ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И ЭКСПЕРТНЫЕ СИСТЕМЫ

(Вычислительные системы)

1997 год Выпуск 160

УДК 621.396.019.3:519.217

ТЕХНОЛОГИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ю.А.Устюгов

Введение

Типичными представителями современных сложных технических систем являются вычислительные системы и комплексы, автоматизированные системы управления и обработки информации, системы передачи данных и отображения информации, системы вооружения и военной техники.

Сложным техническим системам присущи [1,2]:

- многорежимность, многоканальность, многофункциональность, многофазность обслуживания;
- наличие аппаратурной, временной и функциональной избыточности;
- адаптивность;
- ограниченная надежность и восстанавливаемость аппаратуры (случайное время исправной работы и случайное время восстановления);
- случайность нагрузки и времени обслуживания требований, времени начала и длительности работ технического обслуживания систем.

Процесс функционирования технических систем носит явно выраженный сложный вероятностный характер.

Оценка эффективности функционирования сложных технических систем (далее — ТС) с учетом всего множества перечисленных выше черт и факторов реального функционирования с применением современных математических аппаратов — актуальная научно-техническая задача.

В статье излагается технология определения аналитическим путем эффективности функционирования ТС с помощью аппарата полумарковских процессов (ПМП) при максимально общих исходных данных. Реализованный подход носит универсальный характер и применим при исследовании как эффективности, так и надежности функционирования ТС любого назначения и при любой степени декомпозиции систем на отдельные компоненты.

1. Основные положения технологии

Изложенная в [3] *технология автоматизированного обоснования перспектив развития ТС* включает выполнение ряда *взаимосвязанных процедур* исследования:

- прогнозирование развития ТС на длительную перспективу [4],

- планирование развития ТС на длительную перспективу с учетом результатов прогнозирования [5],

- экспресс-оценка вариантов построения ТС из полученного в ходе планирования и прогнозирования развития ТС приоритетного ряда образцов [6].

Неотъемлемой компонентой всех процедур прогнозирования, планирования, обоснования развития ТС и экспресс-оценки вариантов их построения является *процедура оценки эффективности функционирования ТС в выбранной предметной области.*

В *методологическом плане* для процедуры оценки эффективности функционирования ТС *основными этапами технологии* являются [3]:

1. Формирование множества целей исследования $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_\Omega\}$.

2. Выбор множества $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_\Psi\}$ мер эффективности функционирования ТС.

3. Выбор множества $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_B\}$ ограничений, условий и требований (далее-ограничений), при которых проводится оценка и исследование значений множества мер Y.

4. Выбор множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_\Phi\}$ неварьируемых характеристик ТС.

5. Выбор множества $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_\Delta\}$ варьируемых характеристик ТС.

6. Задание значений S ограничений множества Z.

7. Задание значений H характеристик множества X.

8. Выбор диапазонов изменения и задание множества значений для L характеристик множества V.

9. Формирование множества экспериментов $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_M\}$ и планирование M экспериментов.

10. Реализация плана проведения M экспериментов и формирование множества результатов $\bigcup\limits_{d \in D} Y_d$.

11. Определение значений множества мер эффективности функционирования ТС Y на множестве результатов $\bigcup\limits_{d \in D} Y_d$.

12. Совместный анализ множеств X, V, Z, J и Y.

13. Формулировка выводов из исследования эффективности функционирования ТС.

Ключевым для выполнения всех этапов технологии оценки эффективности ТС является синтез аналитической модели ее функционирования с помощью аппарата полумарковских процессов. *Синтез математической модели включает последовательное выполнение следующих основных процедур.*

1. Математическая постановка задачи:

- описание процесса функционирования ТС,
- формализация исходных данных,
- выбор мер эффективности функционирования ТС.

(В ходе выполнения данной процедуры определяются множества J, Y, Z, X, V.)

2. Разработка математической модели функционирования системы:

– определение множества состояний системы E, подмножества состояний нормального функционирования E_+, подмножества отказовых состояний E_-;

– построение графа состояний полумарковского процесса $\xi(t)$, описывающего процесс функционирования анализируемой системы;

– определение через множество исходных данных Y, Z, X, V вектора функций распределения $F(t)$ случайного времени пребывания системы (полумарковского процесса $\xi(t)$) в различных состояниях множества E.

3. Определение основных характеристик разработанной математической модели:

– среднего времени $\overline{\zeta_i}$ пребывания полумарковского процесса $\xi(t)$ в состоянии $i \in E_+$;

– стационарных вероятностей p_{ij} переходов полумарковского процесса $\xi(t)$ во множестве состояний E_+, $i \in E_+$, $j \in E$;

– переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ в форме преобразования Лапласа-Стильтьеса $P_{ij}(s)$, $i \in E_+$, $j \in E$.

4. Вывод аналитических выражений для определения выбранных в соответствии с множеством целей исследования J множества Y мер эффективности функционирования ТС, например:

– среднего значения $\overline{\tau_{i_*}}$ случайной величины τ_{i_*} времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний E_+, начиная с состояния $i_* \in E_+$;

– функции распределения $T_{i_*}(t)$ случайной величины τ_{i_*} в форме преобразования Лапласа-Стильтьеса $T_{i_*}(s)$.

5. Перевод полученных результатов аналитических исследований из области изображений в область оригиналов (например, $T_{i_*}(s) \to T_{i_*}(t)$, $i_* \in E_+$).

В пп.2–5 статьи для раскрытия содержания и иллюстрации возможностей разработанной технологии проведен синтез аналитических моделей для определения и исследования эффективности функционирования широкого класса ТС. К анализируемому классу систем относятся многорежимные одноканальные восстанавливаемые системы обслуживания с ограниченным временем ожидания и различными типами временной избыточности. Существенным для рассматриваемых ТС является наличие случайной нагрузки, случайного времени начала и случайной длительности работ технического обслуживания.

В силу случайного характера влияния факторов и особенностей реального функционирования на окончательные результаты работы ТС в качестве меры эффективности функционирования систем выбрана вероятностная мера выполнения предписанного системе алгоритма с требуемым качеством в заданное время.

При конкретном применении разработанной технологии в зависимости от особенностей алгоритмов работы ТС и выбранных критериев эффективности мера эффективности может выражаться по-разному: вероятность решения системой случайно выбранной задачи из комплекса решаемых системой задач с требуемым качеством, вероятность качественного обслуживания информационных потоков, циркулирующих в выбранных подсистемах или системе в целом и другие.

Считается, что в системе возникает *функциональный отказ* при отказе системы в обслуживании поступающего требования или его неполном обслуживании. *В качестве меры эффективности рассматриваемого класса систем выбрано время нормальной работы ТС до функционального отказа,* которое всегда является случайной величиной.

С помощью аппарата полумарковских процессов [7] в общем виде получены выражения для определения через совокупность исходных данных среднего значения и функции распределения в форме преобразования Лапласа-Стильтьеса случайной величины — времени нормальной работы рассматриваемого класса систем до функционального отказа.

