ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
(Вычислительные системы)
1998 год **Выпуск 161**

УДК 510.5

ТЕОРЕМА ОБ УНИФОРМИЗАЦИИ В НАСЛЕДСТВЕННО КОНЕЧНЫХ НАДСТРОЙКАХ[1]

А.И. Стукачев

Наследственно конечная надстройка $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$, представляющая собой наименьшее допустимое множество над моделью $\mathcal{M}$, позволяет для произвольной модели (например, для поля вещественных чисел) формализовать понятие эффективной вычислимости, используя аппарат теории рекурсии для допустимых множеств. Одним из нетривиальных вопросов общей теории рекурсии является, в частности, проблема униформизации.

В настоящей работе рассматриваются допустимые множества вида $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ — модель регулярной теории. В терминах определимости скулемовских функций формулируется необходимое и достаточное условие, при котором в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$ справедлива теорема об униформизации. В качестве следствия устанавливается теорема об униформизации для наследственно конечных надстроек $\mathrm{HF}(\mathbf{R})$ и $\mathrm{HF}(\mathbf{Q}_p)$ над полями вещественных и p-адических чисел.

Наследственно конечная надстройка $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$ над моделью $\mathcal{M} = \langle M, \sigma^{\mathcal{M}} \rangle$ определяется как модель сигнатуры $\sigma' = \sigma \cup \{\mathrm{U}, \in, \emptyset\}$ с основным множеством $\mathrm{HF(M)}= \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathrm{H}_n(\mathrm{M})$,

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96-01-00097.

где $H_0(M) = \emptyset$, $\quad H_{n+1}(M) = \{a | a \subseteq M \cup H_n(M), ||a|| < \omega\}$. Предикат U интерпретируется как множество элементов модели $\mathcal{M}$ (праэлементов), а отношение $\in$ и константа $\emptyset$ имеют обычный теоретико-множественный смысл.

На множестве формул сигнатуры σ' определяется класс Δ_0-формул как замыкание класса атомарных формул относительно $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\exists u \in v$, $\forall u \in v$, класс Σ-формул есть замыкание класса Δ_0-формул относительно $\wedge$, $\vee$, $\exists u \in v$, $\forall u \in u$ и квантора $\exists u$, класс Π-формул образован отрицаниями Σ-формул.

Предикат на $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$ называется $\Sigma(\Pi)$-предикатом,если он определяется соответствующей формулой с параметрами, и Δ-предикатом, если он является Σ-предикатом и Π-предикатом одновременно. Функция, график которой — Σ-предикат, называется Σ-функцией.

Условимся переменные в формулах сигнатуры σ' разделять на прапеременные, принимающие значения только на множестве праэлементов, и общие переменные, принимающие произвольные значения. Впоследствии, если речь идет о формуле сигнатуры σ, считается, что все переменные (как свободные, так и связанные) суть прапеременные.

Зафиксируем некоторую гёделевскую нумерацию формул сигнатуры σ', различающую прапеременные, и будем через $[\varphi]$ обозначать гёделевский номер формулы φ. Предикат истинности Σ-формул Σ-Sat определяется в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$ следующим образом:

$$\Sigma\text{-}Sat(a, \langle b_0, \dots, b_n \rangle) \iff$$

$$\iff (a = [\varphi]) \wedge (\varphi(x_0, \dots, x_n) - \Sigma\text{-формула}) \wedge (\mathrm{HF}(M) \models \varphi(\bar{b})).$$

Одно из важнейших свойств допустимых множеств состоит в том, что Σ-Sat является Σ-предикатом (см. [2]).

Напомним определения регулярной теории [1] и теории с определимыми скулемовскими функциями [3]. Теория T сигнатуры σ называется *регулярной*, если она модельно полна и разрешима. В силу модельной полноты всякая формула T-эквивалентна некоторой $\exists$-формуле, причем вследствие разрешимости эта формула может быть найдена эффективно (под эффективностью здесь и далее понимается существование рекурсивной процедуры на множестве гёделевских номеров).

