ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
(Вычислительные системы)
1998 год Выпуск 161

УДК 519.49

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА И ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ

С.П.Белов

Рассмотрим множества B_1 и B_2, на которых задана некоторая "вычислительная процедура" P (возможно, в обобщенном виде), P "перерабатывает" объекты из B_1 в объекты из B_2.

Предположив, что на B_1 и B_2 заданы некоторые способы приближения объектов S_1 и S_2 соответственно: в рамках способа S_i, $i = 0, 1$, для произвольной последовательности $b_0, b_1, b_2, \ldots$ и объекта b из B_i, мы можем сказать: приближает ли данная последовательность b_n объект b или нет.

Предположим, что последовательность $b_0^*, b_1^*, \ldots$ из B_1 приближает b^* из B_1 по способу S_1.

Процедура P "перерабатывает" последовательность $b_0^*, b_1^*, \ldots$ и b^* в последовательность $P(b_0^*), P(b_1^*), \ldots$ и $P(b^*)$ соответственно.

Интуитивно кажется естественным, что процедура P должна быть непрерывной, т.е. последовательность $P(b_0^*)$, $P(b_1^*), \ldots$ должна иметь предел по способу S_2 и он должен быть равен $P(b^*)$. В конце работы рассмотрены соответствующие примеры.

§ 1. Пространства с пределом

Рассмотрим множество натуральных чисел $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Напомним, что через M^N обозначается множество всех функций из N в M. Элементы M^N называются последовательностями. Последовательность $a \in N$ будем также представлять в виде $a_n, (a_n)_{n \in N}, a_0, a_1, a_2, \ldots$, если это не приводит к неточностям.

Последовательность $h' \in M^N$ будем называть подпоследовательностью последовательности $h \in M^N$, $h' \prec h$, если существует разнозначное отображение $r : N \to N$, сохраняющее порядок на натуральных числах и для любого $n \in N$ $h'(n) = h \circ r(n)$.

Пусть M — непустое множество и $L : M^N \times M \to \{0, 1\}$ — некоторое отображение.

Выделим следующие условия на L:

1) если $L(h, a) = 1$ и $L(h, b) = 1$, то $a = b$;

2) если для всех $n \in N$ $h(n) = a$, то $L(h, a) = 1$;

3) если $L(h, a) = 1$ и $h' \prec h$, то $L(h', a) = 1$;

4) если для любой последовательности $h' \prec h$ найдется последовательность $h'' \prec h'$ такая, что $L(h'', a) = 1$, то $L(h, a) = 1$;

5) для любой последовательности h' существуют $h'' \prec h'$ и $a \in M$ такие, что $L(h'', a) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пару $\mathcal{M} = (M, L)$ будем называть пространством с пределом, если выполнены условия 1–4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что последовательность h имеет $Lim_{\mathcal{M}}$-предел $\Leftrightarrow$ существует $a \in M$, такая, что $L(h, a) = 1$. В этом случае элемент a называется пределом последовательности h и обозначается через $Lim_{\mathcal{M}}(h)$.

Пусть $\mathcal{M} = (M, L)$ — пространство с пределом.

Для всех $X \subseteq M$ полагаем, что $C_{\mathcal{M}} = X \cup \{Lim_{\mathcal{M}}(h) | h \in M^N$ имеет $Lim_{\mathcal{M}}$-предел$\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Полагаем $Ltop^{\mathcal{M}} = (M, \tau)$, где $\tau = \{M \setminus X | X \subseteq M,\ X = C_{\mathcal{M}}(X)\}$.

Если из контекста понятно, о каком пространстве идет речь, символ $\mathcal{M}$ в записи $Lim_{\mathcal{M}}$, $C_{\mathcal{M}}$, $Ltop^{\mathcal{M}}$ будем опускать. В этом случае вместо "$Lim_{\mathcal{M}}$-предел" будем писать "предел".

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $\mathcal{M} = (M, L)$ — пространство с пределом, тогда:*

1) *если $L(h \circ r, a) = 1$, $r: N \to N$ — разнозначное отображение, $N \setminus Rang(r)$ — конечное множество, то $L(h, a) = 1$;*

2) *если $h, h_0, \ldots, h_n$ — последовательности из M, $Rang(h) = Rang(h_0) \cup \ldots \cup Rang(h_n)$ и $L(h_1, a) = \ldots = L(h_n, a) = 1$, то $L(h, a) = 1$;*

3) *если множество $A \subseteq M$ конечно, то $C(A) = A$.*

ТЕОРЕМА 1. *Для любого пространства с пределом $\mathcal{M} = (M, L)$ $Ltop^{\mathcal{M}}$ является топологическим пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $C(\emptyset) = \emptyset$ и $C(M) = M$, т.е. $M, \emptyset \in \tau$.

Пусть K — некоторая совокупность множеств $X \subseteq M$ такая, что $C(X) = X$. Покажем, что $C(\cap K) = \cap K$. Если $\cap K = \emptyset$, тогда $C(\cap K) = \cap K$. Предположим, что $\cap K \neq \emptyset$ и $a \in C(\cap K)$, тогда найдется последовательность $h: N \to \cap K$, имеющая предел и $a = Lim_{\mathcal{M}}(h)$. Рассмотрим произвольное множество $A \in K$. Поскольку $\cap K \subseteq A$ и $C(A) = A$, то $a = Lim_{\mathcal{M}}(h) \in A$, т.е. $a \in \cap K$ и $C(\cap K) \subseteq \cap K$.

Пусть $A_1, A_2 \subseteq M$, $C(A_1) = A_1$, $C(A_2) = A_2$. Покажем, что $C(A_1 \cup A_2) = A_1 \cup A_2$. Возьмем произвольный элемент $a \in C(A_1 \cup A_2)$. Существует последовательность $h: N \to A_1 \cup A_2$, имеющая предел такой, что $Lim(h) = a$. Очевидно, что $h^{-1}(A_1)$ либо $h^{-1}(A_2)$ бесконечно. Предположим, для определенности, первое. Пусть $g: N \to h^{-1}(A_1)$ — некоторая взаимно-однозначная функция, сохраняющая порядок на N, т.е. $h \circ g \prec h$. По условию 3, последовательность $h \circ g$ имеет предел и $a = Lim_{\mathcal{M}}(h) = Lim_{\mathcal{M}}(h \circ g)$. Поскольку $C(A_1) = A_1$, то $a = Lim_{\mathcal{M}}(h \circ g) \in A_1$. Получаем, что $C_{\mathcal{M}}(A_1 \cup A_2) = A_1 \cup A_2$.