Если в соответствии с множеством целей исследования J выбранные меры эффективности функционирования ТС суть моментные характеристики случайной величины τ_{i_*}, $i_* \in E_+$, то в этом случае синтез искомых аналитических моделей заканчивается на сформулированной выше процедуре 4. Это объясняется тем, что в данных исследованиях аналитические выражения для определения выбранных мер эффективности множества Y непосредственно представлены в области оригиналов. В связи с этим выполнять процедуру 5 ($T_{i_*}(s) \to T_{i_*}(t)$, $i_* \in E_+$) нет необходимости.

Во всех остальных случаях необходимо получение аналитических выражений для определения не только моментных характеристик, но и функции распределения $T_{i_*}(t)$ случайной величины τ_{i_*}, $i_* \in E_+$.

Особенностью исследования эффективности функционирования ТС с помощью аппарата полумарковских процессов является то, что функция распределения $T_{i_*}(t)$ искомой случайной величины τ_{i_*}, $i_* \in E_+$, всегда представляется в области изображений, т.е. в форме преобразования Лапласа-Стильтьеса $T_{i_*}(s)$. Перевод из области изображений $T_{i_*}(s)$ в область оригиналов T_{i_*} традиционными способами затруднен (все зависит от свойств функции $T_{i_*}(t)$). В связи с этим поиск эффективных моделей перевода $T_{i_*}(s) \to T_{i_*}(t)$, $i_* \in E_+$, представляет самостоятельный научный интерес.

В статье *изложен новый метод* [8] *перевода* $T_{i_*}(s) \to$ $\to T_{i_*}(t)$, $i_* \in E_+$. Условия применения метода: известны моментные характеристики $T_{i_*}^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, искомого оригинала $T_{i_*}(t)$, он конечен в функциональном пространстве, а функция распределения $T_{i_*}(t)$ гомоморфна в единичном круге.

Проверка правильности полученных с помощью разработанной технологии результатов, в частности, осуществлялась путем их сравнения с известными в литературе результатами (например, [9-15]), найденными при более частных постановках и в большинстве случаев другими методами. Результаты сравнения положительны [1].

2. Математическая постановка задачи

Многорежимная (K режимов) одноканальная система обслуживает N_1 простейших потоков требований. Стационарная вероятность появления в произвольный момент времени требования n-го потока, $n \in N_1$, с интенсивностью λ_{1n} равна q_{1n}. Промежуток времени между последовательными поступлениями требований η_1 в i-м режиме — случайная величина с функцией распределения

$$F_1(t) = 1 - \exp\left\{ -t \left(\sum_{n=1}^{N_1} \frac{q_{1n}}{\lambda_{1n}} \right)^{-1} \right\}, \quad \sum_{n=1}^{N_1} q_{1n} = 1; \qquad (1)$$

$$F_1(t) = F_{1i}(t), \quad i = \overline{1, K}.$$

Обслуживающий орган в i-м режиме функционирования системы имеет переменную (регулируемую) производительность (всего N_{2i} уровней). Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени обслуживание осуществляется с интенсивностью λ_{2in}, равна q_{2in}, $i \in K$, $n \in N_{2i}$. В i-м режиме время обслуживания η_{2i} — случайная величина с функцией распределения

$$F_{2i}(t) = 1 - \exp\left\{ -t \left(\sum_{n=1}^{N_{2i}} \frac{q_{2in}}{\lambda_{2in}} \right)^{-1} \right\}, \quad \sum_{n=1}^{N_{2i}} q_{2in} = 1; \qquad (2)$$

$$i = \overline{1, K}.$$

В i-м режиме, $i \in K$, система состоит из N_{3i} разнотипных элементов. Моменты возникновения отказов элементов системы во времени образуют N_{3i} простейших потоков. Стационарная вероятность появления в произвольный момент времени отказа n-го потока, $n \in N_{3i}$, с интенсивностью λ_{3in} равна q_{3in}, $i \in K$, $n \in N_{3i}$. Промежуток времени η_{3i} безотказной работы системы в i-м режиме — случайная величина с функцией распределения

$$F_{3i}(t) = 1 - \exp\left\{ -t \left(\sum_{n=1}^{N_{3i}} \frac{q_{3in}}{\lambda_{3in}} \right)^{-1} \right\}, \quad \sum_{n=1}^{N_{3i}} q_{3in} = 1; \quad (3)$$

$$i = \overline{1, K}.$$

Восстанавливающий орган в i-м режиме, $i \in K$, функционирования системы имеет переменную (регулируемую) производительность (всего N_{4i} уровней). Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени восстановление в системе осуществляется с интенсивностью λ_{4in}, равна q_{4in}, $i \in K$, $n \in N_{4i}$. В i-м режиме время восстановления системы η_{4i} — случайная величина с функцией распределения

$$F_{4i}(t) = 1 - \exp\left\{ -t \left(\sum_{n=1}^{N_{4i}} \frac{q_{4in}}{\lambda_{4in}} \right)^{-1} \right\}, \quad \sum_{n=1}^{N_{4i}} q_{4in} = 1; \quad (4)$$

$$i = \overline{1, K}.$$

В i-м режиме, $i \in K$, проводится N_{5i} различных работ, связанных с техническим обслуживанием системы (далее — ТОС). Моменты начала проведения работ ТОС во времени образуют N_{5i} простейших потоков. Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени начинается работа ТОС n-го потока, $n \in N_{5i}$, с интенсивностью λ_{5in}, равна q_{5in}, $i \in K$, $n \in N_{5i}$. Промежуток времени η_{5in} между моментами начала двух последующих работ ТОС — случайная величина с функцией распределения

$$F_{5i}(t) = 1 - \exp\left\{ -t \left(\sum_{n=1}^{N_{5i}} \frac{q_{5in}}{\lambda_{5in}} \right)^{-1} \right\}, \quad \sum_{n=1}^{N_{5i}} q_{5in} = 1; \quad (5)$$

$$i = \overline{1, K}.$$

Орган технического обслуживания в i-м режиме, $i \in K$, функционирования системы имеет переменную (регулируемую) производительность (всего N_{6i} уровней).

Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени техническое обслуживание системы осуществляется с интенсивностью λ_{6in}, равна q_{6in}, $i \in K$, $n \in N_{6i}$. В i-м режиме продолжительность работы ТОС η_{6i} — случайная величина с функцией распределения

$$F_{6i}(t) = 1 - \exp\left\{ -t \left(\sum_{n=1}^{N_{6i}} \frac{q_{6in}}{\lambda_{6in}} \right)^{-1} \right\}, \quad \sum_{n=1}^{N_{6i}} q_{6in} = 1; \qquad (6)$$

$$i = \overline{1, K}.$$

Существует N_{7i}, $i \in K$, стратегий использования системы в K режимах. Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени система используется в i-м режиме с интенсивностью λ_{7in}, равна q_{7in}, $i \in K$, $n \in N_{7i}$. Время работы системы в i-м режиме η_{7i} — случайная величина с функцией распределения

$$F_{7i}(t) = 1 - \exp\left\{ -t \left(\sum_{n=1}^{N_{7i}} \frac{q_{7in}}{\lambda_{7in}} \right)^{-1} \right\}, \quad \sum_{n=1}^{N_{7i}} q_{7in} = 1; \qquad (7)$$

$$i = \overline{1, K}.$$

Смена режимов функционирования системы возможна лишь в моменты времени, когда система работоспособна и требований на обслуживание нет. Переходы из i-го режима в j-й, $i \neq j$, $i = \overline{1, K}$, $j = \overline{1, K}$, образуют цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$R = (r_{ij})_{K,K}, \quad r_{ij} = 0 \text{ при } i = j = \overline{1, K}. \qquad (8)$$

Вероятность перехода r_{ij}, $i \neq j$, $i = \overline{1, K}$, $j = \overline{1, K}$ не зависит от того, в каких режимах использовалась система до времени перехода из i-го состояния в j-е состояние и от длительности использования системы в i-м режиме.

