ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ОПРЕДЕЛИМОСТЬ

(Вычислительные системы)

1998 год Выпуск 161

УДК 510.5+519.68

ОБ ОПРЕДЕЛИМОСТИ МОДЕЛИ В НАСЛЕДСТВЕННО КОНЕЧНОМ ДОПУСТИМОМ МНОЖЕСТВЕ[1]

А.Н.Хисамиев

Ю.Л.Ершовым в [1] введено понятие Σ–определимости модели в допустимом множестве и найден [2] критерий Σ–определимости несчетной модели $\mathcal{M}$ в допустимом множестве HF(L) для плотного линейного порядка без концов. Эти и другие результаты по определимости, а также все необходимые сведения по допустимым множествам можно найти в монографии Ю.Л.Ершова [3]. В [4] автором введено понятие внутренне перечислимой модели $\mathcal{M}$ и получен критерий Σ–определимости счетной модели $\mathcal{N}$ в HF($\mathcal{M}$). Данная работа продолжает [4]. В ней приведено одно необходимое условие Σ–определимости счетной модели $\mathcal{N}$ в допустимом множестве HF($\mathcal{A}$), и для одного класса моделей $\mathcal{M}$ получен критерий Σ–определимости модели $\mathcal{N}$ в HF($\mathcal{M}$). В дальнейшем рассматриваются лишь счетные модели конечных сигнатур. Введем некоторые определения и обозначения. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество конечных ординалов, которое содержится в любом допустимом множестве; $\omega^* = \{0^*, 1^*, \ldots\}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathcal{M} =< M, Q_1, \ldots, Q_r >$, $\mathcal{N} =< N, P_1, \ldots, P_s >$ — модели. Отображение $\mu : \omega \to N$ множества ω на N называется

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96-01-01525.

нумерацией модели $\mathcal{N}$, а пара $(\mathcal{N},\mu)$ — нумерованной моделью. Для пары $(\mathcal{N},\mu)$ положим:

$$=^{\mu} \rightleftharpoons \{< n, m > | \mathcal{N} \models \mu n = \mu m\},$$

$$P_i^{\mu} \rightleftharpoons \{< m_1, \ldots, m_{n_i} > | \mathcal{N} \models P_i(\mu m_1, \ldots, \mu m_{n_i})\},$$

$$\mathcal{N}_{\mu} \rightleftharpoons < \omega, P_1^{\mu}, \ldots, P_s^{\mu} > .$$

Пусть $(\mathcal{M},\nu)$, $(\mathcal{N},\mu)$ — нумерованные модели. Если предикаты $=^{\mu}$, P_i^{μ}, $1 \le i \le s$, рекурсивны относительно предикатов $=^{\nu}$, Q_j^{ν}, $1 \le j \le r$, то будем говорить, что пара $(\mathcal{N},\mu)$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M},\nu)$. Модель $\mathcal{N}$ называется рекурсивной относительно нумерованной модели $(\mathcal{M},\nu)$, если существует такая нумерация μ модели $\mathcal{N}$, что пара $(\mathcal{N},\mu)$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M},\nu)$. Пусть S^* — подмножество множества ω^* и $id: \omega \to \omega^*$, $id(n) = n^*$. Будем говорить, что модель $\mathcal{N}$ рекурсивна относительно множества S^*, если модель $\mathcal{N}$ рекурсивна относительно нумерованной модели $(< \omega^*, S^* >, id)$. Для нумерованной модели $(\mathcal{M},\nu)$ через $\mathcal{M}_{\nu}^*$ обозначим модель, основным множеством которой является множество ω^*, а отображение $id: \omega \to \omega^*$ есть изоморфизм моделей $\mathcal{M}_{\nu}$ и $\mathcal{M}_{\nu}^*$. Пусть $\mathcal{M}_{\nu}'$ — модель, которая получена из модели $\mathcal{M}_{\nu}$ добавлением в сигнатуру операции $'$ прибавлением 1.

В [4] введены следующие понятия Σ–нумерации и внутренне перечислимой модели. Если нумерация ν модели $\mathcal{M}$ является Σ–функцией в допустимом множестве HF$(\mathcal{M})$, то ν называется Σ–нумерацией модели $\mathcal{M}$. Если существует Σ–нумерация ν модели $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ называется внутренне перечислимой моделью. Легко проверить, что справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нумерация $id: \omega \to \omega^*$ есть Σ–нумерация модели $(\mathcal{M}_{\nu}')^*$.