Теория T называется теорией *с определимыми скулемовскими функциями*, если для любой формулы $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ найдется формула $\psi(x_0, \ldots, x_n)$ той же сигнатуры такая, что

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [\exists x_0 \varphi(x_0, \ldots, x_n) \to$$
$$\to \exists! x_0 (\varphi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \psi(x_0, \ldots, x_n))].$$

В дальнейшем пусть теория T сигнатуры σ — регулярная теория с определимыми скулемовскими функциями и пусть $\mathcal{M} = (M, \sigma^{\mathcal{M}})$ — модель этой теории.

ЛЕММА 1. *Пусть P — n-местный формульный предикат на $\mathcal{M}$. Тогда по формуле, определяющей P, эффективно находится $\exists$-формула, определяющая с тем же набором параметров n-местный предикат Q на $\mathcal{M}$ такой, что*

а) *если $P = \emptyset$, то $Q = \emptyset$,*

б) *если $P \neq \emptyset$, то $Q = \{\overline{x}\}$, $\overline{x} \in P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по n.

Пусть $n = 1$ и пусть $\Phi(x_0, \overline{y})$ — формула сигнатуры σ, определяющая предикат P с набором параметров $\overline{m}$ из M, т. е. $x \in P \iff \mathcal{M} \models \Phi(x, \overline{m})$. Существует формула $\Psi(x_0, \overline{y})$, для которой

$$T \vdash \forall \overline{y} [\exists x_0 \Phi(x_0, \overline{y}) \to \exists^! x_0 (\Phi(x_0, \overline{y}) \wedge \Psi(x_0, \overline{y}))].$$

Вследствие регулярности теории T эффективно находится $\exists$-формула $\Theta(x_0, \overline{y})$, эквивалентная $\Phi \wedge \Psi$. Предикат $Q = \{ x \mid \mathcal{M} \models \Theta(x, \overline{m}) \}$ удовлетворяет всем условиям.

Пусть теперь $n > 1$ и утверждение доказано для всех $m < n$. Предикат P определяется формулой $\Phi(x_0, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}, \overline{y})$ и набором параметров $\overline{m}$. Для предиката

$$X = \{x_0 \mid \mathcal{M} \models \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1} \Phi(x_0, \ldots, x_{n-1}, \overline{m})\}$$

по индукционному предположению эффективно находится $\exists$-формула $\Psi_1(x_0, \overline{y})$, выделяющая из него единственный элемент. По индукционному предположению также эффективно находится $\exists$-формула $\Psi_2(x_1,\ldots,x_{n-1},\overline{y})$, выделяющая единственный элемент из предиката

$$Y=\{\langle x_1,\ldots,x_{n-1}\rangle \mid \mathcal{M}\models \exists x_0(\Phi(x_0,\ldots,x_{n-1},\overline{m})\wedge\Psi_1(x_0,\overline{m}))\}.$$

Искомый предикат Q определяется формулой $\Psi_1(x_0,\overline{y})\wedge$ $\wedge\Psi_2(x_1,\ldots,x_n,\overline{y})$ с набором параметров $\overline{m}$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем использовать определения и конструкции из [1]. Для любых $n=\{0,1,\ldots,n-1\}\in$ $\in\omega$, $\text{æ}\in \mathrm{HF}(n)$, $\overline{x}\in M^n$, определим элемент $\text{æ}(\overline{x})\in$ $\in \mathrm{HF}(\widetilde{\mathcal{M}})$ следующим образом. Пусть $\lambda_{\overline{x}}:n\to M$ определено так: $\lambda_{\overline{x}}(i)=x_i$, где $\overline{x}=\langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle$. Отображение $\lambda_{\overline{x}}$ однозначно продолжается до отображения $\lambda^{\omega}_{\overline{x}}:\mathrm{HF}(n)\to$ $\to \mathrm{HF}(\mathcal{M})$ так, что $\lambda^{\omega}_{\overline{x}}(a_0,\ldots,a_k)\rightleftharpoons\{\lambda^{\omega}_{\overline{x}}(a_0),\ldots,\lambda^{\omega}_{\overline{x}}(a_k)\}$ для любого множества $\{a_0,\ldots,a_k\}\in \mathrm{HF}(n)$. Тогда $\text{æ}(\overline{x})\rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons\lambda^{\omega}_{\overline{x}}(\text{æ})$.

