении функции (5). В случае "б" имеем

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= p_i(1-t)[1 + (3+p_i)(1-t)], \\ \psi_i(t) &= q_i t[1 + (3+q_i)t]. \end{aligned} \tag{40}$$

Для построения выпуклого интерполяционного рационального сплайна необходимо, чтобы функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$ удовлетворяли условиям [4]:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{t^3}{1+\phi_i(t)}\right\} \geq 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{(1-t)^3}{1+\psi_i(t)}\right\} \geq 0, \quad t \in [0,1] \tag{41}$$

Нетрудно проверить, что для функций (5) и (40) эти неравенства выполняются.

Рассмотрим теперь функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$ следующего типа

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= p_i t(1-t) + A_i t^2(1-t)^2, \\ \psi_i(t) &= q_i t(1-t) + B_i t^2(1-t)^2, \end{aligned} \tag{42}$$

где $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0$. В частном случае $A_i = B_i = 0$ из (42) получаем функции (6).

Так как

$$\phi_i'(t) = p_i(1-2t) + 2A_i t(1-t)(1-2t),$$
$$\phi_i''(t) = -2p_i + 2A_i[1 - 6t(1-t)],$$

то $\phi_i'(1) = -p_i$, $\quad \phi_i''(1) = -2p_i + 2A_i$.

Аналогично, $\psi_i'(0) = q_i$, $\quad \psi_i''(0) = -2q_i + 2B_i$. Поэтому

$$u_i = \left[6 + 8p_i + 2p_i^2 - 2A_i\right]^{-1},$$
$$v_i = \left[6 + 8q_i + 2q_i^2 - 2B_i\right]^{-1}$$

Заметим также, что выражение для Δ_i не зависит от A_i, B_i и совпадает с (33).

Наряду с упомянутым выше случаем $A_i = B_i = 0$, рассмотрим ещё несколько вариантов выбора коэффициентов A_i, B_i в (42):

$$A_i = p_i^2, \qquad B_i = q_i^2, \tag{43}$$

$$A_i = p_i(1+p_i), \qquad B_i = q_i(1+q_i), \tag{44}$$

$$A_i = p_i(4+p_i), \qquad B_i = q_i(4+q_i). \tag{45}$$

Нетрудно проверить, что при задании A_i, B_i по формулам (43) система относительно моментов соответствующего рационального сплайна (1), (42), вообще говоря, не имеет диагонального преобладания (это замечание относится и к случаю $A_i = B_i = 0$).

Более интересными оказываются способы определения A_i, B_i с помощью формул (44), (45). Действительно, учитывая (44), находим

$$u_i = \frac{1}{6(1+p_i)}, \qquad v_i = \frac{1}{6(1+q_i)},$$

т. е. выражения u_i, v_i, отвечающие функциям

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= p_i t(1-t)[1+(1+p_i)t(1-t)], \\ \psi_i(t) &= q_i t(1-t)[1+(1+q_i)t(1-t)], \end{aligned} \tag{46}$$

тождественны аналогичным выражениям для функций (5). Отсюда ясно, что системы относительно наклонов и моментов рационального сплайна с функциями (46) полностью совпадают с соответствующими системами (36), (37) для сплайна с функциями (5). Таким образом, у рациональных сплайнов (1) с функциями ϕ_i, ψ_i, определёнными формулами (5), (46), значения сплайнов и их первых двух производных совпадают в узлах сетки Δ. Различие между функциями (5), (46) может быть использовано для дополнительного управления поведением сплайна между узлами сетки.

Аналогичная ситуация имеет место для рационального сплайна с функциями

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= p_i t(1-t)[1+(4+p_i)t(1-t)], \\ \psi_i(t) &= q_i t(1-t)[1+(4+q_i)t(1-t)], \end{aligned} \tag{47}$$

которые соответствуют выбору коэффициентов A_i, B_i в (42) согласно формулам (45). А именно, у такого сплайна системы для наклонов и моментов совпадают с соответствующими системами (38), (39) для рационального сплайна с функциями (40).