Если при проведении работы ТОС в i-м режиме в системе нет требований на обслуживание и в нее поступает требование, то пришедшее требование будет ожидать завершения проведения работы ТОС. Предусматривается N_{8i} стратегий ожидания требованием окончания проводимой работы ТОС — начала обслуживания поступившего требования. Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени выбирается n-я, $n \in N_{8i}$, стратегия ожидания, при которой допустимое время ожидания η_{8in} — случайная величина с произвольной функцией распределения $F_{8in}(t) = P\{\eta_{8in} \leq t\}$, равна q_{8in}, $i \in K$, $n \in N_{8i}$. Допустимое время ожидания требованием начала обслуживания в этой ситуации η_{8i} — случайная величина с произвольной функцией распределения

$$F_{8i}(t) = \sum_{n=1}^{N_{8i}} q_{8in} F_{8in}(t), \quad \sum_{n=1}^{N_{8i}} q_{8in} = 1; \quad i = \overline{1, K}. \tag{9}$$

Если время, необходимое на завершение работы ТОС $\Delta\eta_{8i}$, превысит допустимое время ожидания η_{8i} (см. формулу (9)), т.е. $\eta_{8i} < \Delta\eta_{8i}$, то в системе наступает функциональный отказ — требование уходит из системы необслуженным.

Если проведение работы ТОС в i-м режиме, $i \in K$, прерывает уже начатое обслуживание требования, то недообслуженное требование будет ожидать завершения работы ТОС. Предусматривается N_{9i} стратегий ожидания требованием окончания работы ТОС — начала дообслуживания требования. Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени выбирается n-я, $n \in N_{9i}$, стратегия ожидания, при которой допустимое время ожидания η_{9in} — случайная величина с произвольной функцией распределения — $F_{9in}(t) = P\{\eta_{9in} \leq t\}$, равна q_{9in}, $i \in K$, $n \in N_{9i}$. Допустимое время ожидания требованием начала дообслуживания в этой ситуации η_{9i} — случайная величина с произвольной функцией распределения

$$F_{9i}(t) = \sum_{n=1}^{N_{9i}} q_{9in} F_{9in}(t), \quad \sum_{n=1}^{N_{9i}} q_{9in} = 1; \quad i = \overline{1, K}. \tag{10}$$

Если время, необходимое для проведения работы ТОС η_{6i} (6), превысит допустимое время ожидания η_{9i}, т.е. $\eta_{9i} < \eta_{6i}$, $i \in K$, то в системе наступает функциональный отказ — требование уходит из системы недообслуженным.

Если при поступлении в систему в i-м режиме, $i \in K$, нового требования в ней осуществляется обслуживание предыдущего требования, то поступившее требование будет ожидать завершения обслуживания предыдущего требования. Предусматривается N_{10i} стратегий ожидания пришедшим требованием завершения обслуживания предыдущего требования — начала обслуживания поступившего требования. Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени выбирается n-я, $n \in N_{10i}$, стратегия ожидания, при которой допустимое время ожидания η_{10i} — случайная величина с произвольной функцией распределения $F_{10in}(t) = P\{\eta_{10in} \le t\}$, равна q_{10in}, $i \in K$, $n \in N_{10i}$. Допустимое время ожидания поступившим требованием начала обслуживания в этой ситуации η_{10i} — случайная величина с произвольной функцией распределения

$$F_{10i}(t) = \sum_{n=1}^{N_{10i}} q_{10in} F_{10in}(t), \quad \sum_{n=1}^{N_{10i}} q_{10in} = 1; \quad i = \overline{1,K}. \tag{11}$$

Если время, необходимое на завершение обслуживания предыдущего требования $\Delta\eta_{2i}$ превысит допустимое время ожидания η_{10i} (11), т.е. $\eta_{10i} < \Delta\eta_{2i}$, $i \in K$, то в системе наступает функциональный отказ — требование уходит из системы недообслуженным.

Если при обслуживании требования в i-м режиме, $i \in K$, наступает аппаратурный отказ системы, то обслуживание прерывается, начинается восстановление системы и недообслуженное требование будет ожидать завершения устранения аппаратурного отказа. Предусматривается N_{11i} стратегий ожидания требованием конца восстановления системы — начала дообслуживания требования. Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени выбирается n-я, $n \in N_{11i}$, стратегия ожидания, при которой допустимое время ожидания η_{11in} — случайная величина с произвольной функцией распределения — $F_{11in}(t) = P\{\eta_{11in} \le t\}$, равна q_{11in}, $i \in K$, $n \in N_{11i}$. Допустимое время ожидания требованием начала дообслуживания в рассматриваемой ситуации η_{11in} — случайная величина с произвольной функцией распределения

$$F_{11i}(t) = \sum_{n=1}^{N_{11i}} q_{11in} F_{11in}(t), \quad \sum_{n=1}^{N_{11i}} q_{11in} = 1; \quad i = \overline{1,K}. \qquad (12)$$

Если время восстановления η_{4i} (4) превысит допустимое время ожидания η_{11i} (12), т.е. $\eta_{11i} < \eta_{4i}$, $i \in K$, то в системе наступает функциональный отказ — требование уходит из системы недообслуженным.

Если при восстановлении системы в i-м режиме, $i \in K$, требований на обслуживании нет и в систему поступает требование, то поступившее требование будет ожидать завершения восстановления системы. Предусматривается N_{12i} стратегий ожидания. Стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени выбирается n-я, $n \in N_{12i}$, стратегия ожидания, при которой допустимое время ожидания η_{12in} — случайная величина с произвольной функцией распределения $F_{12in}(t) = P\{\eta_{12in} \le t\}$, равна q_{12in}, $i \in K$, $n \in N_{12i}$. Допустимое время ожидания требованием начала обслуживания в рассматриваемой ситуации η_{12i} — случайная величина с произвольной функцией распределения

$$F_{12i}(t) = \sum_{n=1}^{N_{12i}} q_{12in} F_{12in}(t), \quad \sum_{n=1}^{N_{12i}} q_{12in} = 1; \quad i = \overline{1,K}. \qquad (13)$$

Если время, необходимое для завершения восстановления системы $\Delta\eta_{2i}$, превысит допустимое время ожидания η_{12i} (13), т.е. $\eta_{12i} < \Delta\eta_{2i}$, $i \in K$, то в системе наступает функциональный отказ — поступившее требование уходит из системы необслуженным.

