СПЛАЙН-ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
(Вычислительные системы)
1997 год Выпуск 159

УДК 681.3.06:519.65

О РАСЧЕТЕ ТРАЕКТОРИИ ИНСТРУМЕНТА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ДВУХ КРИВЫХ

В.А.Скороспелов, П.А.Турук

Основная проблема, с которой сталкиваются технологи при использовании станков с ЧПУ, это расчет управляющих программ. Эффективное решение ее возможно только с помощью ЭВМ, оснащенной достаточно мощным специализированным программным обеспечением. Обычно расчет управляющей программы реализуется в два этапа. На первом этапе рассчитывается траектория перемещения режущего инструмента, обеспечивающая воспроизведение поверхности детали. При этом выбор геометрических параметров инструмента и схемы обработки осуществляет технолог, а программное обеспечение реализует заданные схемы обработки конкретной детали в виде траектории инструмента. На втором этапе траектория инструмента преобразуется в команды, осуществляющие соответствующие перемещения рабочих органов станка. Набор схем обработки, поддерживаемый программным обеспечением, во многом определяет эффективность программного оснащения и, в конечном счете, эффективность станков с ЧПУ. Особенно это касается станков, кинематическая схема которых имеет более трех программно-управляемых элементов.

В настоящей статье рассматриваются несколько вариантов схемы обработки, при которых инструмент перемещается вдоль двух кривых, лежащих на обрабатываемой поверхности, соприкасаясь с ними в каждый момент времени. Эта схема привлекает технолога своей производительностью, но не обеспечивает в общем случае заданной точности обработки. Поэтому при реализации этой схемы необходимо вычислять погрешность обработки, а иногда требуется рассчитать воспроизводимую поверхность.

В дальнейшем будем предполагать, что инструмент имеет форму кругового конуса с углом полураствора α (см. рисунок). Положение конуса в пространстве определим положением двух точек $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ его оси Q.

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$, — некоторая параметризация обрабатываемой поверхности P. Рассмотрим две гладкие непересекающиеся кривые $\bar{r} = \bar{r}_1(s)$ и $\bar{r} = \bar{r}_2(s)$, $s \in [0, 1]$, лежащие на поверхности P. Пусть $\bar{r}_1$, $\bar{\tau}_1$, $\bar{n}_1$ — некоторая точка, касательный вектор к кривой $\bar{r}_1(s)$ и нормаль к поверхности P в точке $\bar{r}_1$ соответственно, а $\bar{r}_2$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{n}_2$ — такие же величины на второй кривой. Найдем положение инструмента, при котором его поверхность в этих двух точках соприкасается с кривыми $\bar{r}_1(s)$ и $\bar{r}_2(s)$. При этом потребуем, чтобы в точке $\bar{r}_1$ радиус сечения конуса, нормального к его оси, равнялся заданной величине ρ_0 (см. рисунок).