Свойство диагонального преобладания в системах относительно моментов сплайна позволяет, во-первых, организовать процедуры построения рационального сплайна не только через наклоны, но и через моменты, как это делается для кубических сплайнов класса C^2. Во-вторых, при построении интерполяции с сохранением выпуклости исходных данных предоставляется полная свобода в выборе параметров p_i, q_i рационального сплайна.

§ 2. Рациональные сплайны с балансом по второй производной

Пусть $f(x) \in C^2[a,b]$. Тогда $f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{1}{2}f''(\theta_i)$, $\theta_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и уравнения (17) могут быть переписаны в виде

$$\mu_i v_{i-1} M_{i-1} + w_i M_i + \lambda_i u_i M_{i+1} = \frac{1}{2} f''(\theta_i), \tag{48}$$
$$i = 1, \ldots, N-1.$$

Будем говорить, что в (17) имеет место баланс по второй производной, если сумма коэффициентов при вторых производных сплайна в левой части (17) равна коэффициенту при второй производной функции в правой части (48), т. е. когда

$$\mu_i \left[v_{i-1} + u_{i-1}(2 - \phi'_{i-1}(1)) \right] + \lambda_i \left[u_i + v_i(2 + \psi'_i(0)) \right] = \frac{1}{2}, \tag{49}$$
$$i = 1, \ldots, N-1.$$

Аналогично вводится понятие баланса по второй производной в уравнениях (18), отвечающих краевым условиям типа I. Достаточно заметить, что $f[x_0, x_1] - f'_0 = h_0 f''(\theta'_0)$, $\theta'_0 \in [x_0, x_1]$; $f'_N - f[x_{N-1}, x_N] = h_{N-1} f''(\theta'_{N-1})$, $\theta'_{N-1} \in [x_{N-1}, x_N]$. Для краевых условий типа II баланс по второй производной очевиден (см. уравнения (19)).

Баланс по второй производной выполняется для кубических сплайнов класса C^2, для которых $\phi_i(t) \equiv 0$, $\psi_i(t) \equiv 0$, $v_{i-1} = u_i = 1/6$, и именно этот факт обеспечивает аппроксимацию второй производной интерполируемой функции соответствующей производной кубического сплайна. Что касается рациональных сплайнов, то ни для одного из рассмотренных выше частных случаев нетривиального выбора функций $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$ условие баланса по второй производной не выполняется (см. системы (20), (27), (30), (37), (39)).

Покажем, что путем специального выбора функций $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$ в (1) можно построить рациональные сплайны, обладающие свойством баланса по второй производной.

В самом деле, условия (49) очевидно будут выполнены, если при всех $i = 1, \ldots, N-1$ будут справедливы равенства

$$v_{i-1} + u_{i-1}[2 - \phi'_{i-1}(1)] = \frac{1}{2}, \quad v_i[2 + \psi'_i(0)] + u_i = \frac{1}{2},$$

для выполнения которых, в свою очередь, достаточно, чтобы каждая пара величин u_i, v_i удовлетворяла системе

$$\begin{cases} u_i[2 - \phi'_i(1)] + v_i = 1/2, \\ u_i + [2 + \psi'_i(0)]v_i = 1/2. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$u_i = \frac{1 + \psi'_i(0)}{2\Delta_i}, \quad v_i = \frac{1 - \phi'_i(1)}{2\Delta_i}, \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{50}$$

Равенства (50) представляют собой ограничения на функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$, при выполнении которых рациональный сплайн (1) будет с балансом по второй производной. Предположим, что функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$ определены формулами (31). Покажем, что коэффициенты A_i, B_i в (31) можно выбрать так, что равенства (50) будут выполнены.