Из доказанного следует, что $Ltop^{\mathcal{M}}$ — топологическое пространство.

СЛЕДСТВИЕ. *$C_{\mathcal{M}}$ является оператором замыкания в $Ltop^{\mathcal{M}}$, т.е. для любого $A \subseteq M$ $C_{\mathcal{M}}(A)$ — наименьшее по включению замкнутое в $Ltop^{\mathcal{M}}$ множество, содержащее A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. В случае, когда A конечно, утверждение соответствует п. 4 предложения 1.

2. Пусть $h \in M^N$, $A = Rang(h)$ — бесконечное множество, h имеет предел, $Lim(h) \notin A$.

Покажем, что A не замкнуто. От обратного предположим, что A замкнуто в $Ltop^{\mathcal{M}}$, т.е. существует $A_0 \subseteq A$, такое что $A = C_{\mathcal{M}}(A_0)$. Рассмотрим два случая:

а) предположим, что A_0 конечно, тогда $C_{\mathcal{M}}(A_0) = A_0 \neq A$;

б) предположим, что A_0 бесконечно. Пусть h_0 — последовательность из A_0, имеющая предел. Если $Rang(h_0)$ конечно, то $Lim_{\mathcal{M}}(h_0) \in A_0$, если $Rang(h_0)$ бесконечно, то $Lim_{\mathcal{M}}(h_0) = Lim_{\mathcal{M}}(h)$, при этом последнее реализуется для любой взаимно-однозначной функции $h_0 : N \to A_0$.

Получаем $Lim(h) \in A_0 \cup \{Lim_{\mathcal{M}}(h)\} = C_{\mathcal{M}}(A_0) = A$, т.е. $Lim(h) \in A$. По условию, $Lim(h) \notin A$. Таким образом, требуемого множества A_0 не существует, т.е. A не замкнуто в $Ltop$.

Поскольку $C_{\mathcal{M}}(A) = A \cup \{Lim_{\mathcal{M}}(h)\}$ замкнуто в $Ltop$, то $C_{\mathcal{M}}(A)$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

3. Пусть $A \subseteq M$ — произвольное множество, $h : N \to A$ — произвольная последовательность, имеющая предел. Поскольку $Rang(h) \subseteq A$, то наименьшее замкнутое множество X, содержащее A, содержит наименьшее замкнутое множество X', содержащее $Rang(h)$, т.е. по п.2 $Lim(h) \in Rang(h) \cup \{Lim_{\mathcal{M}}(h)\} = X' \subseteq X$. Получаем, что $C_{\mathcal{M}}(A) \subseteq X$. Поскольку $C_{\mathcal{M}}(A)$ замкнуто в $Ltop^{\mathcal{M}}$, то $C_{\mathcal{M}}(A) = X$.

Пусть $M_1 = (M_1, L_1)$, $M_2 = (M_2, L_2)$ — пространства с пределом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f : M_1 \to M_2$ называется Lim-непрерывной, если для любой последовательности $h \in M_1^N$, имеющей $Lim_{\mathcal{M}_1}$-предел, последовательность $f \circ h \in M_2^N$ имеет $Lim_{\mathcal{M}_2}$-предел и

$$f(Lim_{\mathcal{M}_1}(h)) = Lim_{\mathcal{M}_2}(f \circ h).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathcal{M}_1 = (M_1, L_1)$, $\mathcal{M}_2 = (M_2, L_2)$ — *пространства с пределом и* $f : M_1 \to M_2$ — Lim*-непрерывное отображение, тогда* f *является непрерывным отображением топологического пространства* $Ltop^{\mathcal{M}_1}$ *в* $Ltop^{\mathcal{M}_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \subseteq M_2$ — замкнутое множество в $Ltop^{\mathcal{M}_2}$. Покажем, что $f^{-1}(A)$ замкнуто в $Ltop^{\mathcal{M}_1}$. Пусть $h : N \to f^{-1}(A)$ — последовательность, имеющая $Lim_{\mathcal{M}_1}$-предел.

Поскольку функция f — Lim-непрерывна, последовательность $f \circ h : N \to A$ имеет $Lim_{\mathcal{M}_2}$-предел и $f(Lim_{\mathcal{M}_1}(h)) = Lim_{\mathcal{M}_2}(h \circ h)$. Так как A замкнуто, то, по следствию теоремы 1, $Lim_{\mathcal{M}_2}(f \circ h) \in A$, т.е.

$$Lim_{\mathcal{M}_1}(h) \in f^{-1}(Lim_{\mathcal{M}_2}(f \circ h)) \subseteq f^{-1}(A).$$

Получаем, что прообраз замкнутого множества замкнут, т.е. f — непрерывное отображение пространства $Ltop^{\mathcal{M}_1}$ в $Ltop^{\mathcal{M}_2}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\mathcal{M}_1 = (M_1, L_1)$, $\mathcal{M}_2 = (M_2, L_2)$ — *пространства с пределом и для* $\mathcal{M}_2$ *выполнено условие 5, тогда каждое непрерывное отображение* $f : M_1 \to M_2$ *пространства* $Ltop^{\mathcal{M}_1}$ *в* $Ltop^{\mathcal{M}_2}$ *является* Lim*-непрерывным отображением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : M_1 \to M_2$ — непрерывное отображение топологических пространств. Возьмем произвольную последовательность $h \in M_1^N$, имеющую $Lim_{\mathcal{M}_1}$-предел и последовательность $g \prec f \circ h$. Пусть $Lim\mathcal{M}_1(h) = a \in M_1$. По условию 5 (см. с. 59) найдутся $g_0 \prec g$ и $b \in M$ такие, что g_0 имеет $Lim_{\mathcal{M}_2}$-предел и $b = Lim_{\mathcal{M}_2}(g_0)$.