Для любого элемента $\text{æ}\in \mathrm{HF}(n)$ эффективно определяется терм $t_{\text{æ}}(x_0,\ldots,x_{n-1})$ сигнатуры $\langle\{\},\cup,\emptyset\rangle$ такой, что для любых $x^0_0,\ldots,x^0_{n-1}\in M$ $\quad t_{\text{æ}}(x^0_0,\ldots,x^0_{n-1})=\text{æ}(\overline{x}^0)$.

Определим функцию $h:\omega\to \mathrm{HF}(\omega)$ следующим образом: пусть для любого $n\in\omega$

$$h(n)=\begin{cases} n_1, \text{ если } n=c(0,n_1),\\ \{h(n_1)\}, \text{ если } n=c(1,n_1),\\ h(n_1)\cup h(n_2), \text{ если } n=c(2,c(n_1,n_2)) \text{ и}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n_1<n_2\\ \emptyset, \text{ иначе },\end{cases}$$

где $c(n,m)=\dfrac{(n+m)^2+3n+m}{2}$ — канторовская биекция. Из определения очевидно, что h является нумерацией $\mathrm{HF}(\omega)$, а так как ω — Δ-подмножество $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$, то в терминах [1] h будет $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$-конструктивизацией системы $\mathrm{HF}(\omega)$. Таким образом, система $\mathrm{HF}(\omega)$ может быть эффективно определена в любой надстройке. Впоследствии будет удобно считать $\mathrm{HF}(\omega)$ частью $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\varphi(x)$ — Δ_0-формула сигнатуры σ' и пусть $\text{æ}\in \mathrm{HF}(n)$. Тогда эффективно находится формула*

$\varphi^*(x_0,\ldots,x_{n-1})$ *сигнатуры* σ *такая, что для любого означивания* $\gamma:\{x_0,\ldots,x_{n-1}\}\to M$

$$\mathrm{HF}(\mathcal{M})\models\varphi(x)^x_{t_{æ}(\bar{x})}[\gamma]\iff\mathcal{M}\models\varphi^*(x_0,\ldots,x_{n-1})[\gamma].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строим по формуле $\varphi(x)$ и элементу $æ\in\mathrm{HF}(n)$ формулу $\varphi^x_{æ}(x_0,\ldots,x_{n-1})$ сигнатуры $\sigma'\cup\{\cup,\{\}\}$ следующим образом:

1) если $\varphi=\varphi_1\,q\,\varphi_2$, $q\in\{\vee,\wedge,\to\}$, то $\varphi^x_{æ}\rightleftharpoons(\varphi_1)^x_{æ}\,q\,(\varphi_2)^x_{æ}$;

2) если $\varphi=\neg\varphi_1$, то $\varphi^x_{æ}\rightleftharpoons\neg(\varphi_1)^x_{æ}$;

3) если $\varphi=(t_1\,p\,t_2)$, $p\in\{\in,=\}$, то $\varphi^x_{æ}\rightleftharpoons(t_1\,p\,t_2)^x_{t_{æ}(\bar{x})}$;

4) если $\varphi=\exists y\in x(\varphi_1)$, то $\varphi^x_{æ}\rightleftharpoons\bigvee\limits_{æ'\in æ}((\varphi_1)^y_{æ'})^x_{æ}$;