Для дальнейшего нам необходима следующая

ТЕОРЕМА А [4]. *Пусть* $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ *— не более чем счетные модели и* ν_2 *—* Σ*-нумерация модели* $\mathcal{M}_2$. *Тогда модель* $\mathcal{M}_1$ Σ*-определима в* $\mathrm{HF}(\mathcal{M}_2)$ *тогда и только тогда, когда существует такая нумерация* ν_1 *модели* $\mathcal{M}_1$, *что пара* $(\mathcal{M}_1, \nu_1)$ *рекурсивна относительно* $(\mathcal{M}_2, \nu_2)$.

Следующее предложение даст необходимое условие Σ-определимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть модель* $\mathcal{N}$ Σ*-определима в допустимом множестве* $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$. *Тогда для любой нумерации* ν *модели* $\mathcal{M}$ *модель* $\mathcal{N}$ *рекурсивна относительно пары* $(\mathcal{M}, \nu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть модель $\mathcal{N}$ Σ-определима в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$ и ν — некоторая нумерация модели $\mathcal{M}$. Модель $\mathcal{N}$ также Σ-определима в допустимом множестве $\mathrm{HF}((\mathcal{M}'_\nu)^*)$. По замечанию 1 модель $(\mathcal{M}'_\nu)^*$ Σ-перечислима.

По теореме А получаем, что модель $\mathcal{N}$ рекурсивна относительно нумерованной модели $((\mathcal{M}'_\nu)^*, id)$. Тогда она рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M}, \nu)$.

ТЕОРЕМА. *Пусть* S *— подмножество натуральных чисел и для модели* $\mathcal{M}$ *выполнены условия:*

1) $\mathcal{M}$ *рекурсивна относительно множества* $S^* = \{s^* | s \in S\}$;

2) *множество* S Σ*-определимо в* $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$.

Тогда модель $\mathcal{N}$ Σ*-определима в допустимом множестве* $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$ *тогда и только тогда, когда она рекурсивна относительно множества* S^*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. Пусть ν такая нумерация модели $\mathcal{M}$, что пара $(\mathcal{M}, \nu)$ рекурсивна относительно множества S^* и модель $\mathcal{N}$ Σ-определима в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$. По предложению модель $\mathcal{N}$ рекурсивна относительно пары $(\mathcal{M}, \nu)$, а следовательно, и относительно множества S^*.

Достаточность Пусть модель $\mathcal{N}$ рекурсивна относительно множества S^*. Тогда существует такая нумерация μ модели $\mathcal{N}$, что пара $(\mathcal{N}, \mu)$ рекурсивна относительно пары $(< \omega^*, S^* >, id)$.

Отсюда имеем, что предикаты $=^\mu$, $P_1^\mu, \ldots, P_s^\mu$ рекурсивны относительно множества S. Тогда характеристические функции этих предикатов получаются из базисных функций сложения, умножения, отношения " $<$ " и множества S путем конечного числа применений операций суперпозиции и минимизации. По условию теоремы множество S Σ–определимо в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$. Отсюда стандартными рассуждениями получаем, что характеристические функции предикатов $=^{\mu}$, P_i^{μ}, $1 \le i \le s$, являются Σ–функциями. Следовательно, эти предикаты являются Δ–предикатами в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$ и модель $\mathcal{N}$ Σ–определима в $\mathrm{HF}(\mathcal{M})$. Теорема доказана.

Приведем пример применения этой теоремы.

Пусть группа G есть счетная прямая сумма циклических групп простых порядков, т.е.

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z_{q_i},$$

где q_i — некоторое простое число. Характеристикой $\chi(G)$ группы G называется множество

$$\chi(G) = \{[q, m] | \exists i_1 \ldots i_m (q_{i_1} = \cdots = q_{i_m} = q)\},$$

где $[q, m]$ — номер пары $< q, m >$. Легко видеть, что группа G рекурсивна относительно множества $\chi(G)$. Покажем, что множество $\chi(G)$ Σ–определимо в $\mathrm{HF}(G)$. Обозначим через a_{qm} множество всех ненулевых функций $f : m \to q$, $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $\exists i \in m$ $(f(i) \ne 0)$. Пусть P — множество всех простых чисел. Покажем, что множество $F = \{a_{qm} | q \in P, m \in \omega\}$ Σ–определимо в $\mathrm{HF}(G)$. Для этого сперва докажем, что это множество Σ–определимо в $\mathrm{HF}(\emptyset)$. В [6, с.48] определена нумерационная функция $e : \omega \to \mathrm{HF}(\emptyset)$ и доказано, что она является Σ–функцией. Легко понять, что множество S e–номеров всех элементов множества F рекурсивно. По теореме [6, с. 47], множество S Δ_1–определимо в $\mathrm{HF}(\emptyset)$. Отсюда и множество F Σ–определимо в $\mathrm{HF}(\emptyset)$. Допустимое множество $\mathrm{HF}(\emptyset)$ Σ–определимо в $\mathrm{HF}(G)$. Тогда и множество F Σ–определимо в $\mathrm{HF}(G)$ некоторой формулой $\Psi(x)$. Введем функцию $f : \omega \times G \to G$ следующей