Если поступившее требование застает в системе, функционирующей в i–м режиме, $i \in K$, предыдущее требование, ожидающее начала обслуживания или дообслуживания, то в этой ситуации в системе наступает функциональный отказ — поступившее требование немедленно (без ожидания) уходит из системы необслуженным.

Полагаем, что

$$\int_0^\infty [1 - F_{hin}(t)]dt < \infty, \quad n = \overline{1, N_{hi}}, \quad h = \overline{1, 12}, \quad i = \overline{1, K}. \quad (14)$$

Необходимо построить математическую модель функционирования описанной выше сложной технической системы и получить с помощью ее аналитические выражения для определения (при $\Psi = 2$):

- среднего значения $\bar{\tau}_i$ случайной величины τ_i времени пребывания системы в подмножестве состояний нормального функционирования E_+, начиная с состояния $i \in E_+$;

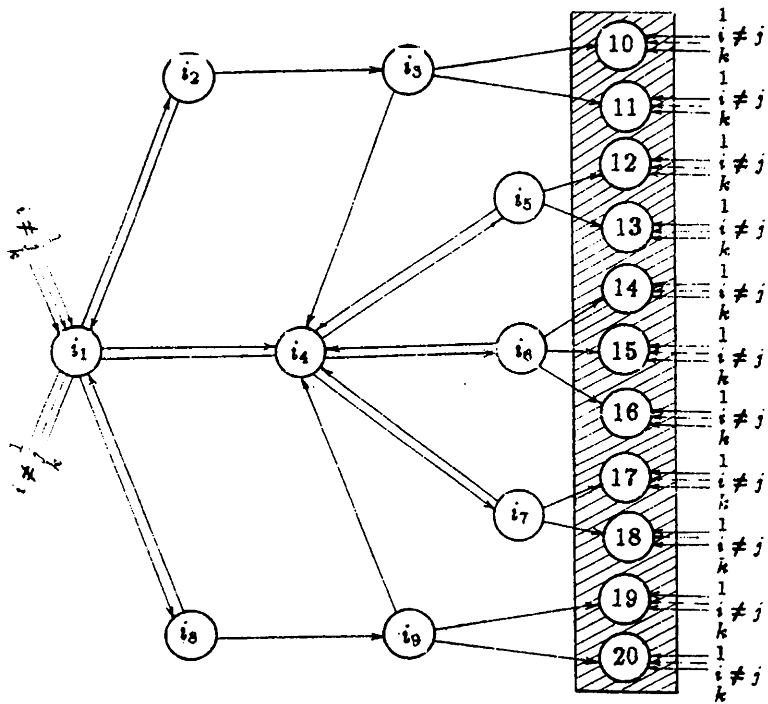
- функции распределения случайной величины τ_i в форме преобразования Лапласа-Стильтьеса $T_i(S)$, $i = \overline{1, K}$, выразив эти меры эффективности функционирования системы через исходные данные (1)–(14).

3. Математическая модель функционирования системы

Для решения задачи математического моделирования рассматриваемого класса систем используем аппарат полумарковских процессов $\xi(t)$ [7]. Анализ процесса функционирования описанной в п.1 ТС позволяет построить граф состояний полумарковского процесса $\xi(t)$, приведенный на рисунке.

Состояние i_1: система функционирует в i–м режиме, $i = \overline{1, K}$, исправна, работы ТОС не производятся, требований на обслуживание нет.

Состояние i_2: система функционирует в i–м режиме, $i = \overline{1, K}$, проводится работа ТОС, требований на обслуживание нет.



Граф состояний полумарковского процесса $\xi(t)$, описывающего процесс функционирования анализируемого класса сложных технических систем.

Состояние i_3: система функционирует в i-м режиме, $i = \overline{1,K}$, поступившее требование ожидает завершения работы ТОС — начала обслуживания. Как только время завершения ТОС $\Delta\eta_{8i}$ превысит допустимое время ожидания η_{8i} (9) или в систему поступит новое требование, то система немедленно переходит в отказовые состояния 10 и 11 соответственно.

Состояние i_4: система функционирует в i-м режиме, $i = \overline{1,K}$, исправна, работы ТОС не производятся, осуществляется обслуживание очередного требования.

Состояние i_5: система функционирует в i-м режиме, $i = \overline{1,K}$, проводится работа ТОС, требование ожидает завершения работы ТОС — начала дообслуживания. Как только время проведения работы ТОС η_{6i} (6) превысит допустимое время ожидания η_{9i} (10) или в систему поступит новое требование, то система немедленно переходит в отказовые состояния 12 и 13 соответственно.

Состояние i_6: система функционирует в i-м режиме, $i = \overline{1,K}$, исправна, работы ТОС не проводятся, осуществляется обслуживание требования, в систему поступает второе требование, оно ожидает завершения обслуживания предыдущего требования. Как только время завершения обслуживания предыдущего требования $\Delta\eta_{2i}$ превысит допустимое время ожидания η_{10i} (11) или начинается очередная работа ТОС, или, наконец, в системе возникает аппаратурный отказ, то система немедленно переходит в отказовые состояния 14 и 15 или 16 соответственно.

Состояние i_7: система функционирует в i-м режиме, $i = \overline{1,K}$, неисправна, требование ожидает окончания восстановления — начала дообслуживания. Как только время восстановления системы η_{4i} (4) превысит допустимое время ожидания η_{11i} (12) или в систему поступит очередное требование, то система немедленно переходит в отказовые состояния 17 и 18 соответственно.

Состояние i_8: система функционирует в i–м режиме, $i = \overline{1, K}$, неисправна (восстанавливается), требований на обслуживание нет.

Состояние i_9: система функционирует в i–м режиме, $i = \overline{1, K}$, неисправна, пришедшее требование ожидает завершения восстановления системы — начала обслуживания. Как только время завершения восстановления системы $\Delta\eta_{4i}$ превысит допустимое время ожидания η_{12i} (13) или в систему поступит очередное требование, то система немедленно переходит в отказовые состояния 19 и 20 соответственно.