1. Если $g_0^{-1}(f(a))$ бесконечно, то $f(a) = Lim_{\mathcal{M}_2}(g_0) = b$.

2. Если $g_0^{-1}(f(a))$ конечно, то можно выбрать $g_1 \prec g_0$ таким образом, что $f(a) \notin Rang(g_1)$.

Множество $H = Rang(g_1) \cup \{Lim_{\mathcal{M}_2}(g_1)\}$ замкнуто в $Ltop^{\mathcal{M}_2}$. Поскольку f непрерывна, то $f^{-1}(H)$ замкнуто в $Ltop^{\mathcal{M}_1}$.

Найдется $h' \prec h$ такое, что $f \circ h' = g_1$. Поскольку $Rang(h') \subseteq f^{-1}(H)$, то $a = Lim_{\mathcal{M}_1}(h') \in f^{-1}(H)$.

Так как $f(a) \notin Rang(g_1)$, то $f(a) = Lim_{\mathcal{M}_2}(g_1) = b$.

Из пп. 1 и 2 получаем, что для любой последовательности $g \prec f \circ h$ найдется $g_0 \prec g$, имеющая $Lim_{\mathcal{M}_2}$-предел и $Lim(g_0) = f(a)$. По условию 4, $f \circ h$ имеет $Lim_{\mathcal{M}_2}$-предел и $Lim_{\mathcal{M}_2}(f \circ h) = f(a) = f(Lim_{\mathcal{M}_1}(h))$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\mathcal{M} = (M, L)$ — пространство с пределом, удовлетворяющее условию 5, тогда $atop^{\mathcal{M}}$ — счетно-компактное топологическое пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(U_n)_{n\in N}$ — последовательность замкнутых множеств из $Ltop^{\mathcal{M}}$, $U_{n+1} \subseteq U_n$, $\bigcap\limits_{n\in N} U_n = \emptyset$. Покажем, что существует конечная подпоследовательность $(U_{i_n})_{n\leq n_0}$ такая, что $\bigcap\limits_{n\leq n_0} U_{i_n} = \emptyset$.

Предположим, что это не так, тогда без ограничения общности можно считать, что $U_n \neq U_{n+1}$. Найдется последовательность $h = (a_n)_{n\in\omega}$ такая, что для всех $n \in N$ $a_n \in U_{n+1} \setminus U_n$. По условию 5 найдутся $h' \prec h$ и $a \in M$ такие, что h' имеет предел и $Lim(h') = a$. Для любого $n \in N$ найдется последовательность $h^{(n)} \prec h'$ такая, что $h(n) \in U_n^N$, т.е. $a = Lim(h') = Lim(h^{(n)}) \in U_n$. Получаем, что $a \in \bigcap\limits_{n\in N} U_n = \emptyset$ — противоречие. Из доказанного следует, что $Ltop^{\mathcal{M}}$ счетно-компактно.

Рассмотрим решетку $\mathcal{L} = \mathbf{L}, \leq_{\mathcal{L}}$, в которой $\mathbf{L}$ состоит из всех функций $L : M^N \times M \to \{0,1\}$ и для любых $L_1, L_2 \in \mathbf{L}$ $L_1 \leq_{\mathcal{L}} L_2 \Leftrightarrow$ для всех $h \in M^N$ и $a \in M$ $L_1(h,a) \leq L_2(h,a)$. Очевидно, $\mathcal{L}$ — полная решетка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\mathcal{L} = (\mathbf{L}, \leq_{\mathcal{L}})$ — решетка функций $L : M^N \times M \to \{0,1\}$, тогда для любой функции $L \in \mathcal{L}$ найдется $L^* \in \mathbf{L}$ такая, что*

1) $L \leq_{\mathcal{L}} L^*$;

2) *для L^* выполнены условия* 2–4; (см. с. 59);

3) L^* — *наименьшая функция по отношению $\leq_{\mathcal{L}}$ со свойствами пп.* 1 *и* 2.

§ 2. Аппроксимационные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пару $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$ будем называть аппроксимационным пространством, если $\chi = (M, \leq_{\chi})$ —

полная решетка, $\Delta \subseteq M$, для любого $a \in M$

$$a = sup\{\alpha \in \Delta | \alpha \leq_\chi a\}.$$

Множество Δ в данном случае будем называть базой аппроксимации.

Напомним, что ультрафильтр D называется неглавным, если не содержит конечных множеств. Для ультрафильтра D и множества $A \in D$ через $D|_A$ обозначается ультрафильтр $\{S \in D | S \subseteq A\}$.

Пусть $h \in X^N$. Рассмотрим произвольный неглавный ультрафильтр D на N. Полагаем

$$\lim_D{}^{\mathcal{A}} h = sup\{\alpha \in \Delta | \{n \in N | \alpha \leq_\chi h(n)\} \in D\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что последовательность $h : N \to M$ имеет аппроксимационный предел (*app*-предел) в $\mathcal{A}$, если существует $a \in M$ такое, что для любого неглавного ультрафильтра D на N $\lim_D{}^{\mathcal{A}} h = a$. В этом случае элемент a будем называть аппроксимационным пределом (*app*-пределом) в $\mathcal{A}$ и обозначать через $limapp^{\mathcal{A}} h$.