Действительно, для функций (31) условия (50) имеют вид

$$u_i = \frac{1 + q_i}{2\Delta_i}, \quad v_i = \frac{1 + p_i}{2\Delta_i}, \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{51}$$

С другой стороны, величины u_i, v_i определяются формулами (32). Подставляя (32) в (51) и учитывая, что $\Delta_i = (2 + p_i)(2 + q_i) - 1$, находим искомые коэффициенты A_i, B_i:

$$A_i = \frac{1 + p_i}{1 + q_i}(p_i + q_i + p_i q_i), \quad B_i = \frac{1 + q_i}{1 + p_i}(p_i + q_i + p_i q_i), \tag{52}$$

$$i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

В итоге, рациональный сплайн (1), для которого функции $\phi_i(t)$, $\psi_i(t)$ определены формулами (31), (52) удовлетворяет условию баланса по второй произиодной. Соответствующие уравнения (17) относительно моментов сплайна приобретают следующий вид

$$\frac{\mu_i(1+p_{i-1})}{\Delta_{i-1}}M_{i-1} + \left[1 - \frac{\mu_i(1+p_{i-1})}{\Delta_{i-1}} - \frac{\lambda_i(1+q_i)}{\Delta_i}\right]M_i +$$

$$+\frac{\lambda_i(1+q_i)}{\Delta_i}M_{i+1} = 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \qquad (53)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Баланс по второй производной в (53) очевиден. Кроме того, уравнения (53) имеют диагональное преобладание при любых $p_i \geq 0$, $q_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, в чем легко убедиться, если записать коэффициент при M_i в виде

$$\frac{\mu_i}{\Delta_{i-1}}(2+p_{i-1})(1+q_{i-1}) + \frac{\lambda_i}{\Delta_i}(2+q_i)(1+p_i).$$

Для полноты изложения приведем еще систему уравнений относительно наклонов рассмотренного сплайна:

$$\frac{\lambda_i}{1+q_{i-1}}m_{i-1} + \left(1 + \frac{\lambda_i}{1+q_{i-1}} + \frac{\mu_i}{1+p_i}\right)m_i + \frac{\mu_i}{1+p_i}m_{i+1} =$$

$$= \frac{\lambda_i(3+q_{i-1})}{1+q_{i-1}}f[x_{i-1}, x_i] + \frac{\mu_i(3+p_i)}{1+p_i}f[x_i, x_{i+1}], \qquad (54)$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Диагональное преобладание в ней очевидно и это позволяет для рационального сплайна (1), (31), (52) вывести соотношение (16). Заметим также, что для этого сплайна справедливы неравенства (41).

Из условий баланса (50) можно найти коэффициенты A_i, B_i в (42):

$$
\begin{aligned}
A_i &= p_i + \frac{1+p_i}{1+q_i}(p_i+q_i+p_iq_i),\\
B_i &= q_i + \frac{1+q_i}{1+p_i}(p_i+q_i+p_iq_i).
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Следовательно рациональный сплайн (1) с функциями (42), (55) также будет обладать свойством баланса по второй производной. При этом, как нетрудно видеть его наклоны и моменты будут удовлетворять системам уравнений (53), (54).

Пусть теперь рациональный сплайн имеет "нерациональную форму" (22). Тогда, в соответствии с (23), достаточные условия баланса по второй производной (50) приобретают следующий вид

$$
u_i = -\frac{2+\eta_i'(0)}{2\Delta_i}, \quad v_i = -\frac{2-\xi_i'(1)}{2\Delta_i}, \quad i=0,1,\dots,N-1. \tag{56}
$$

Отсюда, учитывая выражения для u_i, v_i, Δ_i через функции $\eta_i(t)$, $\xi_i(t)$, приходим к соотношениям

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\xi_i''(1) = \xi_i'(1) - \frac{\xi_i'(1)+\eta_i'(0)}{2+\eta_i'(0)},\\
\frac{1}{2}\eta_i''(0) = -\eta_i'(0) + \frac{\xi_i'(1)+\eta_i'(0)}{2-\xi_i'(1)},\\
i=0,1,\dots,N-1,
\end{gathered}
\tag{57}
$$

которые являются достаточными условиями баланса по итогой производной для сплайнов вида (22).