5) если $\varphi=\forall y\in x(\varphi_1)$, то $\varphi^x_{æ}\rightleftharpoons\bigwedge\limits_{æ'\in æ}((\varphi_1)^y_{æ'})^x_{æ}$;

6) если $\varphi=U(x)$, то

$$\varphi^x_{æ}\rightleftharpoons\begin{cases}\tau & \text{при } æ\in n,\\ \neg\tau, & \text{иначе;}\end{cases}$$

7) если $\varphi=P(t_0,\ldots,t_k)$, $P\in\sigma$, то

$$\varphi^x_{æ}\rightleftharpoons\begin{cases}P(t_0,\ldots t_k)^x_{t_{æ}(\bar{x})} & \text{при } æ\in n,\\ \neg\tau, & \text{иначе,}\end{cases}$$

где τ обозначает предложение $\exists x(x=x)$ (не нарушая общности, можно считать, что сигнатура σ не содержит функциональных символов).

Далее, для любой пары термов t_0,t_1 сигнатуры $\langle\varnothing,\{\},\cup\rangle$ над праэлементами $x_0,\ldots,x_{n-1}$ можно эффективно определить формулы Φ_{t_0,t_1} и Ψ_{t_0,t_1} пустой сигнатуры такие, что $FV(\Phi_{t_0,t_1})=FV(\Psi_{t_0,t_1})=FV(t_0)\cup FV(t_1)$, и для любого означивания $\gamma:FV(t_0=t_1)\to M$ справедливы соотношения:

$$t_0^{\langle HF(\mathcal{M}),\{\},\cup\rangle}[\gamma]\in t_1^{\langle HF(\mathcal{M}),\{\},\cup\rangle}[\gamma]\iff\mathcal{M}\models\Phi_{t_0,t_1}[\gamma],$$

$$t_0^{\langle HF(\mathcal{M}),\{\},\cup\rangle}[\gamma]\subseteq t_1^{\langle HF(\widetilde{\mathcal{M}}),\{\},\cup\rangle}[\gamma]\iff\mathcal{M}\models\Psi_{t_0,t_1}[\gamma]$$

(доказательство можно найти в [1]). Формула $\varphi^*(\bar{x})$ получается из $\varphi^x_{æ}(\bar{x})$ заменой подформул вида $t_0\in t_1$ на Φ_{t_0,t_1}, а подформул вида $t_0=t_1$ на $\Psi_{t_0,t_1}\wedge\Psi_{t_1,t_0}$. Лемма доказана.

Лемма 2 очевидно обобщается на формулы с несколькими переменными. Из нее также следует, что можно ограничиться рассмотрением формул с параметрами только из M.

Пусть $\Phi(x,\overline{m})$ — Δ_0-формула сигнатуры σ' с набором параметров $\overline{m}$ из M. Для любого $n\in\omega$ определим множество

$$\mathrm{H}_n \rightleftharpoons \{æ \in \mathrm{HF}(n) \mid \mathrm{HF}(\mathcal{M}) \models \exists x_0 \ldots \exists x_{n-1}[U(x_0) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge U(x_{n-1}) \wedge (\Phi(x,\overline{m}))^{x}_{tæ(\overline{x})}]\}$$

и положим $\mathrm{H} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathrm{H}_n$. Имеет место следующая

ЛЕММА 3. *H является Δ-подмножеством в* $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{\mathrm{H}}_n \rightleftharpoons \mathrm{HF}(n)\setminus \mathrm{H}_n$, $\overline{\mathrm{H}} \rightleftharpoons \mathrm{HF}(\omega)\setminus \mathrm{H}$, тогда $\overline{\mathrm{H}} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \overline{\mathrm{H}}_n$. Поэтому достаточно показать, что H_n является Δ-подмножеством в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$.

