ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
(Вычислительные системы)
1998 год Выпуск 161

УДК 510.5

ГИПЕРАРИФМЕТИЧЕСКАЯ АВТОУСТОЙЧИВОСТЬ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР[1]

А.В.Ромина

1. Предварительные сведения

Поскольку речь почти всегда будет идти о булевых алгебрах, введем несколько определений и обозначений, относящихся к булевым алгебрам. Естественный порядок на булевой алгебре: $a \leq b \leftrightarrow a \cap b = a$. Через $F_\alpha(\mathcal{A})$ обозначим α–й итерированный идеал Фреше.

В дальнейшем, если из контекста ясно, о какой алгебре идет речь, будем писать просто F_α.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рангом Фреше булевой алгебры $\mathcal{A}$ называется первый ординал $\rho(\mathcal{A}) = \alpha$ такой, что $F_\alpha = F_{\alpha+1}$.

Известно, что ранг Фреше суператомной булевой алгебры является непредельным ординалом. Типом суператомной булевой алгебры называется пара $\tau(\mathcal{A}) = (\alpha + m)$, где $\rho(\mathcal{A}) = \alpha + 1$ и m — число атомов в $\mathcal{A}/F_\alpha$. Счетная суператомная булева алгебра определяется своим типом с точностью до изоморфизма.

На основе топологических методов Кетоненом была получена характеризация типов изоморфизмов булевых алгебр [7]. Затем Ю.Л.Ершов [3] алгебраическими методами получил редукцию проблемы изоморфизма для класса

---

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96-01-01525.

дистрибутивных решеток с относительными дополнениями (алгебр Ершова). Приведем здесь его характеризацию для булевых алгебр.

Пусть $\rho(A) = \gamma$. Полагаем $E_\alpha = \{x \in A|$идеал$(x)/F_\alpha \cap \cap F_\gamma/F_\alpha$— главный$\}$. Определим аддитивную функцию $\sigma : A \to \gamma + 1$, полагая $\sigma(x) = \alpha$ первый ординал такой, что $x \in E_\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Типом булевой алгебры A называется тройка (ρ, γ, m), где $\rho = \rho(A), \gamma = \sigma(1)$ и m равно числу атомов в A/F_α, если $\rho = \alpha + 1 > \gamma$, и нулю — в противном случае.

Рассмотрим $B = A/F_\rho$. Определим аддитивную функцию g из B в $\gamma + 1$, полагая $g(x/F_\rho) = \sigma(x)$.

Ю.Л.Ершов доказал, что $A_0 \cong A_1$ тогда и только тогда, когда их типы совпадают и существует автоморфизм безатомной булевой алгебры φ такой, что $\forall x g_0(x) = = g_1(\varphi(x))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейно упорядоченным базисом булевой алгебры A называется линейно упорядоченное подмножество A, порождающее A.

Известно, что каждая счетная булева алгебра имеет линейно упорядоченный базис и изоморфна его алгебре полуинтервалов. Более того, каждая B–конструктивизация B–конструктивной булевой алгебры эквивалентна B–конструктивизации алгебры полуинтервалов некоторого B–конструктивного линейно упорядоченного множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Двоичным деревом называется нижняя полурешетка с минимальным элементом, в которой каждый элемент имеет ровно двух наследников или максимальный и каждый начальный сегмент является конечным линейно упорядоченным множеством. Дерево без максимальных элементов называется полным.

Будем представлять двоичные деревья множествами конечных последовательностей из нулей и единиц $(\tau, \sigma, \rho, \ldots)$. При этом $\tau \leq \sigma$, если τ — начальный сегмент

σ. Через $\tau * \sigma$ обозначим конкатенацию последовательностей τ и σ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть T — двоичное дерево. Построим отображение из T в безатомную булеву алгебру: полагаем $\varphi(0) = 1$. Выберем для каждой $\sigma \in T$ $\varphi(\sigma)$ так, чтобы если $\sigma * 0 \in T$, то $\varphi(\sigma * 0) \cup \varphi(\sigma * 1) = \varphi(\sigma)$, $\varphi(\sigma * 0) \cap \cap \varphi(\sigma * 1) = 0$. Будем рассматривать подалгебру безатомной алгебры, порожденную $\varphi(T)$.

