ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
(Вычислительные системы)
1998 год **Выпуск 161**

УДК 512.572

m-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР[1]

В.Ю. Крамер

Введение

Настоящая работа посвящена рассмотрению некоторых вопросов, связанных с исследованием элементарных теорий булевых алгебр и их обогащений.

Изучение элементарных теорий различных алгебраических объектов началось еще в 40-х годах нынешнего столетия, но наиболее яркие результаты были получены начиная с 60-х годов. В 1949 г. А.Тарский [28] доказал полноту теорий алгебраически замкнутых и вещественно замкнутых полей. В 1955 г. В.Шмелевой [26] были описаны элементарные свойства абелевых групп. В 1964 г. Ю.Л.Ершовым [5] исследовалась разрешимость теорий симметрических и простых конечных групп; в конце 60-х годов Ю.Л.Ершов, Д.Акс, С.Кочен и Д.Денеф исследовали элементарные теории некоторых классов полей и их алгоритмические свойства. Обширный материал и библиография по элементарным теориям содержится в статьях [10,12] и монографии [11].

Большое внимание различными авторами уделялось изучению элементарных теорий булевых алгебр и их обогащений. В 1949 г. А.Тарский [27] анонсировал, а в 1964 г.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96-01-01525.

Ю.Л.Ершов [6] дал доказательство полного описания элементарных теорий булевых алгебр, из которого следует, что теория булевых алгебр разрешима и элементарная теория произвольной булевой алгебры тоже разрешима. В [6] было также доказано, что теория булевой алгебры с выделенным идеалом разрешима, по крайней мере, в следующих двух случаях: 1) B/I конечна; 2) существует $\sup\{x|x \in I\}$ и B — атомна. В 1969 г. М.Рабин [24] доказал, что теория класса булевых алгебр с выделенным идеалом разрешима.

С.С.Гончаров [1] описал с точностью до изоморфизма суператомные булевы алгебры. Дж.Монк, Р.Мак-Кинзи и М.Рубин [23, 22, 25] изучали связь между булевыми алгебрами и группами их автоморфизмов. А.С.Морозов [14] исследовал алгоритмические свойства булевых алгебр с помощью их рекурсивных автоморфизмов.

В последние годы интерес привлекло исследование обогащенных булевых алгебр: булевых алгебр с выделенными подалгебрами, автоморфизмами, идеалами. В.И.Мартьянов [13] изучал разрешимость теорий булевых алгебр с выделенным автоморфизмом. З.А.Дулатова доказала, что элементарная теория решеток подалгебр булевых алгебр неразрешима [3], а также исследовала булевы алгебры с выделенной группой автоморфизмов [4].

Наиболее систематическое изучение элементарных теорий булевых алгебр с выделенными идеалами нашло отражение в работах Д.Е.Пальчунова [15–17]. Основные вопросы, исследуемые в этих работах, таковы: элементарная эквивалентность булевых алгебр с выделенными идеалами; существование у данной булевой алгебры обогащения λ выделенными идеалами с неразрешимой элементарной теорией и континуума обогащений с различными элементарными теориями; счетная категоричность, конечная аксиоматизируемость и разрешимость элементарных теорий булевых алгебр с выделенными идеалами. На проведенных Д.Е.Пальчуновым исследованиях базируются полученные в этой работе результаты.

В § 1 изучается m-эквивалентность булевых алгебр, получен критерий m-эквивалентности этих алгебраических систем. Понятие m-эквивалентности дано в терминах конечных частичных изоморфизмов на основе игр Эренфойхта [21], что является очень удобным при работе с булевыми алгебрами и их обогащениями выделенными идеалами, так как существует возможность перехода при оперировании с m-эквивалентностью над указанными выше объектами к их прямым слагаемым. При этом данное понятие m-эквивалентности обладает таким свойством, что, с одной стороны, на m-эквивалентных булевых алгебр истинны одни и те же предложения с не более чем m кванторами [21], а с другой, как это было показано в [17], оно является формульно выразимым.