Пользуясь леммой 2, по формуле Φ и элементу $æ$ эффективно находим формулу $\Psi_{æ}(\overline{x},\overline{m})$ сигнатуры σ, для которой

$$æ \in \mathrm{H}_n \iff \mathcal{M} \models \exists x_0 \ldots \exists x_{n-1} \Psi_{æ}(\overline{x},\overline{m}).$$

В силу регулярности, по формуле $\exists\overline{x}\Psi_{æ}(\overline{x},\overline{y})$ эффективно находится эквивалентная ей $\exists$-формула $\Theta_{æ}(\overline{y})$. Таким образом,

$$æ \in \mathrm{H}_n \iff \mathrm{HF}(\mathcal{M}) \models \Sigma\text{-}Sat([\Theta_{æ}],\overline{m}).$$

Случай $æ \in \overline{\mathrm{H}}_n$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Итак, пусть $\mathcal{M}$ — модель регулярной теории с определимыми скулемовскими функциями. Сформулируем и докажем основное утверждение — теорему об униформизации для $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $E \subseteq \mathrm{HF}(\mathcal{M}) \times \mathrm{HF}(\mathcal{M})$ — Σ-предикат. Тогда существует Σ-функция F такая, что*

1) $\mathrm{dom}(F) = pr_1(E)$,
2) $\mathrm{graf}(F) \subseteq E$,

где $\mathrm{dom}(F) = \{x \mid F(x)\downarrow\}$, $\mathrm{graf}(F) = \{\langle x,y\rangle \mid F(x) = y\}$, $pr_1(E) = \{x \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in E)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что предикат $E(x,y)$ определяется формулой $\exists z\Phi(x,y,z,\overline{m})$, где $\Phi(x,y,z,\overline{m})$ — Δ_0-формула с набором параметров $\overline{m}$ из M.

Очевидно, что $Pr_1(E)$ также является Σ-предикатом. В самом деле, рассмотрим Δ_0-формулу

$$\Psi(x,t,\overline{m}) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \exists u \in t\, \exists v \in t\, \exists y \in u\, \exists z \in v\ (t = \langle y,z\rangle \wedge \Phi(x,y,z,\overline{m}))$$

(по определению $\langle a,b\rangle \rightleftharpoons \{\{a\},\{a,b\}\}$). Тогда $x \in Pr_1(E) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathrm{HF}(\mathcal{M}) \models \exists t\Psi(x,t,\overline{m})$.

Для любого $a \in \mathrm{HF}(\mathcal{M})$ найдутся такие $n \in \omega$, $æ \in \mathrm{HF}(n)$, $a_0,\ldots,a_{n-1} \in M$, что $a = æ(\overline{a})$. Пусть $x^* \in \mathrm{HF}(\mathcal{M})$, $x^* = æ_0(\overline{x})$, где $æ_0 \in HF(l)$, $\overline{x} = \langle x_0,\ldots,x_{l-1}\rangle \in$ $\in M^l$. Как и в лемме 3, определим множества

$$H_n \rightleftharpoons \{\ æ \in \mathrm{HF}(n) \mid \mathrm{HF}(\mathcal{M}) \models \exists t_0 \ldots \exists t_{n-1}[U(x_0) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge U(x_{n-1}) \wedge (\Psi(x^*,t,\overline{m}))^t_{tæ(\overline{t})}]\}$$

для всех $n \in \omega$ и положим $H \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} H_n$.

Если $x^* \in Pr_1(E)$, то множество $\{t|\mathrm{HF}(\mathcal{M}) \models \Psi(x^*,t,\overline{m})\}$ непусто, следовательно, непусто и множество H. В этом случае однозначно определяется элемент $æ_1 \in H$, являющийся минимальным в смысле построенной ранее нумерации h. Иными словами, $æ_1$ выбирается удовлетворяющим условию

$$\exists k\left((k\in\omega) \wedge (æ_1 = h(k)) \wedge (æ_1 \in H) \wedge \forall k' < k(\ h(k') \notin H)\right).$$

Из леммы 3 следует, что это условие задается в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$ некоторой Σ-формулой $\Psi_1(æ_1, x^*, \overline{m})$.