Для кубичекого сплайна с дополнительными узлами (функции $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ определены формулами (25)) условия (57) выполняются только в частном случае $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, $i = 0,1,\dots,N-1$, когда этот сплайн становится обычным кубическим сплайном класса C^2. Положим

$$
\xi_i(t) = \frac{(t-\alpha_i)_+^3}{(1-\alpha_i)^3 + A_i t^2}, \quad \eta_i(t) = \frac{(\beta_i - t)_+^3}{\beta_i^3 + B_i(1-t)^2}, \tag{58}
$$

$$
i = 0,1,\dots,N-1.
$$

Имеем

$$\xi_i'(1) = \frac{3}{1-\alpha_i}, \qquad \eta_i'(0) = -\frac{3}{\beta_i},$$

$$\xi_i''(1) = \frac{6}{(1-\alpha_i)^2} - \frac{2A_i}{(1-\alpha_i)^3}, \qquad \eta_i''(0) = \frac{6}{\beta_i^2} - \frac{2B_i}{\beta_i^3}.$$

Подставив эти выражения в (57), находим

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{3(1-\alpha_i)}{3-2\beta_i}\left[\alpha_i^2 + (1+\alpha_i)(1-\beta_i)\right], \\ B_i &= \frac{3\beta_i}{1+2\alpha_i}\left[(1-\beta_i)^2 + \alpha_i(2-\beta_i)\right], \end{aligned} \tag{59}$$

$$i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

В результате сплайн с дополнительными узлами (но уже не кубический) с функциями $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$, определенными формулами (58), (59), будет иметь баланс по второй производной при всех допустимых значениях параметров α_i, β_i, т. е. при $0 \le \alpha_i < 1$, $0 < \beta_i \le 1$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Приведем системы уравнений для наклонов и моментов, соответствующие сплайну (22), (58), (59).

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_i\beta_{i-1}}{3-2\beta_{i-1}} m_{i-1} + \left[1 + \frac{\lambda_i\beta_{i-1}}{3-2\beta_{i-1}} + \frac{\mu_i(1-\alpha_i)}{1+2\alpha_i}\right] m_i + \\ &+ \frac{\mu_i(1-\alpha_i)}{1+2\alpha_i} m_{i+1} = \frac{3\lambda_i f[x_{i-1}, x_i]}{3-2\beta_{i-1}} + \frac{3\mu_i f[x_i, x_{i+1}]}{1+2\alpha_i}, \end{aligned} \tag{60}$$

$$i = 1, \ldots, N-1;$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_i(1+2\alpha_{i-1})}{(1-\alpha_{i-1})\Delta_{i-1}} M_{i-1} + \left[1 - \frac{\mu_i(1+2\alpha_{i-1})}{(1-\alpha_{i-1})\Delta_{i-1}} - \frac{\lambda_i(3-2\beta_i)}{\beta_i\Delta_i}\right] M_i + \\ &+ \frac{\lambda_i(3-2\beta_i)}{\beta_i\Delta_i} M_{i+1} = 2f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \end{aligned} \tag{61}$$

$$i = 1, \ldots, N-1.$$

Очевидно, в системе (60) имеется диагональное преобладание, а для уравнений (61) выполняется условие баланса по второй производной. Кроме того, если учесть равенство

$$\Delta_k = \frac{6 - 3\beta_k + 3\alpha_k}{(1-\alpha_k)\beta_k}, \qquad k = 0, \ldots, N-1,$$

то легко убедиться в том, что в уравнениях (61) также имеет место диагональное преобладание.

Построим теперь рациональный сплайн с балансом по второй производной путем модификации сплайна переменной степени, который задается формулой (22) и функциями (28). С этой целью положим

$$\xi_i(t) = \frac{t^{k_i}}{1 + A_i(1-t)^2}, \quad \eta_i(t) = \frac{(1-t)^{n_i}}{1 + B_i t^2}, \quad k_i \geq 3, \ n_i \geq 3. \quad (62)$$

Так как

$$\begin{aligned} &\xi_i'(1) = k_i, && \eta_i'(0) = -n_i, \\ &\xi_i''(1) = k_i(k_i - 1) - 2A_i, && \eta_i''(0) = n_i(n_i - 1) - 2B_i, \end{aligned}$$

то из достаточных условий баланса по второй производной (57) находим

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{(k_i - 2)}{2}\left(k_i - \frac{n_i}{n_i - 2}\right), \\ B_i &= \frac{(n_i - 2)}{2}\left(n_i - \frac{k_i}{k_i - 2}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \quad (63)$$