Множество состояний E системы (см. рисунок) разбивается на два подмножества: *подмножество состояний нормального функционирования E_+ и подмножество отказовых состояний E_-*, при этом

$$\left.\begin{aligned} &E = E_+ \cup E_-, \quad E_+ \cap E_- = \emptyset, \\ &E_+ = \bigcup_{i=1}^{K} E_{i+}, \quad E_{i+} = \bigcup_{d=1}^{9} i_d, \quad E_- = \bigcup_{d=10}^{20} d. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Вектор функций распределения $F(t) = (F_{ij}(t), \quad i \neq j, \quad i = \overline{1, K}, \; j = \overline{1, K})$ случайного времени τ_{ij} пребывания системы в состоянии i перед переходом в состояние j в соответствии с формулой (14), графом состояний (см.рисунок) и

$$F_{hi}(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{ -1 \left(\sum\limits_{n=1}^{N_{hi}} \dfrac{q_{hin}}{\lambda_{hin}} \right)^{-1} \right\} \\ \qquad \text{при } h = \overline{1, 7} \text{ и } i = \overline{1, K}; \\ \sum\limits_{n=1}^{N_{hin}} q_{hin} F_{hin}(t) \qquad \text{при } h = \overline{8, 12} \end{cases} \qquad (16)$$

для $i=\overline{1,K}$ имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l}
F_{i_2 i_3}(t)=F_{i_3 11}(t)=F_{i_1 i_4}(t)=F_{i_5 13}(t)=F_{i_4 16}(t)= \\
\qquad =F_{i_8 i_9}(t)=F_{i_7 18}(t)=F_{i_9 20}(t)=F_1(t); \\
F_{i_4 i_1}(t)=F_{i_6 i_4}(t)=F_{2i}(t); \\
F_{i_6 16}(t)=F_{i_4 i_7}(t)=F_{i_1 i_8}(t)=F_{3i}(t); \\
F_{i_7 i_4}(t)=F_{i_8 i_1}(t)=F_{i_9 i_4}(t)=F_{4i}(t); \\
F_{i_1 i_2}(t)=F_{i_4 i_5}(t)=F_{i_6 15}(t)=F_{5i}(t); \\
F_{i_2 i_1}(t)=F_{i_3 i_4}(t)=F_{i_5 i_4}(t)=F_{6i}(t); \\
F_{i_1 j_1}(t)=F_{7i}(t); \\
F_{i_3 10}(t)=F_{8i}(t); \\
F_{i_5 12}(t)=F_{9i}(t); \\
F_{i_6 14}(t)=F_{10i}(t); \\
F_{i_7 17}(t)=F_{11i}(t); \\
F_{i_9 19}(t)=F_{12i}(t).
\end{array}\right\} \qquad (17)$$

Вектор $F(t)$, заданный формулой (17), и граф состояний, приведенный на рисунке, представляют собой математическую модель исследуемого класса сложных технических систем.

4. Основные характеристики разработанной математической модели

1. *Среднее время $\overline{\zeta_i}$ пребывания системы в состоянии $i \in$* $\in F_{i+}$. Решая выражения (16) и (17) в системе с выражением из [7]:

$$\overline{\zeta_1}=\int_0^\infty \prod_{j\in E_i}[1-F_{ij}(t)]dt,$$

где E_i — часть множества состояний E, связанных с состоянием i, для $i\in E_{i+}$ при

$$\lambda_{hi}=\left(\sum_{n=1}^{N_{hi}}\frac{q_{hin}}{\lambda_{hin}}\right)^{-1}, \quad h=\overline{1,7}; \quad i=\overline{1,K}, \qquad (18)$$

с учетом обозначения преобразования Лапласа

$$G_{hi\text{л}}(y) = \int\limits_0^\infty e^{-yt} G_{hi}(t)dt, \quad G_{hi}(t) = 1 - F_{hi}(t),$$

$$h = \overline{1,12}; \quad i = \overline{1,K},$$

получаем

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\zeta_{i_1}} &= [\lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1},\\
\overline{\zeta_{i_2}} &= (\lambda_1 + \lambda_{6i})^{-1},\\
\overline{\zeta_{i_3}} &= G_{8i\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
\overline{\zeta_{i_4}} &= (\lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
\overline{\zeta_{i_5}} &= G_{9i\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
\overline{\zeta_{i_6}} &= G_{10i\text{л}}(\lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
\overline{\zeta_{i_7}} &= G_{11i\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
\overline{\zeta_{i_8}} &= (\lambda_1 + \lambda_{4i})^{-1},\\
\overline{\zeta_{i_9}} &= G_{12i\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{4i}).
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

2. *Стационарная вероятность* P_{ij}, $i \neq j$, $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,K}$, *переходов во множестве состояний* E. Решая выражения (16) и (18) в системе с выражением из [7]:

$$P_{ij}(t) = \int_0^t \prod_{\substack{g \in E_i \\ g \neq i}} [1 - F_{ig}(x)] dF_{ij}(x), \quad i \in E, \quad j \in E_i \tag{20}$$

при $t = \infty$, $h = \overline{1,12}$, $i = \overline{1,K}$, с учетом обозначения преобразования Лапласа-Стильтьеса

$$F_{hi\text{лс}}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_{hi}(t), \quad sG_{hi\text{л}}(s) = 1 - F_{hi\text{лс}}(s)$$

для $i \in E$, $\quad j \in E_i$ получаем:

$$
\left.
\begin{aligned}
p_{i_1 i_2} &= \lambda_{5i}[\lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1},\\
p_{i_2 i_1} &= \lambda_{6i}(\lambda_1 + \lambda_{6i})^{-1},\\
p_{i_2 i_3} &= \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{6i})^{-1},\\
p_{i_3 10} &= F_{8i\,\text{лс}}(\lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
p_{i_3 11} &= \lambda_1 G_{8i\,\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
p_{i_3 i_4} &= \lambda_{6i} G_{8i\,\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
p_{i_1 i_4} &= \lambda_1[\lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1},\\
p_{i_4 i_1} &= \lambda_{2i}(\lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
p_{i_4 i_5} &= \lambda_{5i}(\lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
p_{i_4 i_6} &= \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
p_{i_4 i_7} &= \lambda_{3i}(\lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
p_{i_5 i_4} &= \lambda_{6i} G_{9i\,\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
p_{i_5 12} &= F_{9i\,\text{лс}}(\lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
p_{i_5 13} &= \lambda_1 G_{9i\,\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
p_{i_6 i_4} &= \lambda_{2i} G_{10i\,\text{л}}(\lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
p_{i_6 14} &= F_{10i\,\text{лс}}(\lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
p_{i_6 15} &= \lambda_{5i} G_{10i\,\text{л}}(\lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
p_{i_6 16} &= \lambda_{3i} G_{10i\,\text{л}}(\lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
p_{i_7 i_4} &= \lambda_{4i} G_{11i\,\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
p_{i_7 17} &= F_{11i\,\text{лс}}(\lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
p_{i_7 18} &= \lambda_1 G_{11i\,\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
p_{i_8 i_1} &= \lambda_{4i}(\lambda_1 + \lambda_{4i})^{-1},\\
p_{i_8 i_9} &= \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_{4i})^{-1},\\
p_{i_9 i_4} &= \lambda_{4i} G_{12i\,\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
p_{i_9 19} &= F_{12i\,\text{лс}}(\lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
p_{i_9 20} &= \lambda_1 G_{12i\,\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
p_{i_1 i_8} &= \lambda_{3i}[\lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1},\\
p_{i_1 j_1} &= r_{ij}(K-1)\lambda_{7i}[\lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (21)
$$