§ 2 посвящен рассмотрению некоторых вопросов, касающихся исследования элементарных теорий суператомных булевых алгебр с выделенным идеалом. А именно: изучается понятие сложности идеала в данных булевых алгебрах. Для произвольной счетной суператомной булевой алгебры найдена максимальная сложность идеала, возможная в данной алгебре. В качестве следствия приведены максимально возможные сложности идеалов в алгебрах Линденбаума некоторых классов алгебраических систем. Методы, применяемые в § 2, позволяют понять не только какие сложности идеала возможны в суператомной булевой алгебре, но и какие различные элементарные теории при обогащении данной алгебры выделенным идеалом можно получить.

В заключение этого раздела сделаем некоторые замечания, касающиеся терминологии и обозначений.

Буквы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будем использовать для обозначений булевых алгебр. Через $(\mathcal{A}, I)$, $(\mathcal{B}, I)$ будем обозначать булевы алгебры с выделенным идеалом I, рассматриваемые в сигнатуре $\sum = (\cup, \cap, ^-, 0, 1, I)$, где I — унарный предикат, выделяющий идеал. Буквами A и B будем обозначать основные множества алгебр $\mathcal{A}, (\mathcal{A}, I)$ и $\mathcal{B}, (\mathcal{B}, I)$ соответственно. Если x — элемент булевой алгебры $\mathcal{A}$, то положим $(x) = (\hat{x}, \cup, \cap, ^-, 0, x)$, где $\hat{x} = \{a \in A | a \leq x\}$. В данной работе будем рассматривать только такие булевы алгебры, в которых $0 \neq 1$. С простейшими свойствами булевых алгебр можно познакомиться в работе [2]. Что касается булевых алгебр с выделенными идеалами, то всю необходимую информацию о них можно найти в [15-17].

§ 1. m-эквивалентность булевых алгебр

Вначале дадим необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть даны булевы алгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $m \in \omega$, $L \subseteq A$, L — конечно и f — отображение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Обозначим через $\mathcal{A}_f$ — подмодель $\mathcal{A}$, порожденную множеством L, $\overline{f}$ — продолжение f на $\mathcal{A}_f$. Назовем f частичным изоморфизмом $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, если $\overline{f}$ — изоморфное вложение $\mathcal{A}_f$ в $\mathcal{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть даны булевы алгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $m \in \omega$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ m-эквивалентна $\mathcal{B}$ и обозначать $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, если существуют непустые множества F_k, $k \le m$, конечных частичных изоморфизмов $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ со следующим свойством: если $f \in F_k$, $0 \le k < m$, то для любых $a \in A$ и $b \in B$ существуют $g_1, g_2 \in F_{k+1}$, для которых $a \in \mathrm{dom} g_1$, $b \in \mathrm{im} g_2$, $f \subseteq g_1, f \subseteq g_2$.

Введем следующее обозначение:

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{cases} \text{максимальное } m \text{ такое, что } \mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}, \\ \qquad \text{если оно существует,} \\ \infty, \text{ если такого максимального } m \\ \qquad \text{не существует.} \end{cases}$$

Из [21] следует, что $m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \infty$ тогда и только тогда, когда булевы алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ элементарно эквивалентны.

Нетрудно доказать следующие три предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — булевы алгебры, $m \in \omega$. Если существует $a \in A$ ($b \in B$) такой, что для любого $b \in B$ ($a \in A$) $m((a),(b)) \le m - 1$ или $m((\overline{a}),(\overline{b})) \le m - 1$, то $m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \le m$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — булевы алгебры, $m \in \omega$. Если*

1) *для любого $a_1 \in A$ существует $b_1 \in B$ такой, что*

$$m((a_1),(b_1)) \geq m-1 \quad \text{и} \quad m((\overline{a}_1),(\overline{b}_1)) \geq m-1,$$

2) *для любого $b_2 \in B$ существует $a_2 \in A$ такой, что*

$$m((a_2),(b_2)) \geq m-1 \quad \text{и} \quad m((\overline{a}_2),(\overline{b}_2)) \geq m-1,$$