ЛЕММА 1. *Пусть $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$ — аппроксимационное пространство, $\chi = (M, \leq_\chi)$ и $h \in M^N$ и $b \in M$.*

Имеют место зависимости 5) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3), *где*

1) *h имеет app-предел и $limapp^{\mathcal{A}} h = b$;*

2) *для любого бесконечного множества $\Lambda \subseteq N$ и любой взаимно-однозначной функции $g : N \to \Lambda$ последовательность $h \circ g$ имеет app-предел и $limapp^{\mathcal{A}} h \circ g = b$;*

3) *существует $\Lambda \subseteq N$ и взаимно-однозначное отображение $g : N \to \Lambda$ такое, что $N \setminus \Lambda$ бесконечно, $h \circ g$ имеет app-предел и $limapp^{\mathcal{A}} h \circ g = b$;*

4) *$b = sup\{\alpha \in \Delta | \{n \in N | \alpha \leq_\chi h(n)\}$ бесконечно$\}$ и для любого $\alpha \in \Delta$ либо $\{n \in N | \alpha \leq_\chi h(n)\}$ конечно, либо $\{n \in N | \alpha \not\leq_\chi h(n)\}$ конечно;*

5) *h имеет app-предел, $limapp^{\mathcal{A}} h = b$ и для любых $\alpha \in \Delta$ и $X \subseteq M$ из того, что $\alpha \not\leq a$ для всех $a \in X$, следует $\alpha \not\leq supX$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

2) $\Rightarrow$ 1). Полагаем $\Lambda = N$ и $g: N \to N$ — тождественное отображение, тогда $h \circ g = h$ имеет *app*-предел и $b = limapp^{A} h \circ g = limapp^{A} h$.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $h \in X^N$, $\Lambda \subseteq N$ — бесконечное множество, $g: N \to \Lambda$ — взаимно-однозначная функция. Для любого $\alpha \in \Delta$ полагаем $X_\alpha = \{n \in N | \alpha \leq_X h(n)\}$ и $X'_\alpha = X_\alpha \cap N$.

Рассмотрим произвольный неглавный ультрафильтр D'' на N, тогда $D' = g(D'')$ — неглавный ультрафильтр на Λ (через $g(D'')$ обозначен ультрафильтр, индуцированный на N отображением g).

Очевидно $X \in D'' \Leftrightarrow g(X) \in D'$ для любого $X \subseteq N$. Заметим, что $D = \{X \subseteq N | X' \subseteq X$ для некоторого $X' \in D'\}$ — неглавный ультрафильтр на N и $D' = D|_N$.

Поскольку $\Lambda \in D$, то для любого $\alpha \in \Delta$

$$X_\alpha \in D \Leftrightarrow X_\alpha \cap N \in D' \Leftrightarrow X'_\alpha \in D',$$

откуда

$$\begin{aligned}\{\alpha \in \Delta | X_\alpha \in D\} &= \{\alpha \in \Delta | X'_\alpha \in D'\} = \\ &= \{\alpha \in \Delta | g^{-1}(M'_\alpha) \in D''\} = \\ &= \{\alpha \in \Delta | g^{-1}(\{n \in \Lambda | \alpha \leq_X h(n)\}) \in D''\} = \\ &= \{\alpha \in \Delta | \{m \in N | \alpha \leq_X h \circ g(m)\} \in D''\},\end{aligned}$$

т.е. $limapp^{A} h = \lim\limits_{D''}{}^{A} h \circ g$.

Поскольку $limapp^{A} h$ не зависит от D'', в силу произвольности неглавного ультрафильтра D'' получаем, что последовательность $h \circ g$ имеет *app*-предел и $b = limapp^{A} h = limapp^{A} h \circ g$.

Утверждение 1) $\Rightarrow$ 3) очевидно.

Покажем, что имеет место 3) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим произвольный неглавный ультрафильтр D на N. Поскольку D — неглавный ультрафильтр, то $\Lambda \in D$, т.е. для любого $X \subseteq N$ $X \in D \Leftrightarrow X \cap \Lambda \in D|_\Lambda$ и для любого $\alpha \in \Delta$.

$$\begin{aligned}\{n \in N | \alpha \leq_X h(n)\} \in D &\Leftrightarrow \{n \in \Lambda | \alpha \leq_X h(n)\} \in D|_N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{m \in N | \alpha \leq_X h \circ g(m)\} \in g^{-1}(D|_N).\end{aligned}$$

Поскольку $D' = g^{-1}(D|_N)$ — неглавный ультрафильтр на N, то $\lim\limits_{D}{}^{\mathcal{A}} h = \lim\limits_{D'}{}^{\mathcal{A}} h \circ g = limapp^{\mathcal{A}} h \circ g$. Отсюда следует, что h имеет *app*-предел и $limapp^{\mathcal{A}} h = limapp^{\mathcal{A}} h \circ g = b$.

4) $\Rightarrow$ 1). Заметим, что $\{\alpha \in \Delta |\ M_\alpha \in D\} = \{\alpha \in \Delta | M_\alpha$ бесконечно$\}$ для любого неглавного ультрафильтра D на N. Действительно, если $\alpha \in \Delta$ и $X_\alpha \in D$, то M_α бесконечно. Наоборот, если M_α бесконечно, то, по п. 4 леммы, $M_\alpha = N \setminus S$ для некоторого конечного $S \subseteq N$. Так как D неглавный, то $S \notin D$ и $X_\alpha \in D$.

Поскольку правая часть исходного равенства

$$\{\alpha \in \Delta | X_\alpha \in D\} = \{\alpha \in \Delta | X_\alpha \text{ бесконечно}\}$$

не зависит от D, получаем, что h имеет *app*-предел и

$$limapp^{\mathcal{A}} h = sup\{\alpha \in \Delta |\ M_\alpha \text{ бесконечно}\} = b.$$

5) $\Rightarrow$ 4). Пусть h имеет *app*-предел, $limapp^{\mathcal{A}} h = b$ и для любых $\alpha \in \Delta$, $X \subseteq M$ из $\alpha \not\leq a$ для всех $a \in X$ следует $\alpha \not\leq supX$. Предположим, что существует $\alpha_0 \in \Delta$ такое, что X_{α_0} и $\overline{X}_{\alpha_0}$ бесконечны, где $X_{\alpha_0} = \{n \in N | \alpha_0 \leq_\chi h(n)\}$, $\overline{X}_{\alpha_0} = \{n \in N | \alpha \not\leq_\chi h(n)\}$.

Пусть $g_1 : N \to X_{\alpha_0}$, $g_2 : N \to \overline{X}_{\alpha_0}$ — некоторые взаимно-однозначные функции. По доказанному выше $(1) \Rightarrow 2))$ получаем, что $h \circ g_1$ и $h \circ g_2$ имеют *app*-пределы и $limapp^{\mathcal{A}} h = limapp^{\mathcal{A}} h \circ g_1 = limapp^{\mathcal{A}} h \circ g_2$.