Каждая B-конструктивная булева алгебра представляется в виде булевой алгебры, порожденной B-конструктивным двоичным деревом.

Все необходимые сведения о булевых алгебрах можно найти в [1].

Теперь введем необходимые понятия, относящиеся к Δ_1^1-конструктивности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Модель $\mathcal{M} = \langle M; P_i^{n_i} \rangle$ называется Δ_1^1-конструктивизируемой, если существуют нумерация $\nu : \omega \to M$ такая, что $\{(x, y) | \nu(x) = \nu(y)\} \in \Delta_1^1$ и $\{\overline{x} | \ P_i(\nu(\overline{x}))\} \in \in \Delta_1^1$. При этом пара $\langle \mathcal{M}, \nu \rangle$ называется Δ_1^1-конструктивизацией $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Две Δ_1^1-конструктивизации $\langle \mathcal{M}, \nu_0 \rangle$ и $\langle \mathcal{M}, \nu_1 \rangle$ называются Δ_1^1-эквивалентными, если существуют гиперарифметическая функция $f : \omega \to \omega$ и автоморфизм φ модели $\mathcal{M}$ такие, что $\forall x(\varphi(\nu_0(x)) = \nu_1(f(x)))$. Δ_1^1-конструктивизируемая модель называется Δ_1^1-автоустойчивой, если любые две ее Δ_1^1-конструктивизации Δ_1^1-эквивалентны.

2. Δ_1^1-конструктивизируемые булевы алгебры

Здесь, в основном, рассматриваются вопросы Δ_1^1-автоустойчивости Δ_1^1-конструктивизируемых булевых алгебр. Поэтому начнем с критерия.

ТЕОРЕМА 1 (критерий Воота для эквивалентности Δ_1^1-конструктивизаций булевых алгебр). *Пусть $\langle \mathcal{A}_0, \nu_0 \rangle$ и $\langle \mathcal{A}_1, \nu_1 \rangle$ — Δ_1^1-конструктивные булевы алгебры. Пусть существует Δ_1^1-множество $S \subseteq A_0 \times A_1$, т.е. $\{(n, m) | \ (\nu(n), \nu(m)) \in \in S\} \in \Delta_1^1$ такое, что*

1) $(1,1)\in S$,

2) $(a,b)\in S\to(a=0\leftrightarrow b=0)$,

3) $(a,b)\in S\to\forall x\le a\exists y\le b((x,y)\in S\ \&\ (a-x,b-y)\in S)$,

4) $(a,b)\in S\to\forall y\le b\exists x\le a((x,y)\in S\ \&\ (a\setminus x,b\setminus y)\in S)$.

Тогда эти Δ^1_1-конструктивизации эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\langle A_0,\nu_0\rangle$ и $\langle A_1,\nu_1\rangle$ — Δ^1_1-конструктивны, то они конструктивны с некоторыми оракулами H_{α_0} и H_{α_1} соответственно. Если S — Δ^1_1-множество, то оно рекурсивно относительно некоторого оракула H_{α_2}. Пусть $\gamma=\max\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\}$. Тогда $\langle A_0,\nu_0\rangle$, $\langle A_1,\nu_1\rangle$ конструктивны относительно H_γ и S рекурсивно относительноH_γ. По релятивизованному критерию Воота [2], для конструктивизаций булевых алгебр эти конструктивизации эквивалентны относительно H_γ (в степени Δ_γ), следовательно, Δ^1_1-эквивалентны. Очевидно, что из эквивалентности конструктивизаций следует существование такого множества.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть α — конструктивный ординал; B — α-атомная Δ^1_1-конструктивизируемая булева алгебра и B/F_α — Δ^1_1-автоустойчива. Тогда B Δ^1_1-автоустойчива.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть B — Δ^1_1-конструктивная булева алгебра и α — конструктивный ординал. Тогда $\forall\gamma\le$ $\le\alpha\{n|\nu(n)\in F_\gamma\}\in\Delta^1_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, нетрудно показать, что это Π^1_1-множество (по теореме Ганди [6]). С другой стороны, можно построить конструктивную булеву алгебру B_{ω^γ} и $\nu(n)\in F_\gamma$ равносильно существованию изоморфизма между $(\nu(n))$ и (b) для некоторого B_{ω^γ}, а значит, это Σ^1_1-множество.