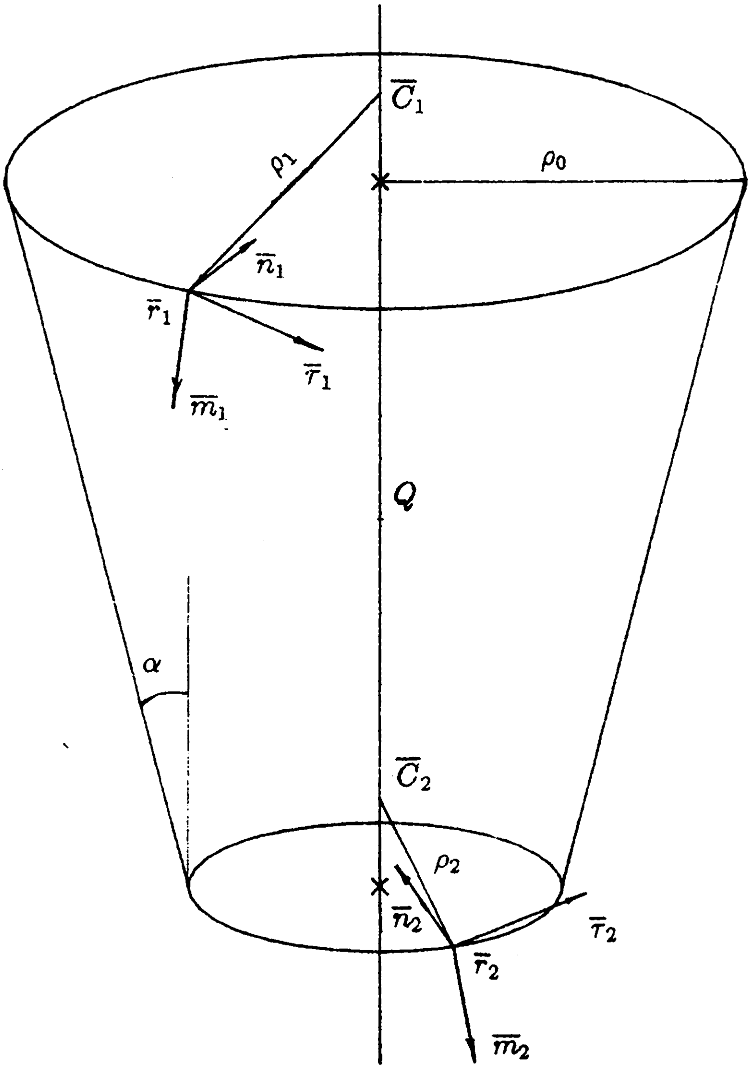
Введем дополнительно векторы: $\bar{m}_1 = \bar{\tau}_1 \times \bar{n}_1$ и $\bar{m}_2 = \bar{\tau}_2 \times \bar{n}_2$. Здесь и далее используются обозначения:

$\bar{a} \times \bar{b}$ — векторное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$;

$(\bar{a}, \bar{b})$ — скалярное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$;

$< \bar{a} > = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ — операция нормировки вектора $\bar{a}$.

Потребуем, чтобы точки $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ лежали на нормалях к поверхности конуса в точках $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. В таком случае они определяются соотношениями: $\overline{C}_1 = \bar{r}_1 + \overline{A}\rho_1$, $\overline{C}_2 = \bar{r}_2 + \overline{B}\rho_2$, где $\rho_1 = \dfrac{\rho_0}{\cos\alpha}$, ρ_2 — пока неизвестная величина, имеющая тот же смысл, что и величина ρ_1. Векторы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — орты нормалей к поверхности конуса в точках $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ — можно представить в виде разложения относи-



Положение конического инструмента, касающегося двух кривых в точках $\overline{r}_1$, и $\overline{r}_2$.

Рис.1

тельно векторов $\bar{n}_1, \bar{m}_1$ и $\bar{n}_2, \bar{m}_2$ соответственно:

$$\bar{A} = \sin\varphi\ \bar{m}_1 + \cos\varphi\ \bar{n}_1,$$

$$\bar{B} = \sin\psi\ \bar{m}_2 + \cos\psi\ \bar{n}_2.$$

Тогда $\bar{q} = < \bar{C}_2 - \bar{C}_1 >$ — вектор оси инструмента. Поскольку точки $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ принадлежат поверхности заданного конуса, то имеют место следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} (\bar{A}, \bar{q}) &= -\sin\alpha, \\ (\bar{B}, \bar{q}) &= -\sin\alpha, \\ \rho_1 &= \rho_2 + |\bar{C}_2 - \bar{C}_1| \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти три условия связывают неизвестные величины φ, ψ, ρ_2. В данной статье мы не будем останавливаться на способах решения системы (1). Заметим лишь, что решение ее существует и не единственно. Нужное решение выделяется заданием обрабатываемой стороны поверхности и ориентацией оси конуса.