Поскольку $\alpha_0 \leq_\chi h \circ g_1(n)$ для всех $n \in N$, то

$$\alpha_0 \leq_\chi limapp^{\mathcal{A}} h \circ g = limapp^{\mathcal{A}} h.$$

С другой стороны,

$$\alpha_0 \not\leq_\chi sup\{h \circ g_2(n) | n \in N\} = limapp^{\mathcal{A}} h \circ g = limapp^{\mathcal{A}} h,$$

поскольку $\alpha_0 \not\leq_\chi h \circ g_2(n)$ для всех $n \in N$.

Получили противоречие, т.е. либо M_{α_0} конечно, либо $\overline{M}_{\alpha_0}$ конечно.

СЛЕДСТВИЕ. *Если для аппроксимационного пространства $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$, где $\chi = (M, \leq_\chi)$, имеет место: для любых*

$\alpha \in \Delta$ *и* $X \subseteq M$ *из того, что* $\alpha \not\leq a$ *для всех* $a \in X$ *следует* $\alpha \not\leq supX$, *тогда условия* 1) – 5) *эквивалентны.*

ЛЕММА 2. *Пусть* $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$ — *аппроксимационное пространство,* $\chi = (X, \leq_\chi)$, Δ — *бесконечное счетное множество,* D — *произвольный неглавный ультрафильтр на* N, *тогда для любой последовательности* $h \in X^N$ *найдется* $h_0 \prec h$, *имеющая app-предел и*

$$\lim_D{}^{\mathcal{A}} h = limapp^{\mathcal{A}} h_0 = sup\{\alpha \in \Delta | \{n \in N | \alpha \not\leq h(n) \text{ конечно }\}\},$$

при этом для любого $\alpha \in \Delta$ *одно из множеств* $\{n \in N | \alpha \leq h(n)\}$, $\{n \in N | \alpha \not\leq h(n)\}$ *конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\alpha \in \Delta$ полагаем

$$X_\alpha = \{n \in N | \ \alpha \leq_\chi \ h(n)\},$$

$$\overline{X}_\alpha = \{n \in N | \ \alpha \not\leq_\chi \ h(n)\},$$

$$\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta | \ X_\alpha \in D\},$$

$$\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta | \ \overline{X}_\alpha \in D\}.$$

Очевидно, что $\lim_D{}^{\mathcal{A}} h = sup\Delta_0$, $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \emptyset$, $\Delta_0 \cup \Delta_1 = \Delta$. Пусть последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ содержит все элементы из Δ. Определим индукцией последовательность $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ из D.

1) Если $\alpha_0 \in \Delta_0$, то $X^{(0)} = X_{\alpha_0}$, если $\alpha_0 \in \Delta_1$, то $X^{(0)} = \overline{X}_{\alpha_0}$.

2) Если $X^{(i)}$ определено, то:

если $\alpha_{i+1} \in \Delta_0$, то $X^{(i+1)} = X^{(i)} \cap X_{\alpha_{i+1}}$,

если $\alpha_{i+1} \in \Delta_1$, то $X^{(i+1)} = X^{(i)} \cap \overline{X}_{\alpha_{i+1}}$.

Заметим, что для всех $i \in N$ $\quad X^{(i+1)} \subseteq X^{(i)}$, $X^{(i)} \in D$.

Если $\alpha_i \in \Delta_0$, то $\alpha_i \leq h(k)$ для всех $k \in X^{(i)}$.

Если $\alpha_i \in \Delta_1$, то $\alpha_i \not\leq h(k)$ для всех $k \in X^{(i)}$.

Определим индукцией последовательность $(i_m)_{m \in N}$ из N:

1) $i_0 = \min X^{(0)}$,

2) $i_{m+1} = \min\{i \in X^{(m+1)} | \ i > i_m\}$.

Очевидно, что для всех $m \in N$: если $\alpha_m \in \Delta_0$, то $\alpha_m \leq h(i_n)$ для всех $n \geq m$; если $\alpha_m \in \Delta_1$, то $\alpha_m \not\leq h(i_n)$ для всех $n \geq m$.

Таким образом, последовательность $h_0 = (h(i_n))_{n\in N}$ удовлетворяет п. 4 леммы 1, т.е. h_0 имеет app–предел и $limapp^{\mathcal{A}} h_0 = sup\Delta_0 = \lim\limits_{D}{}^{\mathcal{A}} h$. Последовательность h_0 удовлетворяет требованию леммы.

Фиксируем некоторое аппроксимационное пространство $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$, $\chi = (M, \leq_\chi)$. Обозначим через H_0 множество всех последовательностей $h \in M^N$ таких, что для любого $\alpha \in \Delta$ одно из множеств $\{n \in N | \ \alpha \leq h(n)\}$, $\{n \in N | \ \alpha \not\leq h(n)\}$ конечно.

Определим функции $L_0, L_{\mathcal{A}}: M^N \times M \to \{0,1\}$:

1. $L_0(h,a) = 1 \Leftrightarrow h \in H_0$,

$$a = sup\{\alpha \in \Delta | \text{ множество } \{n \in N | \alpha \not\leq h(n)\} \text{ конечно}\};$$

2. $L_{\mathcal{A}}(h,a) = 1 \Leftrightarrow h$ имеет app–предел в $\mathcal{A}$ и $limapp^{\mathcal{A}} = a$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$ — аппроксимационное пространство и Δ — бесконечное счетное множество, тогда для $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = (M, L_{\mathcal{A}})$ выполнены условия* 1–5 (см. с.59), *при этом,* $L_{\mathcal{A}} = L_0^*$. (Операция (*) определена в конце §1.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнимость условий 1–3 следует из определения $limapp$ и леммы 1. Условие 5 является прямым следствием леммы 2. Докажем выполнимость условия 4.