3. *Переходная вероятность* $P_{ij}(t)$ *в форме преобразования Лапласа-Стилтьеса* $P_{ij}(s)$, $i \neq j$, $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,K}$. Решая выражения (16) и (17) в системе с выражением (20) для $i \neq j$, $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,K}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&P_{i_1 i_2}(s) = \lambda_{5i}[s + \lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1},\\
&P_{i_1 i_4}(s) = \lambda_1[s + \lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1},\\
&P_{i_1 i_8}(s) = \lambda_{3i}[s + \lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1},\\
&P_{i_1 j_1}(s) = r_{ij}(K-1)\lambda_{7i}[s + \lambda_1 + \lambda_{3i} + \lambda_{5i} +\\
&\qquad + (K-1)\lambda_{7i}]^{-1},\\
&P_{i_2 i_1}(s) = \lambda_{6i}(s + \lambda_1 + \lambda_{6i})^{-1},\\
&P_{i_2 i_3}(s) = \lambda_1(s + \lambda_1 + \lambda_{6i})^{-1},\\
&P_{i_3 10}(s) = F_{3i\text{лс}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
&P_{i_3 i_1}(s) = \lambda_1 G_{8i\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
&P_{i_3 i_4}(s) = \lambda_{6i} G_{8i\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
&P_{i_4 i_1}(s) = \lambda_{2i}(s + \lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
&P_{i_4 i_5}(s) = \lambda_{5i}(s + \lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
&P_{i_4 i_6}(s) = \lambda_1(s + \lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
&P_{i_4 i_7}(s) = \lambda_{3i}(s + \lambda_1 + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i})^{-1},\\
&P_{i_5 i_4}(s) = \lambda_{6i} G_{9i\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
&P_{i_5 i_2}(s) = F_{9i\text{лс}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
&P_{i_5 13}(s) = \lambda_1 G_{9i\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6i}),\\
&P_{i_6 i_4}(s) = \lambda_{2i} G_{10i\text{л}}(s + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
&P_{i_6 14}(s) = F_{10i\text{лс}}(s + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
&P_{i_6 15}(s) = \lambda_{5i} G_{10i\text{л}}(s + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
&P_{i_6 16}(s) = \lambda_{3i} G_{10i\text{л}}(s + \lambda_{2i} + \lambda_{3i} + \lambda_{5i}),\\
&P_{i_7 i_4}(s) = \lambda_{4i} G_{11i\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
&P_{i_6 17}(s) = F_{11i\text{лс}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
&P_{i_7 18}(s) = \lambda_1 G_{11i\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
&P_{i_8 i_1}(s) = \lambda_{4i}(s + \lambda_1 + \lambda_{4i})^{-1},\\
&P_{i_8 i_9}(s) = \lambda_1(s + \lambda_1 + \lambda_{4i})^{-1},\\
&P_{i_9 i_4}(s) = \lambda_{4i} D_{12i\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
&P_{i_9 19}(s) = F_{12i\text{лс}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4i}),\\
&P_{i_9 20}(s) = \lambda_1 G_{12i\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4i}).
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

5. Аналитические выражения для определения выбранных мер эффективности

1. *Среднее значение $\overline{\tau_{i_1}}$ случайной величины τ_{i_1} времени пребывания полумарковского процесса $\xi(t)$ в подмножестве состояний E_{i+}, начиная с состояния i_1,* $i \in K$. Решая выражения (19) и (21) в системе с выражением из [7]:

$$\overline{\tau_i} = \overline{\zeta_i} + \sum_{j \in E_+ \cap E_i} p_{ij}\overline{\tau_j}, \quad i \in E_+,$$

с помощью аппарата теории матричного исчисления окончательно получаем искомое аналитическое выражение для определения среднего времени $\overline{\tau_{i_1}}$:

$$\overline{\tau_{i_1}} = \sum_{j=1}^{K} a_{ij} C_{j1}, \tag{23}$$

где a_{ij}, $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,K}$, — элементы матрицы, обратной матрице $P = (p_{ij})_{K,K}$;

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-\tau_{ij}(k-1)\lambda_{7i}}{\mathcal{I} + \mathcal{J}} & \text{при } i \neq j, \; i = \overline{1,K}, \; j = \overline{1,K}; \\ 1 \quad \text{при } i = j = \overline{1,K}; \end{cases} \tag{24}$$

где $\mathcal{I} = \lambda_1(1 - \lambda_{2i}A_i) + \lambda_{3i}[1 - \lambda_{4i}(\lambda_1 + \lambda_{4i})^{-1}]$, $\mathcal{J} = \lambda_{6i}[1 - \lambda_{5i}(\lambda_1 + \lambda_{6i})^{-1}] + \lambda_{7i}(K-1)$,

$$C_{j1} = \frac{W_j}{V_j}, \quad j = \overline{1,K}, \tag{25}$$

при

$$\begin{aligned} W_j \;=\; & 1 + \lambda_{5j}(\lambda_1 + \lambda_{6j})^{-1}[1 + \lambda_1 G_{6j\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{6j})] + \\ + \; & \lambda_1[1 + \lambda_1 G_{10j\text{л}}(\lambda_{2j} + \lambda_{3j} + \lambda_{5j}) + \\ + \; & \lambda_{3j} G_{11j\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{4j}) + \lambda_{5j} G_{9j\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{6j})]A_j + \\ + \; & \lambda_{3j}(\lambda_1 + \lambda_{4j})^{-1}[1 + \lambda_1 G_{12j\text{л}}(\lambda_1 + \lambda_{4j})], \end{aligned}$$

$$V_j = \lambda_1(1-\lambda_{2j}A_j)+\lambda_{3j}[1-\lambda_{4j}(\lambda_1+\lambda_{4j})^{-1}]+ + \lambda_{5j}[1-\lambda_{6j}(\lambda_1+\lambda_{6j})^{-1}]+\lambda_{7j}(K-1).$$

В формулах (24) и (25) $A_\varphi = A_{1\varphi}/A_{2\varphi}$, $i=j=\varphi=\overline{1,K}$, где

$$A_{1\varphi} = 1+\lambda_{5\varphi}\lambda_{6\varphi}(\lambda_1+\lambda_{6\varphi})^{-1}G_{8\varphi\text{л}}(\lambda_1+\lambda_{6\varphi})+ + \lambda_{3\varphi}\lambda_{4\varphi}(\lambda_1+\lambda_{4\varphi})^{-1}G_{12\varphi\text{л}}(\lambda_1+\lambda_{4\varphi}),$$

$$A_{2\varphi} = \lambda_1+\lambda_{2\varphi}[1-\lambda_1 G_{10\varphi\text{л}}(\lambda_{2\varphi}+\lambda_{3\varphi}+\lambda_{5\varphi})]+ + \lambda_{3\varphi}[1-\lambda_{4\varphi}G_{11\varphi\text{л}}(\lambda_1+\lambda_{4\varphi})]+ + \lambda_{5\varphi}[1-\lambda_{6\varphi}G_{9\varphi\text{л}}(\lambda_1+\lambda_{6\varphi})].$$

2. *Функция распределения $T_{i_1}(t)$ в форме преобразования Лапласа-Стильтьеса $T_{i_1}(s)$ случайной величины τ_{i_1} времени пребывания полумарковского процесса $\xi(t)$ в подмножестве состояний E_+, начиная с состояния i_1*, $i \in K$. Решая выражения (22) в системе с выражением из [7]:

$$T_i(s) = \sum_{j\in E_i\cap E_-} P_{ij}(s) + \sum_{j\in E_i\cap E_+} P_{ij}(s)T_j(s), \quad i\in E_+,$$