то $m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — булевы алгебры, $m \in \omega$. Если*

1) *для любого $a_1 \in A$ существует $b_1 \in B$ такой, что*

$$(\mathrm{ch}(a_1) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}) \quad \text{и} \quad \mathrm{ch} b_1 = \mathrm{ch}(\mathcal{B}))$$

или

$$m((a_1),(b_1)) \geq m-1 \quad \text{и} \quad (\mathrm{ch}(\overline{a}_1) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}), \ \text{и} \ \mathrm{ch}(\overline{b}_1) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})),$$

или

$$m((\overline{a}_1),\overline{b}_1)) \geq m-1,$$

2) *для любого $b_2 \in B$ существует $a_2 \in A$ такой, что*

$$(\mathrm{ch}(a_2) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}) \ \text{и} \ \mathrm{ch}(b_2) = \mathrm{ch}(\mathcal{B}))$$

или

$$m((a_2),(b_2)) \geq m-1 \quad \text{и} \quad (\mathrm{ch}(\overline{a}_2) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}), \ \text{и} \ \mathrm{ch}(\overline{b}_2) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})),$$

или

$$m((\overline{a}_2),(\overline{b}_2)) \geq m-1,$$

то $m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq m$.

Введем на множестве характеристик булевых алгебр линейный порядок $\leq_{1,3,2}$. Положим $\mathrm{ch}(\mathcal{A}) \leq_{1,3,2} \mathrm{ch}(\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда

$$(\mathrm{ch}_1(\mathcal{A}),\mathrm{ch}_3(\mathcal{A}),\mathrm{ch}_2(\mathcal{A})) \leq (\mathrm{ch}_1(\mathcal{B}),\mathrm{ch}_3(\mathcal{B}),\mathrm{ch}_2(\mathcal{B})),$$

где $\leq$ — обычный лексикографический порядок. Теперь сформулируем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — *булевы алгебры,* $\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = (m_1, m_2, m_3)$, $\mathrm{ch}(\mathcal{B}) = (n_1, n_2, n_3)$, $\mathrm{ch}(\mathcal{A}) <_{1,3,2} \mathrm{ch}(\mathcal{B})$. *Тогда максимальное* m *такое, что* $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$, *вычисляется следующим образом:*

$$
\begin{array}{llll}
 & \multicolumn{2}{c}{\text{для } m_1 < n_1} & \\
m_3 = 0 & m_2 = 1 & m = 4m_1 & (1)\\
 & m_2 = 2,3 & m = 1 + 4m_1 & (2)\\
 & m_2 \geq 4 & m = 2 + 4m_1 & (3)\\
m_3 = 1 & m_2 = 0 & m = 1 + 4m_1 & (4)\\
 & m_2 = 1,2,3 & m = 2 + 4m_1 & (5)\\
 & m_2 \geq 4 & m = 3 + 4m_1 & (6)\\
 & \multicolumn{2}{c}{\text{для } m_1 = n_1} & \\
m_3 = n_3 = 0 & m_2 < n_2 & m = \varphi(m_2) + 4m_1 & (7)\\
m_3 = n_3 = 1 & m_2 = 0 & m = 1 + 4m_1 & (8)\\
m_2 < n_2 & m_2 = 1,2,3 & m = 2 + 4m_1 & (9)\\
 & m_2 \geq 4 & m = 1 + \psi(m_2) + 4m_1 & (10)\\
m_3 = 0 & m_2 = 1 & m = 4m_1 & (11)\\
n_3 = 1 & m_2 = 2,3 & m = 1 + 4m_1 & (12)\\
 & m_2 \geq 4, n_2 = 0 & m = 1 + 4m_1 & (13)\\
 & m_2 \geq 4, n_2 \geq 1 & m = 2 + 4m_1 & (14)
\end{array}
$$

где

$\varphi(t) = \{\textit{максимальное } m | t \geq 2^k\}, t \geq 1,\ t \in \omega,$