Пусть $\mathcal{L} = (\mathrm{L}, \leq_{\mathcal{L}})$ — решетка функций $L: M^N \times M \to \{0,1\}$, H_0 — множество, определенное выше. Очевидно, что $L_0 \leq_{\mathcal{L}} L_{\mathcal{A}}$.

Из леммы 2 следует, что для любой последовательности, имеющей app–предел и $h' \prec h$ найдется $h'' \prec h'$ такое, что $h'' \in H_0$. Отсюда следует, что $L_{\mathcal{A}} \leq_{\mathcal{L}} L_0^* = L_{\mathcal{A}}^*$. Покажем, что $L_{\mathcal{A}} = L_{\mathcal{A}}^*$.

Пусть $h \in M^N$, $a \in M$ и для любой последовательности $h' \prec h$ существует $h'' \prec h'$ такое, что h'' имеет app–предел и $limapp^{\mathcal{A}} h'' = a$. Покажем, что тогда h имеет app–предел и $limapp^{\mathcal{A}} h = a$. Пусть D — произвольный неглавный ультрафильтр на N. По лемме 2, найдется последовательность $h_0 \prec h$ такая, что h_0 имеет

app–предел и $limapp^{\mathcal{A}} h_0 = \lim\limits_{D}{}^{\mathcal{A}} h$. По условию на h найдется $h_1 \prec h_0$ такое, что h_1 имеет app–предел и $limapp^{\mathcal{A}} h_1 = a$. Получаем $\lim\limits_{D}{}^{\mathcal{A}} = limapp^{\mathcal{A}} h_0 = limapp^{\mathcal{A}} h_1 = a$. В силу произвольности D, h имеет app–предел и $limapp^{\mathcal{A}} h = a$.

Таким образом, для $L_{\mathcal{A}}$ выполнено условие 4 (см. с.59). Поскольку для $L_{\mathcal{A}}$ выполнены условия 1–3, то $L_{\mathcal{A}} = L^*_{\mathcal{A}}$.

В итоге получаем, что $L_{\mathcal{A}} = L^*_0$, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = (M, L_{\mathcal{A}})$ является пространством с пределом, для которого выполнено условие 5.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$ — аппроксимационное пространство, $\chi = (M, \leq_\chi)$, Δ — бесконечное счетное множество, тогда $Ltop^{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$ — сепарабельное пространство, множество $X = \{supS | S \subseteq \Delta$, S конечно$\}$ является всюду плотным множеством в $Ltop^{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in M \setminus \Delta$, $\Omega_a = \{\alpha \in \Delta | \alpha \leq a\}$. Если Ω_a конечно, то $a \in X$. Предположим, что Ω_a бесконечно. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — последовательность всех элементов Ω_a. Очевидно, что последовательность $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$, где $\beta_n = sup\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$, имеет app–предел. Пусть $\alpha \in \Delta$. Если $\alpha \leq \beta_n$ для некоторого n, то $\alpha \leq sup\, \Omega_a = a$ и $\alpha \in \Omega_a$. Если $\alpha \not\leq \beta_n$, начиная с некоторого n, то $\alpha \not\leq a$, поскольку предположение $\alpha \leq a$ влечет $\alpha \in \Omega_a$. Получаем, что $limapp^{\mathcal{A}}(h) = sup\, \Omega_a = a$.

Таким образом, $C_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}(X) = M$, т.е. замыкание X в $Ltop^{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}}$ есть M. Теорема доказана.

§ 3. Примеры

ПРИМЕР 1. Пусть $\chi = ([0,1], \leq)$ — решетка на отрезке [0,1] со стандартной интерпретацией отношения $\leq$. Очевидно, χ — полная решетка.

Рассмотрим аппроксимационное пространство $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$, где Δ — множество рациональных чисел из отрезка [0,1]. Последовательность $(a_n)_{n \in N}$ из [0,1] имеет обычный предел $\Leftrightarrow$ $(a)_{n \in N}$ имеет app–предел в пространстве $\mathcal{A}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = limapp^{\mathcal{A}} a_n$. Действительно, пусть

D — произвольный неглавный ультрафильтр на N и $(a_n)_{n\in\omega}$ — сходящаяся последовательность. Очевидно, $\{\alpha \in \Delta | \{n \in N | \alpha \leq a_n\} \in D\} = \{\alpha \in \Delta |$ существует $N_\alpha \in$ $\in N$ такое, что для всех $n > N_\alpha$ $\alpha \leq a_n\}$, т.е. $\lim\limits_{D}{}^{\mathcal{A}} a =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Если $(a_n)_{n\in N}$ не имеет предела, то найдутся две бесконечные сходящиеся подпоследовательности $(a'_n)_{n\in I_1}$ и $(a''_n)_{n\in I_2}$ с различными пределами, где $I_1, I_2 \subseteq N$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. В этом случае найдутся два неглавных ультрафильтра D' и D'' на N такие, что $I_1 \in D'$ и $I_2 \in D''$.

По доказанному выше

$$\lim_{D'}{}^{\mathcal{A}} a'_n = \lim_{n\in I_1} a'_n \neq \lim_{n\in I_2} a''_n = \lim_{D''}{}^{\mathcal{A}} a''_n,$$

т.е. a не имеет *app*-предела. Топология $Ltop^{\mathcal{M}_\mathcal{A}}$ совпадает с обычной топологией на $[0,1]$.

ПРИМЕР 2. Пусть $P(N)$ — множество всех подмножеств натуральных чисел, $\chi = (P(N), \subseteq)$ — решетка подмножеств N по включению, Δ — множество всех одноэлементных подмножеств. Рассмотрим аппроксимационное пространство $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$.

Из следствия леммы 1 следует, что последовательность $h : N \to P(N)$ имеет предел в $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ для любого $n \in N$ найдется $n_0 \in N$ такое, что либо для всех $m \geq n_0$ $n \in h(m)$, либо для всех $m \geq n_0$ $n \notin h(m)$.

Аппроксимационный предел состоит из чисел первого типа.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим аппроксимационное пространство $\mathcal{A} = (\chi, N)$, где $\chi = (N \cup \{\delta\}, \leq_\chi)$, отношение $\leq_\chi$ совпадает на N со стандартным отношением $\leq$ и $a \leq_\chi \delta$ для всех $a \in N \cup \{\delta\}$.