Пусть $æ_1 \in \mathrm{HF}(n)$. Рассмотрим множество

$$T = \{\ \langle t_0,\ldots,t_{n-1}\rangle \in M^n \mid \mathrm{HF}(\mathcal{M}) \models \Psi(x^*,t,\overline{m})^t_{æ_1(\overline{t})}\}.$$

По лемме 2, можно эффективно построить формулу $\Theta(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y})$ сигнатуры σ такую, что для любого означивания $\gamma : \{\bar{x}, \bar{t}\} \to M$

$$\mathrm{HF}(\mathcal{M}) \models$$

$$\models \Psi(x, t, \overline{m})^{x}_{æ_0(\bar{x})} \Psi(x, t, \overline{m})^{t}_{æ_1(\bar{t})}[\gamma] \iff \mathcal{M} \models \Theta(\bar{x}, \bar{t}, \overline{m})[\gamma].$$

Вследствие леммы 1, по формуле Θ эффективно строится $\exists$-формула $\Theta^*(\bar{x}, \bar{t}, \overline{m})$, выделяющая из множества T единственный элемент $\overline{t^*}$.

Для элемента $t^* \rightleftharpoons æ_1(\overline{t^*})$ истинна формула $\Psi(x^*, t^*, \overline{m})$, поэтому он имеет вид $t^* = \langle y^*, z^* \rangle$, причем $\langle x^*, y^* \rangle \in E$. Полагаем, по определению, $F(x^*) \rightleftharpoons y^*$.

Искомая Σ-функция F определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x^*) \quad &= \quad y^* \iff \exists t^* \exists z^* \exists æ_0 \exists æ_1 \big((t^* = \langle y^*, z^* \rangle) \wedge \\ \wedge \quad & \Psi_1(æ_1, x^*, \overline{m}) \wedge \Sigma - Sat([\exists x_0 \ldots \exists x_{l-1} \exists t_0 \ldots \\ \ldots \quad & \exists t_{n-1}(x^* = æ_0(\bar{x}) \wedge t^* = æ_1(\bar{t}) \wedge \Theta^*(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y}))], \overline{m})\big). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В работе [3] было доказано, что теория вещественно замкнутых полей и теория p-адически нормированных полей являются теориями с определимыми скулемовскими функциями. Таким образом, имеет место

СЛЕДСТВИЕ. *Для* $\mathrm{HF}(\mathbf{R})$ *и* $\mathrm{HF}(\mathbf{Q}_p)$ *справедлива теорема об униформизации.*

На самом деле, требование определимости скулемовских функций формулами исходной сигнатуры оказывается излишне жестким. Как будет показано ниже, теорема об униформизации справедлива и при более слабом условии, которое является одновременно необходимым и достаточным.

Назовем модель $\mathcal{M}$ сигнатуры σ моделью с *Σ-определимыми скулемовскими функциями*, если для любой формулы $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ эффективно находится Σ-формула $\psi(x_0, \ldots x_n)$ сигнатуры σ' такая, что

$$HF(\mathcal{M}) \models \forall x_1 \ldots \forall x_n [\exists x_0 \varphi(x_0, \ldots, x_n) \to \\ \to \exists! x_0 (\varphi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \psi(x_0, \ldots, x_n))]$$

(напомним, что $x_0, \ldots, x_n$, а также все связанные переменные формулы φ суть прапеременные).

