СПЛАЙН-ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1997 год **Выпуск 159**

УДК 519.65

О ПРИБЛИЖЕНИИ КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ НЕЯВНО, КУБИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

В.А.Скороспелов, П.А.Турук

На практике часто возникает необходимость заданную неявно кривую представить в форме, удобной для дальнейшего использования. Подобная задача возникает, например, у разработчиков программного обеспечения систем геометрического моделирования. Так, различные кривые, лежащие на поверхности (плоские сечения, линии пересечения поверхностей, проекции кривых на поверхность и т.д.), в общем случае не представимы в явном виде и поэтому заменяются с заданной точностью некоторым аппроксимантом. В качестве аппроксиманта обычно используют параметрические сплайны различных степеней. Среди них наиболее эффективны линейные и кубические сплайны, сочетающие в себе простоту численной реализации и хорошие аппроксимационные свойства.

Оставляя в стороне природу кривой и способ ее определения, будем предполагать, что существует численная процедура, позволяющая рассчитывать координаты точек кривой и касательной к ней в зависимости от какого-либо параметра.

Напомним [1],что кубический параметрический сплайн, определенный на сетке $\Delta: \ a = S_1 < S_2 < \cdots < S_n = b$ по значениям $\bar{r}_i = \bar{r}(S_i)$, $\quad \bar{r}'_i = \bar{r}'_i(S_i)$ в узлах этой сетки, может быть представлен в форме:

$$\overline{V}(S) = \bar{r}_i F_1(u) + \bar{r}_{i+1} F_2(u) + \\ + \Delta S_i(\bar{r}_i' F_3(u) + \bar{r}_{i+1}' F_4(u)), \quad (1)$$

$$S \in [S_i, S_{i+1}], \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $F_1(u) = (1-u)^2(1+2u)$, $F_2(u) = u^2(3-2u)$, $F_3(u) = u(1-u)^2$, $F_4(u) = -u^2(1-u)$, $u = \dfrac{S - S_i}{\Delta S_i}$, $\Delta S_i = S_{i+1} - S_i$.

Обозначим $\bar{r}^{(p)}(S) = \dfrac{\partial^p \bar{r}(S)}{\partial S^p}$,

$$||\bar{r}^{(p)}||_i = ||\bar{r}^{(p)}||_{[S_i, S_{i+1}]} = \max_{S \in [S_i, S_{i+1}]} |\bar{r}^{(p)}(S)|.$$

Если $\{\bar{r}_i, \bar{r}_i'\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — значения, соответствующие некоторой параметризации $\bar{r} = \bar{r}(S)$ кривой, определенной на отрезке [a,b], то $\overline{V}(S)$ интерполирует эту кривую с погрешностью, для которой в зависимости от степени гладкости параметризации $\bar{r}(S)$ имеют место следующие оценки [1,2].

Если $\bar{r}(S) \in C^2[a, b]$, то

$$|\bar{r}^{(p)}(S) - \overline{V}^{(p)}(S)| \le K_p \Delta S_i^{2-p} ||\bar{r}''||_i, \quad (2)$$

$$S \in [S_i, S_{i+1}], \qquad p = 0, 1,$$

где $K_0 = \dfrac{1}{16}$, $K_1 = 0.2515$.

Если $\bar{r}(S) \in C^4[a, b]$, то

$$|\bar{r}^{(p)}(S) - \overline{V}^{(p)}(S)| \le K_p \Delta S_i^{4-p} ||\bar{r}^{\mathrm{IV}}||_i, \quad (3)$$

$$S \in [S_i, S_{i+1}], \qquad p = 0, 1, 2,$$

где $K_0 = \dfrac{1}{384}$, $K_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{216}$, $K_2 = \dfrac{1}{2}$.

Из приведенных оценок видно, что заданная точность приближения кривой сплайном может быть достигнута за счет соответствующего разбиения отрезка [a,b] в зависимости от свойств рассматриваемой параметризации кривой. Следует отметить, что эрмитов кубический сплайн более эффективен для приближения кривых с заданной точностью, чем кубический сплайн класса C^2. Действительно, процедура построения эрмитова сплайна в отличие от сплайна класса C^2 — локальная, что позволяет более точно учесть особенности кривой и осуществить ее приближение на более редкой сетке по сравнению со сплайном класса C^2. К тому же, как следует из оценки (3), эрмитов сплайн аппроксимирует вторую производную параметризации кривой и нетрудно видеть, что разрыв его второй производной в узлах сетки Δ ограничен величиной $2K_2\Delta S_i^2\|\bar{r}^{\mathrm{IV}}\|_i$. Таким образом, за счет выбора достаточно густой сетки величина разрыва второй производной приближающего сплайна может быть сделана сколь угодно малой.