Последовательность $h = a_0, a_1, \ldots$ из $N \cup \{\delta\}$ имеет *app*-предел в $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ либо существуют $n, i_0 \in N$ такие, что для всех $i \geq i_0$ $a_i = n$, либо для любого $k \in N$ существуют $i_0 \in N$ такие, что для всех $i \geq i_0$ $k \leq a_i$.

В первом случае $limapp^{\mathcal{A}} h = n$, во втором — $limapp^{\mathcal{A}} h = \delta$.

Замкнутые множества в $atop^{\mathcal{A}}$ — все конечные подмножества N и подмножества, содержащие δ. Рассматривая δ как "символ неопределенности", каждая частично-рекурсивная функция f доопределяется до всюду определенной функции $\overline{f}$ на $N \cup \{\delta\}$: если $f(\overline{m})$ определено, то $\overline{f}(\overline{m}) = f(\overline{m})$ и $\overline{f}(\overline{m}) = \delta$ в остальных случаях для всех наборов $\overline{m}$ из $N \cup \{\delta\}$. При таком подходе не все функции $\overline{f}$, определенные на частично-рекурсивной функции f, являются аппроксимационно непрерывными в пространстве $\mathcal{A}$.

Казалось бы, получается противоречие с предположением, которое было высказано вначале, что при естественном определении аппроксимации и вычислимости все вычислительные процедуры должны быть аппроксимационно непрерывными. Заметим, однако, что при рассмотрении частично-рекурсивной функции как вычислительной процедуры выглядит естественным представление, что данная процедура перерабатывает не просто число, а число вместе с некоторым начальным интервалом, его содержащим. Соответствующий пример рассматривается в конце работы.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим $\mathcal{M} = (R, L)$, где R — множество вещественных чисел, $L(h, a) = 1 \Leftrightarrow h$ — последовательность, имеющая обычный предел и $\lim\limits_{n\to\infty} h = a$. Определим $L_0(h, a) = 1 \Leftrightarrow h$ — монотонная последовательность, имеющая обычный предел и $\lim\limits_{n\to\infty} h = a$.

Нетрудно видеть, что $L = L_0^*$, $\mathcal{M}$ является пространством с пределом, на $\mathcal{M}$ не выполнено условие 4.

ПРИМЕР 5. Пусть Δ — некоторое бесконечное счетное множество функций $f: [0,1] \to [0,1]$, включающее функцию тождественно равную нулю. Возьмем в качестве M множество, являющееся замыканием Δ относительно sup. Отношение $\leq$ на M определяется обычным образом для функций. Очевидно, что $\chi = (\mathcal{M}, \leq)$ является полной решеткой и $\mathcal{A} = (\chi, \Delta)$ — аппроксимационное пространство.

ПРИМЕР 6. Для множества вида $\widetilde{M} = M \cup \{\delta\}$, где $M \subseteq N$, δ — дополнительный элемент. Частичной функции f, определенной в M, зададим функцию $\widetilde{f}$, всюду определенную на $\widetilde{M}$. Для каждого набора $\overline{m}$ на $\widetilde{M}$ полагаем $\widetilde{f}(\overline{m}) = f(\overline{m})$, если значение $f(\overline{m})$ определено и $\widetilde{f}(\overline{m}) = \delta$ — в остальных случаях.

Рассмотрим аппроксимационные пространства $A_1 = (\chi_1, \Delta_1)$ и $A_2 = (\chi_2, \Delta_2)$, где $\chi_1 = (M_1, \subseteq)$, $M_1 = \{\{0,\ldots,n,\delta\} \mid n \in N\} \cup \{N \cup \{\delta\}\}$, $\Delta_1 = \{\{0,\ldots,n,\delta\} \mid n \in N\}$.

Полагаем $\chi_2 = (M_2, \leq_{\chi_2})$, $M_2 = M_0 \bigcup\limits_N M_0^{(n)}$, где M_0 — множество всех функций $\widetilde{f}$ на $\widetilde{N}$ такое, что f — частичная функция, определенная в N; $M_0^{(n)}$ — множество всех функций $\widetilde{f}$ на $\{0,\ldots,n,\delta\}$ такое, что f — частичная функция, определенная в $\{0,\ldots,n\}$.

Для пары функций $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2$ из M_2 полагаем $\widetilde{f}_1 \leq_{\chi_2} \widetilde{f}_2 \Leftrightarrow$ для любого набора $\overline{m}$ из $\widetilde{N}$, если $\widetilde{f}_1(\overline{m})$ определено и $\widetilde{f}_1(\overline{m}) \neq 0$, то $\widetilde{f}_2(\overline{m})$ определено и либо $\widetilde{f}_2(\overline{m}) = \delta$, либо $\widetilde{f}_1(\overline{m}), \widetilde{f}_2(\overline{m}) \in N$, $\widetilde{f}_1(\overline{m}) \leq \widetilde{f}_2(\overline{m})$.

Полагаем $\Delta_2 = \bigcup\limits_N M_0^{(n)}$.

Заметим, что A_1 и A_2 — корректно определенные аппроксимационные пространства, т.е. χ_1, χ_2 — полные решетки и для любого $b \in M_i$, $i = 0, 1$, имеем $b = sup\{\alpha \in \Delta_i \mid \alpha \leq_{\chi_i} b\}$.

Для каждой частично-рекурсивной функции f и способа построения S функции f определим функцию $\widetilde{f}_S^{(n)} : \{0,\ldots,n,\delta\} \to \{0,\ldots,n,\delta\}$.

Для любого набора $\overline{m} \in N \cup \{\delta\}$ полагаем $\widetilde{f}_S^{(n)}(\overline{m}) = f(\overline{m})$, если $f(\overline{m})$ определено и при построении значения $f(\overline{m})$ по схеме S на всх этапах построения, начиная с базисных функций, мы оставались в рамках интервала $\{0,\ldots,n\}$; в остальных случаях полагаем $\widetilde{f}_S^{(n)}(\overline{m}) = \delta$.