Таким образом, сплайн (22) (уже рациональный, несмотря на "нерациональный" вид) с функциями $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$, заданными формулами (62), (63) будет иметь баланс по второй производной. Приведем соответствующие этому сплайну системы уравнений (9), (17) для наклонов и моментов:

$$\frac{\lambda_i}{n_{i-1}-2}m_{i-1} + \left[1+\frac{\lambda_i}{n_{i-1}-2}+\frac{\mu_i}{k_i-2}\right]m_i + \frac{\mu_i}{k_i-2}m_{i+1} =$$

$$= \frac{\lambda_i n_{i-1}}{n_{i-1}-2}f[x_{i-1},x_i] + \frac{\mu_i k_i}{k_i-2}f[x_i,x_{i+1}], \qquad (64)$$

$$i = 1,\ldots,N-1;$$

$$\frac{\mu_i(k_{i-1}-2)}{\Delta_{i-1}}M_{i-1} + \left[1-\frac{\mu_i(k_{i-1}-2)}{\Delta_{i-1}}-\frac{\lambda_i(n_i-2)}{\Delta_i}\right]M_i +$$

$$+\frac{\lambda_i(n_i-2)}{\Delta_i}M_{i+1} = 2f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}], \qquad (65)$$

$$i = 1,\ldots,N-1.$$

Очевидны диагональное преобладание в уравнениях (64) и баланс по второй производной в (65). Так как $\Delta_i = k_i n_i - k_i - n_i$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, то легко установить, что уравнения (65) с диагональным преобладанием.

Подводя итог, заметим, что во всех рассмотренных нами примерах рациональных сплайнов с балансом по второй производной системы и для наклонов, и для моментов имеют диагональное преобладание. Кроме того, обратим внимание на довольно простой вид этих систем, что, как нетрудно видеть, является прямым следствием условий баланса по второй производной.

Функции ϕ_i, ψ_i или ξ_i, η_i, $i = 0,\ldots,N-1$, в рассмотренных примерах сплайнов без баланса по второй производной полностью независимы друг от друга, и каждая из них определяется одним параметром. Иначе обстоит дело в случае сплайнов, обладающих свойством баланса по второй производной, — здесь каждая пара функций (ϕ_i,ψ_i) или (ξ_i,η_i) определяется двумя независимыми параметрами.

Литература

1. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Приближение функций сплайнами // Сплайн-функции в инженерной геометрии. — Новосибирск, 1981. — Вып. 86: Вычислительные системы. — С. 11–36.

2. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Интерполяция функций с большими градиентами // Методы аппроксимации и интерполяции. — Новосибирск, 1981. — С. 98–107.

3. SPÄTH H. Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. — München — Wien: R.Oldenbourg Verlag, 1973. — 134 s.

4. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of functions'84. — Sofia, 1984. — P. 610–620.

5. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980. — 352 с.

6. КВАСОВ Б.И., ЯЦЕНКО С.А. Изогеометрическая интерполяция рациональными сплайнами // Аппроксимация сплайнами. — Новосибирск, 1987. — Вып. 121: Вычислительные системы. — С. 11–36.

7. ВОЛКОВ Ю.С. Применение рациональных кубических сплайнов для расчета динамических характеристик двигателя //Сплайны и их приложения. — Новосибирск, 1995. — Вып. 154: Вычислительные системы. — С. 65–72.

8. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Выпуклая интерполяция обобщенными кубическими сплайнами класса C^2 //Там же. С. 15–64

9. PRUESS S. Alternatives to the exponential spline in tension // Math. Comput. 1979. — Vol. 33, N 148. — P. 1273–1281.

10. ДЕ БОР К. Практическое руководство по сплайнам. — М.: Радио и связь. 1985. — 303 с.

11. SOANES R.W.Jr. VP–splines, an extension of twice differentiable interpolation // Proc. Army numer. Anal. Comp. Conf. — Res. Triangle Park, 1976. — P. 141–152.

Поступила в редакцию
11 ноября 1997 года