Вернемся к доказательству следствия. Пусть $\langle B,\nu_0\rangle$, $\langle B,\nu_1\rangle$ — две различные Δ^1_1-конструктивизации B. Рассмотрим индуцированные конструктивизации, эквивалентные по условию: $\langle B/F_\alpha,\overline{\nu}_0\rangle$ и $\langle B/F_\alpha,\overline{\nu}_1\rangle$, $\overline{\nu}_i(n)=$ $=\nu_i(n)/F_\alpha$. Тогда существует Δ^1_1-множество S_0, удовлетворяющее условиям 1–4 критерия Воота [2]. Рассмотрим $S=\{(x,y)|(x=0\leftrightarrow y=0)\ \&\ (x\in F_\alpha\leftrightarrow(y\in F_\alpha\ \&\ \tau(x)=$ $=\tau(y)))\ \&\ (c(x)\in F_\alpha\leftrightarrow(c(y)\in F_\alpha\ \&\ \tau(c(x))=\tau(c(y))))\ \&$ $\&\ (x/F_\alpha,y/F_\alpha)\in S_0\}$. Очевидно, что S — Δ^1_1-множество, также удовлетворяющее всем условиям критерия Воота.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует Δ_1^1-конструктивизируемая неавтоустойчивая булева алгебра;*

2) *существует Δ_1^1-конструктивизируемая неавтоустойчивая безатомная булева алгебра с выделенным идеалом $\langle B, I\rangle$;*

3) *существует Δ_1^1-конструктивизируемая неавтоустойчивая булева алгебра $\mathcal{A}$ ранга Фреше $\rho(\mathcal{A}) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

3 → 1. Очевидно.

1 → 2. Пусть существует Δ_1^1-конструктивизируемая, неавтоустойчивая булева алгебра. Тогда она эквивалентна алгебре, порожденной Δ_1^1-конструктивным линейным порядком. Пусть $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ – Δ_1^1-конструктивные линейные порядки, соответствующие ее неэквивалентным конструктивизациям. Рассмотрим $\mathcal{L}_i' = \langle L_i \cup \{(l+q) | \exists l' ([l,l') — \text{атом } \mathcal{B}_{\mathcal{L}_i}), q \in (0,1)\}; \ \leq_i \cup \{(x,y) | ((x \in L_i \,\&\, y = l+q \,\& \,\& \, x \leq_i l) \vee (x = l+q \,\&\, y \in L_i \,\&\, l <_i y) \vee (x = l_0 + q_0 \,\& \,\& \, y = l_1 + q_1 \,\&\, (l_0 <_i l_1 \vee (l_0 = l_1 \,\&\, q_0 \leq q_1)))))\}\rangle$. Несложно показать, что это Δ_1^1-конструктивный линейный порядок. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}_{\mathcal{L}_i'}$ с выделенным идеалом I_i, порожденным полуинтервалами вида $[l+q_0, l+q_1)$, где $q_0 \leq q_1$. Ясно, что она Δ_1^1-конструктивна. С помощью критерия Воота для изоморфизма булевых алгебр [1] доказывается, что $\langle \mathcal{B}_{\mathcal{L}_0}, I_0\rangle \cong \langle \mathcal{B}_{\mathcal{L}_1}, I_1\rangle$. Если эти конструктивизации эквивалентны, то эквивалентны и соответствующие конструктивизации фактор-алгебр. А они неэквивалентны по условию.

2 → 3. Пусть существует неавтоустойчивая безатомная булева алгебра с выделенным идеалом. Возьмем две ее неэквивалентные конструктивизации и построим по ним соответствующие Δ_1^1-конструктивные порождающие деревья T_0, T_1.

По индукции построим отображения: $f_i: \quad T_i \to T$, где T — полное дерево, а $i \in \{0,1\}$:

1) $f_i(0) = 0$,

2) если $\sigma \notin I_i$, то $f_i(\sigma * j) = f_i(\sigma) * j * 0$,

3) если $\sigma \in I_i$, то $f_i(\sigma * j) = f_i(\sigma) * j$.