Для каждой частично-рекурсивной функции f и способа построения S функции f определим отображение $P_{f,S} : X_1 \to X_2$. Полагаем $P_{f,S}(\widetilde{N}) = \widetilde{f}$ и для любого $n \in N$ $P_{f,S}(\{0,\dots,n,\delta\}) = \widetilde{f}_S^n$.

Индукцией по построению частично-рекурсивной функции устанавливается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любой частично-рекурсивной функции f и способа S построения функции f отображение $P_{f,S}$ является аппроксимационно непрерывным.*

Если последовательность $h : \omega \to X_1$ имеет app-предел, равный $\{0,\dots,n,\delta\}$, то $limapp^{A_2} P_{f,S} \circ h = \widetilde{f}_S^{(n)}$.

Если последовательность h имеет app-предел, равный $\widetilde{N}$, то $limapp^{A_2} P_{f,S} \circ h = \widetilde{f}$.

Из доказанного выше и предложения 3 следует, что все отображения $P_{f,S}$ являются непрерывными отображениями из $Ltop^{\mathcal{M}_{A_1}}$ в $Ltop^{\mathcal{M}_{A_2}}$.

ПРИМЕР 7. Рассмотрим произвольную сигнатуру Σ. Пусть F — множество всех формул вида

$$\phi(y_1,\dots,y_n) = \bigvee_{i \in N} (\exists \bar{x}_i)\phi_i(\bar{x}_i, y_1,\dots,y_n),$$

где ϕ_i — бескванторные формулы сигнатуры Σ. Сигнатура Σ' состоит из всех n–местных ($n \in N$) предикатных символов p_ϕ для всех формул $\phi = \phi(y_1,\dots,y_n)$ из F.

Пусть $\mathcal{U}$ — некоторая система сигнатуры Σ с носителем $N \cup \{\delta\}$.

Определим аппроксимационные пространства $\mathcal{A}_1 = (\chi_1, \Delta_1)$, $\mathcal{A}_2 = (\chi_2, \Delta_2)$, где

$\chi_1 = (M_1, \leq_{\chi_1})$;

$\chi_2 = (M_2, \leq_{\chi_2})$;

$M_1 = \bigcup_n \{\mathcal{U}_n\} \cup \{\mathcal{U}\}$, где $\mathcal{U}_n$ — алгебраическая система с носителем $\{0,\dots,n,\delta\}$, которая относительно предикатных и константных символов является подсистемой системы $\mathcal{U}$ и для каждого функционального символа f сигнатуры Σ интерпретация f в $\mathcal{U}_n$ есть $\widetilde{g}$, где g — частичная функция на $\{0,\dots,n,\delta\}$, являющаяся ограничением функции, соответствующей символу f в $\mathcal{U}$;

M_2 — множество всех систем сигнатуры Σ' с носителями $N \cup \{\delta\}$, $\{0, \ldots, n, \delta\}$, $n \in N$;

$\Delta_1 = X_1$;

Δ_2 состоит из систем, в которых ровно один предикат имеет мощность 1, остальные — пустые.

Полагаем $a_1 \leq_{X_1} a_2 \Leftrightarrow$ носитель системы a_1 содержится в носителе системы a_2; $a_1 \leq_{X_2} a_2 \Leftrightarrow$ носитель a_1 содержится в носителе a_2 и тождественное включение на носителях является гомоморфизмом a_1 в a_2.

Очевидно, что Δ_i, $i = 0, 1$, удовлетворяет п.5 леммы 1, откуда следует, что $h \in X_2^N$ имеет *app*-предел в $\mathcal{A}_2 \Leftrightarrow$ для любого предикатного символа p из Σ' и любого набора $\bar{a}$ из X_2 найдется $n_0 \in N$ такое, что либо

1) для любого $m > n_0$ $h(m) \models p_\phi(\bar{a})$, либо

2) для любого $m > n_0$ $h(m) \not\models p_\phi(\bar{a})$.

Если h имеет *app*-предел в $\mathcal{A}_2$, то $limapp^{\mathcal{A}_2} \models p_\phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \bar{a}$ удовлетворяет 1).

Последовательность $h \in X_1^N$ имеет *app*-предел в $\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow$ найдется $n_0 \in N$ и либо

1) существуют $n_0, k_0 \in N$ такие, что для всех $n > n_0$ $h(n) = \mathcal{U}_{k_0}$, либо

2) для всех $k \in N$ найдется n_0 такое, что для всех $n > n_0$ носитель системы $h(n)$ включает число k.

В первом случае $limapp^{\mathcal{A}_1} h = \mathcal{U}_{k_0}$, во втором — $limapp^{\mathcal{A}_1} h = U$.

Зададим множество отображений $\mathcal{P}$ из X_1 в X_2. Заметим, что $P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow$ существует формула $\phi(y_0, \ldots, y_n)$ из F такая, что для всех $a \in X_1$ интерпретация символа p_ϕ в $P(a)$ определяется формулой ϕ на a, т.е.

$$P(a) \models p_\phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow a \models \phi(a_1, \ldots, a_n).$$

Для $\psi \neq \phi$ из F p_ϕ интерпретируется в $P(a)$ как пустой предикат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Каждое отображение $P \in \mathcal{P}$ Lim-непрерывно, т.е. является непрерывным отображением топологии $Ltop^{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_1}}$ в $Ltop^{\mathcal{M}_{\mathcal{A}_1}}$.*

Автор признателен А.И.Фету, Ю.Л.Ершову, С.В.Судоплатову и С.Р.Постовалову за помощь при работе над статьей.

Литература

1. АШАЕВ И.А., БЕЛЯЕВ В.Я., МЯСНИКОВ А.Г. Подходы к теории обобщенной вычислимости//Алгебра и логика. — 1993. — Т.32, №4.

2. ЕРШОВ Ю.Л. ω–полные A–пространства //Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, №4.

3. КОЛМОГОРОВ А.Р., ФОМИН С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.

4. SCOTT D. Continuous lattices //Lecture Notes in Math. — 1972. — Vol. 274. — 274 p.

Поступила в редакцию
2 октября 1996 года