Задав соответствие между точками исходных кривых путем выбора подходящих параметризаций $\bar{r}_1(s), \bar{r}_2(s)$, $s \in [0, 1]$, и значение ρ_0, получаем на основании уравнений (1) траекторию движения инструмента в виде траектории двух точек его оси — $\bar{C}_1(s)$ и $\bar{C}_2(s)$. Сама ось движущегося инструмента образует линейчатую поверхность $\bar{Q}(t, s) = \bar{C}_1(s)(1 - t) + \bar{C}_2(s)t$, $t \in [0, 1]$. Теперь поверхность конуса для произвольного значения параметра s можно записать в виде

$$\bar{R}(t, s, \gamma) = \bar{Q}(t, s) + \rho(t)(\bar{G}(t, s)\cos\gamma + \bar{H}(t, s)\sin\gamma), \qquad (2)$$

где $\rho(t) = \dfrac{\rho_0}{\cos^2\alpha} - t \cdot |\bar{C}_2 - \bar{C}_1| \mathrm{tg}\alpha$, $\bar{G}$ — единичный вектор, ортогональный оси $\bar{q}$, $\bar{H} = \bar{G} \times \bar{q}$, $\gamma \in [0, 2\pi]$. Поверхность F, восприизводимая при таком перемещении инструмента, является огибающей семейства поверхностей (2), зависящих от параметра s. Согласно определению огибающей [1], поверхность F состоит из тех точек семейства $\bar{R}(t, s, \gamma)$, которые удовлетворяют уравнению

$$(\bar{R}_s(t, s, \gamma), \bar{n}(t, s, \gamma)) = 0, \qquad (3)$$

где $\overline{R}_s = \dfrac{\partial}{\partial s}\overline{R}(t,s,\gamma)$, $\overline{n}(t,s,\gamma) = (\overline{G}(t,s)\cos\gamma+\overline{H}(t,s)\sin\gamma)\cos\alpha+$ $+\overline{q}(s)\sin\alpha$ — нормаль к поверхности конуса.

Равенство (3) связывает угловой параметр поверхности конуса γ с параметрами t и s. Для фиксированного значения s из (2) определяется кривая, вдоль которой соответствующая этому значению поверхность конуса соприкасается с огибающей. Поверхность F можно представить с заданной точностью бикубическим параметрическим сплайном, используя известные методы [2,3].

Поверхности P и F совпадают по крайней мере вдоль кривых $\overline{r}_1(s)$ и $\overline{r}_2(s)$. В качестве погрешности $\delta(t,s)$ приближения поверхности P поверхностью F в точке (t^*,s^*) можно принять расстояние точки $\overline{R}^* = \overline{R}(t^*,s^*,\gamma^*)$ до поверхности P. Соответствующая точка поверхности P $\overline{r}^* = \overline{r}(u^*,v^*)$ определяется из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}(\overline{r}(u,v)-\overline{R}^*,\ \overline{r}_u(u,v)) = 0,\\ (\overline{r}(u,v)-\overline{R}^*,\ \overline{r}_v(u,v)) = 0.\end{aligned}\right\}$$

Тогда $\delta^* = \delta(t^*,s^*) = |\overline{r}^* - \overline{R}^*|$.

Управляющая программа представляет собой последовательность узлов кусочно-линейной интерполяции траектории оси инструмента с заданной точностью ε. Задача состоит в выборе такой сетки Δ_s : $0 = s_1 < s_2 \le s_3 < \cdots < s_n = 1$, на которой обе кривые $\overline{C}_1(s)$ и $\overline{C}_2(s)$ интерполируются линейными сплайнами $\overline{L}_1(s)$ и $\overline{L}_2(s)$ с точностью ε. Действительно, если траекторию инструмента, определяемую кривыми $\overline{L}_1(s)$ и $\overline{L}_2(s)$ представить в виде $\overline{L}(t,s) = \overline{L}_1(s)(1-t)+\overline{L}_2(s)t$, то $|\overline{Q}(t,s)-\overline{L}(t,s)| = |\overline{C}_1(s)(1-t)+\overline{C}_2(s)t-\overline{L}_1(s)(1-t)-\overline{L}_2(s)t| \le$ $\le |\overline{C}_1(s)-\overline{L}_1(s)|(1-t)+|\overline{C}_2(s)-\overline{L}_2(s)|t \le \varepsilon$.