Заметим, что в большинстве практических приложений, где формально требуется аппроксимация с непрерывной второй производной, на самом деле можно ограничиться аппроксимацией с разрывом второй производной, если величина разрыва достаточно мала. Понятно, что в таких ситуациях эрмитовы кубические сплайны могут использоваться с тем же успехом, что и сплайны класса C^2.

Из вышеизложенного видно, что приближение кривой параметрическим сплайном состоит в приближении какой-либо ее параметризации $\bar{r} = \bar{r}(S)$, $S \in [a, b]$, свойства которой существенно влияют на точность приближения. В нашем случае кривая определена неявно и это означает, что заранее не известна какая-либо ее параметризация. Поэтому первый шаг в решении поставленной задачи — определение параметризации приближаемой кривой. Из всех возможных параметризаций очевидное преимущество имеет естественная параметризация, параметром которой является длина дуги кривой. Введение какого-либо другого параметра (например, суммарной длины хорд, соединяющих последовательность точек кривой) приводит к другой проблеме — определению производных от такой параметризации. Для естественной параметризации, наоборот, достаточно просто подсчитываются в точках $\bar{r}_i$ кривой ее первая производная $\bar{\tau}_i$ — орт касательного вектора и значение второй производной $\bar{k}_i$ — вектор кривизны. Однако вычисление длины дуги кривой, заданной неявно, сопряжено с большими вычислительныеми затратами. Поэтому практический интерес представляет описываемый ниже прием, существо которого заключается в построении параметрического сплайна, параметризованного так, что значение его параметра в узлах совпадает с длиной его дуги.

Пусть $\{\bar{r}_i, \bar{\tau}_i, S_i, \bar{r}_{i+1}, \bar{\tau}_{i+1}, S_{i+1}\}$ — значения естественной параметризации кривой. В соответствии с формулой (1) построим по этим значениям звено параметрического сплайна $\overline{V} = \overline{V}_i(u, \Delta S_i)$ и оценим разность его длины дуги и длины дуги приближаемой кривой. Используя оценку (2), получаем

$$\left| \int_0^{\Delta S_i} |\bar{r}(S)| dS - \int_0^{\Delta S_i} |\overline{V}_i'(S)| dS \right| \le$$

$$\le \int_0^{\Delta S_i} |\bar{r}(S) - \overline{V}'(S)| dS \le 0.2515 \Delta S_i^2 ||\bar{k}||_i. \qquad (4)$$

Следовательно, $\overline{V}_i(u, \Delta S_i)$ с одинаковой степенью точности приближает как саму кривую $\bar{r}(S)$, так и ее длину дуги. Это обстоятельство наводит на мысль использовать в качестве параметра, относительно которого будет строиьтся приближающий сплайн по значениям $\{\bar{r}_i, \bar{\tau}_i\}$, длину дуги самого сплайна, решив для этого уравнение

$$\Delta t_i = \Phi(\Delta t_i) \equiv \int_0^1 |\overline{V}'(u, \Delta t_i)| du, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (5)$$

относительно Δt_i. Такой сплайн в дальнейшем будем называть *квазиестественным сплайном*. Известно [3], что уравнение (5) имеет единственное решение и для его нахождения можно воспользоваться методом простой итерации, если в качестве начального приближения взять любое значение $\Delta t_i^{(0)} > 0$, например, $\Delta t_i^{(0)} = |\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i|$. Оценим разность между длиной дуги ΔS_i кривой и длиной дуги квазиестественного сплайна. Для этого рассмотрим два равенства: $\delta t_i = \Phi(\Delta S_i)$, $\Delta t_i = \Phi(\Delta t_i)$. Беря их разность и применяя теорему о среднем, получаем:

$$\delta t_i - \Delta t_i = \Phi'(\alpha)(\Delta S_i - \Delta t_i), \quad \alpha \in [\Delta S_i, \Delta t_i]$$

или

$$(\delta t_i - \Delta S_i) + (\Delta S_i - \Delta t_i) = \Phi'(\alpha)(\Delta S_i - \Delta t_i).$$