Пусть $\mathcal{M}$ — модель регулярной теории с Σ-определимыми скулемовскими функциями. В этом случае выполняется аналог леммы 1, а именно, справедлива

ЛЕММА 4. *Пусть P — n-местный формульный предикат на $\mathcal{M}$. Тогда по формуле, определяющей P, эффективно находится Σ-формула, определяющая с тем же набором параметров предикат Q на $HF(\mathcal{M})$ такой, что*

а) *если $P = \emptyset$, то $Q = \emptyset$;*

б) *если $P \neq \emptyset$, то $Q = \{\overline{x}\}$, $\overline{x} \in P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 1$ очевиден,поэтому пусть $n > 1$ и утверждение доказано для всех $m < n$. Пусть предикат P определяется формулой $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, \overline{y})$ сигнатуры σ с набором параметров $\overline{m}$. Для предиката

$$X = \{x_0 \mid \mathcal{M} \models \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1} \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, \overline{m})\}$$

по индукции эффективно находится Σ-формула $\Phi(x, \overline{y})$, выделяющая из него единственный элемент. Рассмотрим предикат

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in M^{n-1} \mid \mathrm{HF}(\mathcal{M}) \models \\ \models \exists x_0 (\varphi(\overline{x}, \overline{m}) \wedge \Phi(x_0, \overline{m}))\}.$$

Из леммы 2 следует, что $HF(\mathcal{M}) \models \Phi(x_0, \overline{m}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \models \bigvee\limits_{i \in \omega} \varphi_i(x_0, \overline{m})$, где φ_i — формулы сигнатуры σ, и множество $\{[\varphi_i] \mid i \in \omega\}$ рекурсивно перечислимо. Поэтому

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in M^{n-1} \mid \mathcal{M} \models \\ \models \bigvee_{i \in \omega} \exists x_0 (\varphi(\overline{x}, \overline{m}) \wedge \varphi_i(x_0, \overline{m}))\}.$$

Пусть $i_0 = \mu i \left(\mathcal{M} \models \exists \overline{x} (\varphi(\overline{x}, \overline{m}) \wedge \varphi_i(x_0, \overline{m})) \right)$ (вследствие регулярности, i_0 определяется Σ-формулой в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$). Поскольку $\Phi(x_0, \overline{m})$ истинна не более чем на одном элементе, то

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in M^{n-1} \mid \mathcal{M} \models \models \exists x_0(\varphi(\overline{x}, \overline{m}) \wedge \varphi_{i_0}(x_0, \overline{m}))\}.$$

По индукции находится Σ-формула $\Psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{y})$, выделяющая из Y единственный элемент. Искомый предикат Q определяется Σ-формулой $\Phi(x_0, \overline{y}) \wedge \Psi(x_1, \ldots \ldots, x_{n-1}, \overline{y})$ с тем же набором параметров. Лемма доказана.

Таким образом, если **M** — модель регулярной теории, то имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Для* HF($\mathcal{M}$) *справедлива теорема об униформизации тогда и только тогда, когда* **M** *— модель с* Σ*-определимыми скулемовскими функциями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность непосредственно следует из леммы 4 и доказательства теоремы 1.

Покажем необходимость. Определим двуместный Σ-предикат G так:

$$\langle a, x\rangle \in G \iff (a = \langle[\varphi], x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle) \wedge \wedge \Sigma\text{-}Sat([\varphi], \langle x, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle).$$

По условию, существует Σ-функция F, униформизующая G. Пусть $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ — произвольная формула сигнатуры σ. Вследствие регулярности, эффективно находится эквивалентная ей $\exists$-формула $\psi(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Функция

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \lambda x_1 \ldots . \lambda x_{n-1} . F(\langle[\psi], x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle)$$

будет скулемовской функцией для формулы φ. Теорема доказана.

Плотный линейный порядок без концов **L** может служить примером модели регулярной теории, для которой в HF(**L**) не выполняется теорема об униформизации (этот факт тривиально следует из формульной неразличимости в **L** любых двух одинаково упорядоченных кортежей). С другой стороны, формульные подмножества полей **R** и $\mathbf{Q}_p$ имеют довольно много общих свойств. В частности, справедливо следующее утверждение (см. [4, 5]):

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Всякое непустое формульное подмножество K либо конечно, либо имеет непустую внутренность* ($K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_p$).