$\psi(t) = \{\textit{максимальное } m | t \geq 2^k + \ldots + 2^2\}, t \geq 4, t \in \omega.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем понятие ранга пары булевых алгебр

$$
\mathrm{rang}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \begin{cases} (\mathrm{ch}_1(\mathcal{A}), \mathrm{ch}_3(\mathcal{A}), \mathrm{ch}_2(\mathcal{A}), \mathrm{ch}_1(\mathcal{B}), \mathrm{ch}_3(\mathcal{B}), \mathrm{ch}_2(\mathcal{B})), \\ \qquad \text{если } \mathrm{ch}(\mathcal{A}) \leq_{1,3,2} \mathrm{ch}(\mathcal{B}), \\ (\mathrm{ch}_1)(\mathcal{B}), \mathrm{ch}_3(\mathcal{B}), \mathrm{ch}_2(\mathcal{B}), \mathrm{ch}_1(\mathcal{A}), \mathrm{ch}_3(\mathcal{A}), \mathrm{ch}_2(\mathcal{A})), \\ \qquad \text{если } \mathrm{ch}(\mathcal{B}) \leq_{1,3,2} \mathrm{ch}(\mathcal{A}). \end{cases}
$$

На множестве этих рангов зададим лексикографический порядок. Очевидно, что получившееся упорядоченное множество является вполне упорядоченным множеством, следовательно, по нему можно вести трансфинитную индукцию.

Доказывать теорему будем индукцией по рангу пары булевых алгебр. Доказательство базиса индукции и индуктивного шага будем осуществлять параллельно.

Для краткости в дальнейшем вместо выражения "так как $\mathrm{rang}((a),(b)) < \mathrm{rang}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ $(\mathrm{rang}((\overline{a}),(\overline{b})) < \mathrm{rang}(\mathcal{A},\mathcal{B}))$, то в силу индукционного предположения по любому из случаев $(i_1),\ldots,(i_k)$ имеем", где $1 \leq k \leq 14$, $i_j \in \{1,\ldots,14\}$, для всех $1 \leq j \leq k$, будем писать просто "по $(i_1),\ldots,(i_k)$". Выбор: $\mathrm{rang}((a),(b)) < \mathrm{rang}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ или $\mathrm{rang}((\overline{a}),(\overline{b})) < \mathrm{rang}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ будет ясен из контекста.

Доказательство теоремы разобьем на два этапа. На первом этапе покажем, что для любого из случаев (1)–(14) справедливо неравенство $m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq m$; на втором этапе также для всех случаев (1)–(14) докажем, что имеет место обратное неравенство $m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq m$. Из этих двух утверждений и будет вытекать заключение теоремы: $m(\mathcal{A},\mathcal{B}) = m$.

ЭТАП 1.

<u>Случай (1)</u>: $m_1 < n_1$, $m_3 = 0$, $m_2 = 1$, $m = 4m_1$.

Если $m_1 = 0$, то очевидно, что $m(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0$. Если $m_1 > 0$, то пусть $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 0, 1)$. Ясно, что $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}_1(\mathcal{B}) > m_1$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, то, по (1)–(6), $m((a),(b)) \leq 3+4(m_1-1) = m-1$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$, то $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) < m_1$ и, следовательно, по (1)–(6), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 3+4(m_1-1) = m-1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq 4m_1 = m.$$

<u>Случай (2)</u>: $m_1 < n_1$, $m_3 = 0$, $m_2 = 2,3$, $m = 1+4m_1$.

Рассмотрим случай $m_2 = 2$ (случай $m_2 = 3$ рассматривается аналогично).

Пусть $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 0, 1)$. Ясно, что $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) = \mathrm{ch}_1(\mathcal{B}) > m_1$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, то, по (1)–(6),

$$m((a),(b)) \leq 3+4(m_1-1) < m-1.$$

Если $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$, то либо $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) < m_1$, либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 1, 0)$. В первом случае, по (1)–(6), $m((\overline{a}), (\overline{b})) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1$, а во втором, по (1), $m((\overline{a}), (\overline{b})) \leq 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1 + 4m_1 = m.$$

Случай (3): $m_1 < n_1$, $m_3 = 0$, $m_2 \geq 4$, $m = 2 + 4m_1$.