Таким образом, общая погрешность обработки d складывается из погрешности d_ε, обусловленной кусочно-линейным приближением траектории инструмента, и погрешности δ приближения обрабатываемой поверхности P поверхностью F. Составляющая d_ε может быть сделана как угодно малой за счет выбора сетки Δ_s. Величина δ зависит от расстояния $|\bar{r}_2(s) - \bar{r}_1(s)|$ и геометрических параметров инструмента.

В рассмотренном выше варианте расчета траектории инструмента соответствие между точками исходных кривых $\bar{r}_1(s)$ и $\bar{r}_2(s)$ предполагалось заданным. Если нет никаких дополнительных условий, то естественно каждой точке кривой $\bar{r}_1(s)$ поставить в соответствие ближайшую точку кривой $\bar{r}_2(s)$. Однако за счет соответствия между точками этих кривых можно обеспечить выполнение некоторых дополнительных, важных с практической точки зрения условий, накладываемых на траекторию инструмента. А именно, потребуем, чтобы в процессе обработки ось инструмента $\bar{q}$ оставалась параллельной заданной плоскости с нормалью $\overline{N}$. Для этого добавим к системе (1) уравнение $(\bar{q}, \overline{N}) = 0$, а в число неизвестных величин включим переменную $\tilde{s}$ — параметр точки $\bar{r}_2$ на кривой $\bar{r}_2(\tilde{s})$. Это условие позволяет для воспроизведения траектории инструмента кинематическими органами станка обойтись четырьмя степенями свободы, а не пятью, как в общем случае. Следует заметить при этом, что система (1) совместна не для всех произвольных $\overline{N}$. Однако для случаев, имеющих практический интерес, решение системы существует.

Еще один способ установки инструмента относительно детали состоит в следующем. Потребуем, чтобы в точках кривой $\bar{r}_1(s)$ поверхность инструмента соприкасалась с поверхностью $\bar{r}(u, v)$. Для поверхности общего вида такая схема обработки, вообще говоря, невыполнима. Однако в случае, когда $\bar{r}(u, v)$ есть линейчатая поверхность и $\bar{r}_1(s)$, $\bar{r}_2(s)$ — ее направляющие, такая схема перемещения инструмента вполне возможна. В этом случае в системе (1) следует положить $\varphi = 0$, а к числу неизвестных ψ, ρ_2 добавить переменную s.

Изложенная методика применялась при расчете управляющих программ для обработки на станках с ЧПУ моноколес и вентиляторных лопаток — основных конструктивных деталей авиационного двигателя. Лопатки моноколеса задаются, как правило, в виде неразвертывающейся линейчатой поверхности. Для их обработки был использован последний из рассмотренных вариантов предложенной схемы. Вентиляторные лопатки обрабатывались полосами шлифовальным кругом конической формы. Размер полосы и соответствующая длина образующей инструмента рассчитывались для заданной точности обработки. В этом случае применялись первые два варианта рассмотренной схемы. В качестве кривых $\bar{r}_1(s)$ и $\bar{r}_2(s)$, ограничивающих полосу одного прохода, использовались координатные линии поверхности лопатки.

Литература

1. ЗАЛГАЛЛЕР В.А. Теория огибающих. - М.: Наука, 1975. — 104 с.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. — 352 с.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии. — М.: Машиностроение, 1985. — 224 с.

Поступила в редакцию
24 января 1997 года