Исходя из этого свойства, можно предложить общий для $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}_p$ способ определения скулемовских функций, который будет эффективным в интуитивном понимании и ,следовательно, может быть сформулирован в терминах Σ-определимости скулемовских функций в соответствующих надстройках. Вследствие общности, ограничимся рассмотрением поля $\mathbf{Q}_p$ (для $\mathbf{R}$ рассуждения аналогичны).

ЛЕММА 5. *$\mathbf{Q}_p$ является моделью с Σ-определимыми скулемовскими функциями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi(x,\overline{y})$ — произвольная формула сигнатуры $\sigma = \langle +,\cdot,0,1,p\rangle$ и пусть P — предикат, определяемый этой формулой с набором параметров $\overline{a}$, т. е. $x \in P \iff Q_p \models \Phi(x,\overline{a})$.

Рассмотрим базисную в $\mathbf{Q}_p$ систему окрестностей рациональных точек $\{C_{q,k} | q \in \mathbf{Q},\ k \in \mathbf{N}\}$, где $C_{q,k} = \{q + p^k z | z \in \mathbf{Z}_p\}$. По предложению 1, при $P \neq \emptyset$ найдутся такие $q \in \mathbf{Q}$, $k \in \mathbf{N}$, что для $C_{q,k}$ выполняется один из следующих случаев:

1) $\exists! x \in C_{q,k}\, \Phi(x,\overline{a})$;

2) $\forall x \in C_{q,k}\, \Phi(x,\overline{a})$.

Величина $C_{q,k}$ определяется числами $q = (-1)^s m/n$ и k, где $s,m,n,k \in \mathbf{N}$. Поэтому однозначно определяется окрестность C_{q_0,k_0}, удовлетворяющая одному из двух случаев, для которой соответствующие числа s_0, m_0, n_0, k_0 — минимальные. Определим скулемовскую функцию f для формулы Φ так: положим $f(\overline{a}) \rightleftharpoons x_0$, где в первом случае в качестве x_0 выбирается единственная точка из $C_{q_0,k_0} \cap P$, а во втором случае полагаем $x_0 \rightleftharpoons q_0$.

Определенная таким образом функция f является Σ-функцией в $\mathrm{HF}(\mathbf{Q}_p)$. Действительно, учитывая формульность Z_p, имеем

$$x \in C_{q,k} \iff \mathbf{Q}_p \models \exists z((z \in Z_p) \land (x = q + p^k z)),$$

где p^k обозначает терм $\underbrace{p\cdot\ldots\cdot p}_{k}$, а q — терм $\dfrac{\overbrace{1+\ldots+1}^{m}}{\underbrace{1+\ldots+1}_{n}}$,
поэтому условие "$C_{q,k}$ удовлетворяет одному из двух случаев" описывается формулой $\Psi_{s,m,n,k}(\overline{a})$ сигнатуры σ, эффективно зависящей от s, m, n, k. Отсюда, вследствие регулярности, числа s_0, m_0, n_0, k_0 (как ординалы), а следовательно, и x_0 определяются Σ-формулой в $\mathrm{HF}(\mathbf{Q}_p)$. Лемма доказана.

В заключение автор благодарит своего научного руководителя Ю.Л. Ершова за ценные указания и замечания, в значительной степени определившие содержание данной работы.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Определимость и вычислимость. — Новосибирск: Научная книга, 1996.

2. BARWISE J. Admissible Sets and Structures. — Berlin: Springer–Veslag, 1975.

3. DRIES L, van den. Algebraic theories with definable Skolem functions // J. Symbolic Logic. — 1984. — Vol.49, № 3. — P. 625–630.

4. MACINTYRE A. On definable subsets of p-adic fields // J. Symbolic Logic. — 1976. — Vol.41, № 3. — P.605–610.

5. МАКИНТАЙР А. Модельная полнота. // Справочная книга по мат. логике. Ч. 1. — М.: Наука. — 1982. — С. 141–182.

Поступила в редакцию
26 декабря 1996 года