с помощью аппарата теории матричного исчисления окончательно получаем искомое аналитическое выражение для функции распределения $T_{i_1}(s)$:

$$T_{i_1}(s) = \sum_{j=1}^{K}\beta_{ij}(s)C_{j_1}(s), \tag{26}$$

где $\beta_{ij}(s)$, $i=\overline{1,K}$; $j=\overline{1,K}$, — элементы матрицы, обратной матрице $P(s)$, $P(s)=(P_{ij}(s))_{K,K}$;

$$P_{ij}(s) = \begin{cases} \dfrac{-\tau_{ij}(K-1)\lambda_{7i}}{\mathcal{N}+\mathcal{M}+\mathcal{L}+\mathcal{T}} \\ \qquad \text{при } i\neq j, \quad i=\overline{1,K}, \quad j=\overline{1,K}; \\ 1 \quad \text{при } i=j=\overline{1,K}, \end{cases} \tag{27}$$

где $\mathcal{N} = s + \lambda_1[1 - \lambda_{2i}A_i(s)]$, $\mathcal{M} = \lambda_{3i}[1 - \lambda_{4i}(s + \lambda_1 + \lambda_{4i})]^{-1}$, $\mathcal{L} = \lambda_{5i}[1 - \lambda_{6i}(s + \lambda_1 + \lambda_{6i})^{-1}]$, $\mathcal{T} = \lambda_{7i}(K - 1)$,

$$C_{j_1}(s) = \frac{W_j(s)}{V_j(s)}, \quad j = \overline{1, K}, \tag{28}$$

при

$$\begin{aligned}
W_j(s) &= A_j(s)\{\lambda_1[F_{10j\text{лс}}(s + \lambda_{2j} + \lambda_{3j} + \lambda_{5j}) + \\
&+ \lambda_{3j}G_{10j\text{л}}(s + \lambda_{2j} + \lambda_{3j} + \lambda_{5j}) + \\
&+ \lambda_{5j}G_{10j\text{л}}(s + \lambda_{2j} + \lambda_{3j} + \lambda_{5j})] + \\
&+ \lambda_{3j}[F_{11j\text{лс}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4j}) + \lambda_1 G_{11j\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4j})] + \\
&+ \lambda_{5j}[F_{9j\text{лс}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6j}) + \lambda_1 G_{9j\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6j})]\} + \\
&+ \lambda_{3j}(s + \lambda_1 + \lambda_{4j})^{-1}[F_{12j\text{лс}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4j}) + \\
&+ \lambda_1 G_{12j\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4j})] + \lambda_{5j}(s + \lambda_1 + \lambda_{6j})^{-1} \times \\
&\times [F_{8j\text{лс}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6j}) + \lambda_1 G_{8j\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6j})];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_j(s) &= s + \lambda_1[1 - \lambda_{2j}A_j(s)] + \lambda_{3j}[1 - \lambda_{4j}(s + \lambda_1 + \lambda_{4j})^{-1}] + \\
&+ \lambda_{5j}[1 - \lambda_{6j}(s + \lambda_1 + \lambda_{6j})^{-1}] + \lambda_{7j}(K - 1).
\end{aligned}$$

В формулах (27) и (28) $A_\varphi(s) = \dfrac{A_{1\varphi}(s)}{A_{2\varphi}(s)}$, $\quad i = j = \varphi = \overline{1, K}$,
где

$$\begin{aligned}
A_{1\varphi}(s) &= 1 + \lambda_{3\varphi}\lambda_{4\varphi}(s + \lambda_1 + \lambda_{4\varphi})^{-1}G_{12\varphi\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4\varphi}) + \\
&+ \lambda_{5\varphi}\lambda_{6\varphi}(s + \lambda_1 + \lambda_{6\varphi})^{-1}G_{8\varphi\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6\varphi}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2\varphi}(s) &= s + \lambda_1 + \lambda_{2\varphi}[1 - \lambda_1 G_{10\varphi\text{л}}(s + \lambda_{2\varphi} + \lambda_{3\varphi} + \lambda_{5\varphi})] + \\
&+ \lambda_{3\varphi}[1 - \lambda_{4\varphi}G_{11\varphi\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{4\varphi})] + \\
&+ \lambda_{5\varphi}[1 - \lambda_{6\varphi}G_{9\varphi\text{л}}(s + \lambda_1 + \lambda_{6\varphi})].
\end{aligned}$$

6. Новый метод перевода функций распределения случайной величины из области изображений в область оригиналов

При оценке и исследовании эффективности функционирования ТС с помощью аппарата полумарковских процессов возникает необходимость перевода аналитических выражений функции распределения случайной величины τ_i, $i \in E_+$, получаемой в ходе исследования в форме преобразования Лапласа–Стильтьеса $T_i(s)$, $i \in E_+$, из области изображений в область оригиналов (см., например, выражения (26)).

Существующие методы обращения преобразования Лапласа–Стильтьеса разработаны для случаев, когда оригинал восстанавливается по значениям изображения в точке, действительная часть которых больше показателя роста функции в области оригиналов, при этом показатель роста больше 0.5.

Особенность рассматриваемого в статье класса оригиналов состоит в том, что показатель роста исследуемых функций в области оригиналов равен нулю и известны значения изображений и их производных в нуле. В связи с этим появилась необходимость разработать новый численный метод обращения преобразования Лапласа–Стильтьеса.

Суть метода [8] состоит в следующем. Пусть $f(t)$ — оригинал с показателем роста, равным нулю, $F(p)$ — его изображение, т.е.

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \tag{29}$$

Известны $F^{(n)}(0)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ Вводя замену переменных $p = \dfrac{\epsilon(1-z)}{1+z}$, где ϵ — достаточно близкое к нулю положительное число, из формулы (29) получаем функцию $\tilde{F}(z) = F(p) = F\left(\epsilon \dfrac{1-z}{1+z}\right)$. Разлагая функцию

$\tilde{F}(z) = \dfrac{\hat{F}(z)}{1-z}$ в ряд Тейлора в окрестности нуля и обращая этот ряд известным табличным методом в области оригиналов, получаем искомое выражение

$$f(t) = 2\epsilon e^{-pt} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \left(\sum_{k=0}^{n} t^k \mu_k(\epsilon) \right), \qquad (30)$$

где

$$Q_n = \frac{\hat{F}^{(n)}(0)}{n!}, \quad \mu_k(\epsilon) = \frac{(-1)^k}{k!}\epsilon^k \left(\sum_{m=0}^{k} C_n^{n-k-m} C_{n-m}^{m} \right).$$

Исследование вопросов сходимости полученного ряда приводит к положительным результатам [8].

Достоинством разработанного метода является то, что значение ϵ можно варьировать таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить сходимость ряда, определяемого формулой (30), с другой стороны, чтобы аппроксимация оригинала $f(t)$ с помощью полученного ряда проводилась с требуемой точностью.