Отсюда на основании оценки (4) для разности дуг $(\delta t_i - \Delta S_i)$ кривой и сплайна следует, что

$$|\Delta S_i - \Delta t_i| = \frac{|\delta t_i - \Delta S_i|}{|1 - \Phi'(\alpha)|} \leq 0.2515 \frac{\Delta S_i^2 ||\bar{k}||_i}{|1 - \Phi'(\alpha)|}. \quad (6)$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned}
\Phi'(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 |\overline{V}'(u,\alpha)| du = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 \sqrt{(\overline{V}', \overline{V}')} du = \\
&= \int_0^1 \frac{(\overline{V}', \frac{\partial}{\partial \alpha} \overline{V}'(u,\alpha))}{|\overline{V}'|} du = \\
&= \int_0^1 (< \overline{V}'(u) >, \ \bar{r}_i F_3'(u) + \bar{r}_{i+1} F_4'(u)) du = \\
&= \int_0^1 (\cos \varphi_i(u) F_3'(u) + \cos \varphi_{i+1}(u) F_4'(u)) du,
\end{aligned}$$

где $\cos \varphi_i(u) = (< \overline{V}'(u) >, \bar{r}_i), \cos \varphi_{i+1}(u) = (< \overline{V}'(u) >, \bar{r}_{i+1})$, $(\overline{X}, \overline{Y})$ — скалярное произведение векторов $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, $< \overline{X} >$ — операция нормировки вектора $\overline{X}$.

Разбивая интервалы интегрирования на участки знакопостоянства функций $F_3'(u)$ и $F_4'(u)$ и предполагая, что $\cos\varphi_i(u) > 0$ и $\cos\varphi_{i+1}(u) > 0$ для реальной разбивки кривой, последовательно получаем

$$\begin{aligned}
\Phi'(\alpha) &= \int_0^1 \cos\varphi_i(u)F_3'(u)du + \int_0^1 \cos\varphi_{i+1}(u)F_4'(u)du = \\
&= \int_0^{1/3} \cos\varphi_i(u)F_3'(u)du + \int_{1/3}^1 \cos\varphi_i(u)F_3'(u)du + \\
&+ \int_0^{2/3} \cos\varphi_{i+1}(u)F_4'(u)du + \int_{2/3}^1 \cos\varphi_{i+1}(u)F_4'(u)du = \\
&= \cos\varphi_i(\xi)\int_0^{1/3} F_3'(u)du + \cos\varphi_i(\eta)\int_{1/3}^1 F_3'(u)du + \\
&+ \cos\varphi_{i+1}(\lambda)\int_0^{2/3} F_4'(u)du + \\
&+ \cos\varphi_{i+1}(\mu)\int_{2/3}^1 F_4'(u)du = \frac{4}{27}\{\cos\varphi_i(\xi) - \\
&- \cos\varphi_i(\eta) + \cos\varphi_{i+1}(\lambda) - \cos\varphi_{i+1}(\mu)\}.
\end{aligned}$$

Поскольку $\Phi'(0) = 0$ и

$$\Phi''(\alpha) = \int_0^1 \frac{|\frac{\partial}{\partial\alpha}\overline{V}'(u,\alpha)|^2|\overline{V}'|^2 - (\overline{V}', \frac{\partial}{\partial\alpha}\overline{V}'(u,\alpha))^2}{|\overline{V}'|^3}du > 0,$$

то $\Phi'(\alpha) > 0$ для $\alpha > 0$. Тогда для $\Phi'(\alpha)$ окончательно получаем оценку $\Phi'(\alpha) \le \frac{8}{27}$. Подставляя ее в (6), находим, что разность длин дуг кривой и приближающего квазиестественного сплайна ограничена величиной:

$$|\Delta S_i - \Delta t_i| \le 0.3574 \Delta S_i^2 ||\bar{k}||_i. \tag{7}$$

Теперь, для того, чтобы сравнить точки кривой и приближающего квазиестественного сплайна, введем общий для них параметр $u \in [0,1]$: $S = S_i + u\Delta S_i$, $t = t_i + u\Delta t_i$.

Оценка (2) для разности $\bar{r}(S(u)) - \overline{V}(t(u))$ не применима, так как $\overline{V}(t(u))$ не является эрмитовым интерполянтом по отношению к $\bar{r}(S(u))$. Поэтому перепишем эту разность в виде:

$$\begin{aligned} \bar{r}(S(u)) &- \overline{V}(t(u)) = \\ &= [\bar{r}(S(u)) - \overline{V}(S(u))] + [\overline{V}(S(u)) - \overline{V}(t(u))]. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого правой части этого равенства имеет место оценка (2). Рассмотрим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} |\overline{V}(S(u)) &- \overline{V}(t(u))| = |\overline{V}(u, \Delta S_i) - \overline{V}(u, \Delta t_i)| \le \\ &\le |\Delta S_i - \Delta t_i||\bar{r}_i F_3(u) + \bar{r}_{i+1} F_4(u)| = \\ &= |\Delta S_i - \Delta t_i|(u^2(1-u)^2[2(1 + (\bar{r}_i, \bar{r}_{i+1})) \times \\ &\times (u^2 - u) + 1])^{1/2}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$\Psi(u) = u^2(1-u)^2[(2 + \frac{2}{3}(\bar{r}_i, \bar{r}_{i+1}))(u^2 - u) + 1]$$