Σ-рекурсией в $\mathbf{HF}(G)$: $f(0,x)=\Theta$, $f(n+1,x)=f(n,x)+x$, где Θ — нулевой элемент группы G. Тогда f является Σ-функцией. Пусть предикат Funct, выделяющий конечные функции, операции $p_l^*(f)$, $p_\Gamma^*(f)$ соответственно равные области определения и области значения функции f, определены так же, как в [2, с.78]. Нетрудно проверить, что множество $\overline{\chi(G)}=\{<q,m>\,|[q,m]\in\chi(G)\}$ определяется следующей Σ-формулой:

$$\begin{gathered}<q,m>\in\overline{\chi(G)}\iff\exists g((\mathrm{Funct}(g)\wedge p_l^*(g)=m\wedge\\ \wedge\, p_\Gamma^*(g)\subseteq G\wedge\forall i\in m(f(q,g(i))=\Theta\wedge g(i)\neq\Theta))\wedge\\ \wedge\,\exists a(\Psi(a))\wedge\forall\varphi\in a(p_l^*(\varphi)=m\wedge p_\Gamma^*(\varphi)\subseteq q\wedge\\ \wedge\,\exists h(\mathrm{Funct}(h)\wedge p_l^*(h)=m\wedge h(0)=f(\varphi(0),g(0))\wedge\\ \wedge\,\forall i\in m(i\neq0\to h(i)=h(i-1)+f(\varphi(i),g(i))\wedge\\ \wedge\, h(m-1)\neq\Theta)))).\end{gathered}$$

Отсюда и из Σ-определимости нумерационной функции [,] в $\mathbf{HF}(G)$ получаем, что множество $\chi(G)$ также Σ-определимо в $\mathbf{HF}(G)$. Следовательно, группа G и множество $\chi(G)$ удовлетворяют условию теоремы. Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть группа G разлагается в прямую сумму циклических групп простых порядков. Тогда модель $\mathcal{M}$ Σ-определима в допустимом множестве $\mathbf{HF}(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ рекурсивна относительно характеристики $\chi(G)$ группы G.*

Покажем, что условие 2 теоремы существенно. Пусть Σ_n^0 — классы арифметической иерархии. Класс Σ_1^0 совпадает с классом рекурсивно-перечислимых множеств. Пусть множество $S\subseteq\omega$ такое, что выполнены условия:

1) $S\in\Sigma_2^0\setminus\Sigma_1^0$;

2) существует такая рекурсивная функция $f(i,x)$, для которой справедливо:

а) для любого $i\in\omega$ функция $\lambda x f(i,x)$ не убывает;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}f(i,x)=m_i$, $\quad m_0<m_1<\cdots;\quad m_i\in S$.

Тогда согласно [5] p-группа $G(S)=\bigoplus\limits_{m\in S}Z_{p^m}$, где Z_{p^m} — циклическая группа порядка p^m, конструктивизируема. Тогда имеем (см. [1]), что модель $\mathcal{M}$ Σ-определима в $\mathrm{HF}(G(S))$ тогда и только тогда, когда она конструктивизируема. Рассмотрим модель $\widetilde{\omega} = < \omega, 0, ', S >$. Из условия 1 определения множества S следует, что S не рекурсивное множество. Отсюда модель $\widetilde{\omega}$ не конструктивизируема, а следовательно, она не Σ-определима в $\mathrm{HF}(G(S))$. Так как группа $G(S)$ конструктивизируема, то она рекурсивна относительно множества S^*. Поэтому условие 1 теоремы для модели $G(S)$ и множества S выполнено. Очевидно, что модель $\widetilde{\omega}$ рекурсивна относительно множества S^*. Таким образом, теорема для модели $\widetilde{\omega}$ не справедлива. Отсюда следует, что условие 2 теоремы существенно.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-определимость в допустимых множествах //Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 4. — С. 792–795.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Определимость в наследственно конечных надстройках //Докл. РАН. — 1995. — Т. 340, № 1. — С. 12–14.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Определимость и вычислимость. — Новосибирск: Научная книга, 1996. — 286 с. (Сибирская школа алгебры и логики).

4. ХИСАМИЕВ А.Н. Σ-нумерация и Σ-определимость //Структурные алгоритмические свойства вычислимости. — Новосибирск, 1996. — Вып. 156: Вычислительные системы. — С. 44–58.

5. ХИСАМИЕВ Н.Г. Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп //Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. — 1981. — № 1. — С. 51–55.

6. BARWISE J. Admissible Sets and Structures. — Berlin: Springer-Verlag, 1975. — 383 p.

Поступила в редакцию
2 июня 1997 года