При численном обращении $F(p) \to f(t)$ на ЭВМ разработанным методом требуемая точность обращения реализуется итерационным способом, т.е. вычисление полученного ряда (см.формулу (30)) прекращается при таком значении n, при котором начинает выполняться условие $|f_n - f_{n-1}| \geq \delta$, где δ — заданная точность обращения.

Разработанный метод применим и в тех случаях, когда в исходных условиях известны значения изображения и его производных в точках, действительная часть которых не меньше показателя роста оригинала.

Заключение

1. Разработанная технология дополняет технологию автоматизированного обоснования перспектив развития технических систем [3] в части оценки эффективности функционирования сложных технических систем. Технология позволяет аналитическим путем находить недостающие и редактировать известные исходные данные по

эффективности функционирования рассматриваемых систем для различных этапов технологии прогнозирования [4], технологии планирования [5], технологии анализа и обоснования развития технических систем на длительную перспективу [3], ресурсосберегающей технологии экспресс-оценки вариантов построения технических систем [6].

2. Разработана в общем виде аналитическая модель для оценки и исследования эффективности функционирования широкого класса сложных технических систем. Процесс функционирования таких систем носит явно выраженный сложный вероятностный характер. Созданная модель позволяет одновременно учитывать:

– многорежимность (произвольное конечное число режимов, случайное время и различная интенсивность использования системы в каждом режиме);

– одноканальность, восстанавливаемость и проведение в системе различных работ технического обслуживания (обслуживающий и восстанавливающий органы и орган технического обслуживания имеют переменную (регулируемую) производительность; время обслуживания, восстановления и выполнения работ технического обслуживания — случайные величины);

– ограниченную надежность аппаратуры и случайность нагрузки (потоки отказов разнотипных элементов системы и потоки разнотипных требований на обслуживание — простейшие с различной интенсивностью, промежутки времени безотказной работы системы и между последовательными поступлениями требований на обслуживание — случайные величины);

– наличие в системе четырех типов временной избыточности (различные дисциплины ожидания начала обслуживания и продолжения прерванного обслуживания, допустимое время ожидания в различных ситуациях — случайная величина с произвольным законом распределения).

3. Представленные в статье результаты обобщают результаты известных работ (например, [9–15]), посвящен-

ных исследованию технической эффективности рассматриваемого класса сложных технических систем.

В отличие от рассмотренной в статье модели сложной технической системы в моделях функционирования технических систем указанных работ, например, не учитывается многорежимность [9, 10, 13, 14], процесс обслуживания [10–13], поступающий поток требований на использование системы [11, 12, 14], ремонтопригодность технических систем [11, 12, 14].

4. Разработанная технология и построенная математическая модель функционирования широкого класса сложных технических систем позволяют аналитическим путем, через совокупность параметров и характеристик технических систем, выразить другие меры эффективности (надежности) функционирования анализируемых систем. Технология позволяет, например, находить другие вероятностные, в частности моментные, характеристики случайных величин, определяющие в соответствии с выбранным множеством целей исследования меры эффективности (надежности) технических систем.

5. Предложенная в статье технология аналитической оценки эффективности функционирования сложных технических систем применима при решении научно-технических вопросов разработки, создания, изготовления, испытания и эксплуатации технических систем. Другими словами, разработанная технология применима при научно-техническом сопровождении изделий на всех этапах их жизненного цикла.

6. Изложенный в статье подход раскрывает технологию синтеза аналитических моделей для оценки и исследования эффективности функционирования сложных технических систем. Разработанная технология открыта для дальнейшего развития (усложнения) моделей функционирования анализируемых систем с точки зрения все более полного учета особенностей и факторов реального функционирования современных и перспективных поколений технических систем.

Практическое использование полученных результатов принципиально может вестись в двух направлениях: при анализе функционирования технических систем на основе использования синтезированной в статье математической модели и при синтезе новых более общих аналитических моделей для анализа функционирования технических систем на основе изложенного подхода.

Литература

1. УСТЮГОВ Ю.А. Комплекс аналитических моделей для оценки и исследования надежности и эффективности функционирования широкого класса сложных систем с учетом их основных черт, факторов и особенностей реального функционирования: Итоговый научно-технический отчет по НИР "Оптимум". Том IV. – Красноярск: КВКУРЭ ПВО, 1985. — 134 с.

2. Надежность технических систем: Справочник. /Беляев Ю.К. и др. Под ред. И.А.Ушакова. – М.: Радио и связь,1985. — 608 с.

3. УСТЮГОВ Ю.А. Технология автоматизированного обоснования перспектив развития технических систем //Искусственный интеллект и экспертные системы. — Новосибирск, 1969. — Вып. 157: Вычислительные системы. — С.181–217.

4. УСТЮГОВ Ю.А. Технология прогнозирования развития технических средств и систем на длительную перспективу при существенно ограниченной обучающей выборке //Анализ последовательностей и таблиц данных. — Новосибирск, 1994. — Вып. 150: Вычислительные системы. — С. 71–93.

5. УСТЮГОВ Ю.А. Технология долгосрочного планирования НИОКР, серийного производства и эксплуатации технических систем на основе прогнозирования их развития с учетом ресурсных ограничений и меняющихся во времени требований //Анализ последовательностей и таблиц данных. — Новосибирск, 1994. — Вып. 150: Вычислительные системы. — С. 45–70.

6. УСТЮГОВ Ю.А. Ресурсосберегающая технология технико-экономической оценки вариантов построения технических систем //Прикладные системы искусственного интеллекта. — Новосибирск, 1995. — Вып. 153: Вычислительные системы. — С. 127–163.

7. КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф. Полумарковские процессы и их применение. - Киев: Наукова думка, 1976. — 184 с.

8. УСТЮГОВ Ю.А., ФРУМИН И.Д., ГОМЕР В.О. Численный метод обращения на ЭВМ преобразования Лапласа-Стильтьеса одного класса оригиналов //Применение ЭВМ в народном хозяйстве: Краевая конференция молодых ученых (г. Красноярск, 28 ноября 1984 г.): Тез.док. — Красноярск, 1984. — С. 34–35.

9. РАЙКИН А.Л. Элементы теории надежности для проектирования технических систем.- М.: Сов.Радио, 1967.

10. ШПАК В.Д. Некоторые вопросы синтеза защиты //Теория точности и надежности кибернетических систем. Труды семинара. — Киев: Институт кибернетики АН УССР, 1969. Вып. 1.

11. БРОДИ С.М. и др. Расчет и планирование испытаний систем на надежность. — Киев: Наукова думка, 1970.

12. ВИСКОВ О.В. О времени жизни системы при неоднородном режиме ее эксплуатации //Известия АН СССР, Техническая кибернетика. — 1966. — № 6.

13. РУДЕРМАН С.Ю. Надежность системы при случайном режиме ее использования //Там же.

14. УШАКОВ И.А. О надежности системы со случайной длительностью выполнения задачи //Надежность и контроль качества. — 1972. — № 6.

15. АЛЕКСАНДРОВ Ю.В. Характеристика надежности систем с временной избыточностью //Вопросы радиоэлектроники, сер. ОТ. 1971. — Вып. 17.

Поступила в редакцию
14 апреля 1997 года