на интервале [0,1] при $(\bar{r}_i, \bar{r}_{i+1}) \ge 0$ является мажорантной подкоренного выражения и в точке $u = \frac{1}{2}$ принимает максимальное значение $\Psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{96}(3 - (\bar{r}_i, \bar{r}_{i+1}))$. Следовательно, с учетом оценки (7) сначала получаем неравенство

$$|\overline{V}(S(u)) - \overline{V}(t(u))| \le 0.03648\sqrt{3 - (\bar{r}_i, \bar{r}_{i+1})}\ \Delta S_i^2 ||\bar{k}||_i,$$

а затем и окончательную оценку приближения кривой квазиестественным сплайном, выраженную через значения естественной параметризации кривой

$$|\bar{r}(S(u)) - \overline{V}(t(u))| \le$$
$$\le \left(\frac{1}{16} + 0.03648\sqrt{3 - (\bar{r}_i, \bar{r}_{i+1})}\right) \Delta S_i^2 ||\bar{k}||_i. \qquad (8)$$

При выборе шага ΔS_i, обеспечивающего заданную точность ε интерполяции кривой сплайном, можно воспользоваться одной из оценок погрешности (2),(3),(8), если имеется возможность достаточно точно оценивать значение производной, присутствующей в правой части соответствующей оценки. В условиях рассматриваемой задачи получение строгой оценки кривизны на любом отрезке кривой является весьма трудоемкой процедурой. Более эффективным оказался подход, изложенный в [1]. Он основывается на следующем утверждении.

Пусть $\overline{V}(S)$ интерполирует $\bar{r}(S)$ на сетке Δ отрезка [a,b]. Если в узлах сетки Δ^* такой, что

$$\Delta S_j^* \le \sqrt{\frac{3(\varepsilon - \varepsilon_1)}{||\bar{r}''||_j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, m-1, \ \varepsilon_1 < \varepsilon, \qquad (9)$$

выполняется соотношение $|\bar{r}(S_j^*) - \overline{V}(S_j^*)| \le \varepsilon_1$, то $|\bar{r}(S) - \overline{V}(S)| \le \varepsilon$ всюду на [a,b].

Особенность этого подхода состоит в том, что точность оценки $||\bar{r}''||_j$ влияет только на количество контрольных точек m и практически не сказывается на числе узлов результирующей сетки Δ.

Первый шаг в построении приближающего сплайна — расчет множества контрольных точек исходной кривой таких, чтобы расстояния между соседними точками по длине дуги удовлетворяли условию (9). Это условие эквивалентно тому, что сплайн первой степени, интерполирующий контрольные точки кривой, приближает саму кривую $\bar{r}(S)$ с точностью $\frac{3}{8}(\varepsilon - \varepsilon_1)$ [2]. Приемы решения подобной задачи известны (см., например, [4]) и мы не будем на них останавливаться.

Итак, пусть $\{\bar{r}_j, \bar{r}_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, последовательность контрольных точек, упорядоченных в направлении обхода исходной кривой. Для построения приближающего параметрического сплайна им надо поставить в соответствие значения некоторого параметра. С этой целью построоим квазиестественный сплайн, интерполирующий контрольные точки, и сетку его параметра примем в качестве сетки Δ^* контрольного разбиения кривой. Как было показано выше, это довольно хорошее приближение ее естественного параметра. Теперь для выбора узлов сетки Δ на множестве узлов сетки Δ^* достаточно применить простой алгоритм, изложенный в [1,с.26–28].

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии. - М.: Машиностроение, 1985. - 224 с.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

3. СКОРОСПЕЛОВ В.А. Кубическая сплайн-интерполяция как средство приближения пространственных кривых//Методы сплайн-функций. - Новосибирск, 1978. - Вып.75: Вычислительные системы. - С.36–44.

4. ФОКС А., ПРАТТ М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. - М.: Мир, 1982. - 304 с.

Поступила в редакцию
10 декабря 1996 года