Полагаем $T_i^* = \{\tau | \exists \sigma \in T_i(\tau = f_i(\sigma) \vee (\sigma \notin I_i \ \& \ \tau \in \in \{f_i(\sigma) * 0, f_i(\sigma) * 01, \quad f_i(\sigma) * 11\}))\}$. Ясно, что получены Δ_1^1-деревья. Породим полученными деревьями булевы алгебры. Они будут иметь ранг Фреше равный 1 и одинаковые характеристики Ершова-Кетонена. Поэтому они изоморфны. Если их конструктивизации эквивалентны, то эквивалентны и соответствующие конструктивизации фактор-алгебр с выделенным идеалом (так как безатомные элементы образуют Δ_1^1-множество).

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе Эша [5] указан пример рекурсивной булевой алгебры, имеющей по крайней мере две конструктивизации не Δ_α-эквивалентные для любого $\alpha < \omega_1^{CK}$, а значит и не Δ_1^1-эквивалентные. Указанная им алгебра есть $B_{\omega_1^{CK} \times (\eta+1)}$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что класс всех Δ_1^1-конструктивизаций этой алгебры не лежит в Δ_1^1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Класс всех Δ_1^1-конструктивизаций алгебры $B_{\omega_1^{CK} \times (\eta+1)}$ не лежит в Δ_1^1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{R}$ — класс всех Δ_1^1-конструктивизаций алгебры $B_{\omega_1^{CK} \times (\eta+1)}$. Предположим, что он вычислим. Рассмотрим множество формул $\varphi_\alpha = (B - \alpha\text{-атомная булева алгебра})$ и $\psi = (\langle A, \nu_A \rangle$ не эквивалентна ни одной Δ_1^1-конструктивизации из $\mathcal{R})$; $\Gamma = \bigcup_{0 < \alpha < \omega_1^{CK}} \{\varphi_\alpha\} \cup \{\psi\}$. Рассмотрим $f : \mathrm{Ord} \to \Gamma$, полагая $f(0) = \psi$; $f(\alpha) = \varphi_\alpha$. Очевидно, f — Σ-функция, а Γ — Σ-множество на HIP_ω. Пусть $\Gamma_0 \subseteq \Gamma - HYP_\omega$-конечно. Тогда (по принципу Σ-ограниченности) существует $\beta < \omega_1^{CK}$ такое, что $\Gamma_0 \subseteq \{f(\alpha) | \alpha < \beta\}$. Поэтому $\varphi_\beta \ \& \ \psi \vdash \Gamma_0$ и, следовательно, $B_{\omega^\beta} \models \Gamma_0$. По теореме компактности Барвайса [6] существует ω_1^{CK}-атомная Δ_1^1-конструктивная булева алгебра $\langle A, \nu_A \rangle$ не Δ_1^1-эквивалентная ни одной алгебре из $\mathcal{R}$.

Легко заметить, что $\rho(\mathcal{A}) \leq \omega_1^{\mathrm{CK}}$ (например, сославшись на теорему Ганди [6]). Поэтому $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}_{\omega_1^{\mathrm{CK}} \times (\eta+1)}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Существует Δ_1^1-конструктивизируемая неавтоустойчивая булева алгебра ранга Фреше, равного единице.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С.С.Гончарову за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. — Новосибирск: 1996. — 316 с.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: 1980. — 415 с.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Дистрибутивные решетки с относительными дополнениями //Алгебра и логика. — 1979. — Т.18. № 6. — С. 680–722.

4. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: 1972. — 624 с.

5. ASH C.J. Categoricity in hiperarithmetical degrees //Ann. Pure Appl. Logic. — 1987. — Vol. 34, № 1. — P. 1–14.

6. BARWISE J. Admissible Sets and Structures. — Berlin: Springer-Verlag, 1975. — 383 p.

7. KETONEN J. The structure of countable Boolean algebras //Ann. Math. — 1978. — Vol. 108, № 1. — P. 41–89.

Поступила в редакцию
21 июля 1997 года