Пусть $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 0, 1)$.

Тогда $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) > m_1$. Если $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, то, по (1)–(6),

$$m((a), (b)) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1.$$

Если $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$, то, по (11)–(13),

$$m((a), (b)) \leq 1 + 4m_1 = m - 1.$$

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 2 + 4m_1 = m.$$

Случай (4): $m_1 < n_1$, $m_3 = 1$, $m_2 = 0, m = 1 + 4m_1$.

Пусть $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 1, 0)$.

Если $\mathrm{ch}_1(b) < m_1$, то, по (1)–(6), $m((a), (b)) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$, то $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 0, 1)$. Тогда, по (11), $m((a), (b)) \leq 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1 + 4m_1 = m.$$

Случай (5): $m_1 < n_1$, $m_3 = 1$, $m_2 = 1, 2, 3$, $m = 2 + 4m_1$.

Рассмотрим случай $m_2 = 3$ (случаи $m_2 = 1, 2$ рассматриваются аналогично).

Пусть $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 0, 1)$ и $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 3, 0)$.

Если $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) > m_1$, то, по (2), $m((\overline{a}), (\overline{b})) \leq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Если $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) < m_1$, то, по (1)–(6),

$$m((\overline{a}), (\overline{b})) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1.$$

Если $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) = m_1$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) \neq (m_1, 3, 0)$, то, по (7),(12),

$$m((\overline{a}), (\overline{b})) \leq 1 + 4m_1 = m - 1.$$

Если $\mathrm{ch}(\bar{b}) = (m_1, 3, 0)$, то, по (4),

$$m((a),(b)) \leq 1 + 4m_1 = m - 1.$$

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 2 + 4m_1 = m.$$

Случай (6): $m_1 < n_1$, $m_3 = 1$, $m_2 \geq 4$, $m = 3 + 4m_1$.

Пусть $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, m_2, 0)$ и $\mathrm{ch}(\bar{a}) = (m_1, 0, 1)$. Ясно, что либо $\mathrm{ch}_1(b) > m_1$, либо $\mathrm{ch}_1(\bar{b}) > m_1$. Поэтому или по (3) $m((a),(b)) \leq 2 + 4m_1 = m - 1$, или, по (4), $m((\bar{a}),(\bar{b})) \leq 1 + 4m_1 < m - 1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 3 + 4m_1 = m - 1.$$

Случай (7): $m_1 = n_1$, $m_3 = n_3 = 0$, $m = \varphi(m_2) + 4m_1$.

Пусть $m_2 = 1$. Если $m_1 = 0$, то доказывать нечего. Если $m_1 > 0$, то возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 1, 0)$. Ясно, что $\mathrm{ch}_1(\bar{b}) = m_1$ и либо $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, либо $\mathrm{ch}_1(\bar{a}) < m_1$. Поэтому или, по (1)-(6), $m((a),(b)) \leq 3 + 4(m_1 - 1) = m - 1$, или, также по (1)-(6), $m((\bar{a}),(\bar{b})) \leq 3 + 4(m_1 - 1) = m - 1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 4m_1 = m.$$

Пусть теперь $m_2 \geq 2$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (n_1, n_2', 0)$, $\mathrm{ch}(\bar{b}) = (n_1, n_2'', 0)$, где $n_2' \geq n_2'' \geq \left[\frac{(m_2 + 1)}{2}\right]$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$ или $\mathrm{ch}_1(\bar{a}) < m_1$, то либо, по (1)-(6), $m((a),(b)) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m$, либо, также по (1)-(6), $m((\bar{a}),(\bar{b})) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$ и $\mathrm{ch}_1(\bar{a}) = m_1$, то $\mathrm{ch}(a) = (m_1, m_2', 0)$, $\mathrm{ch}(\bar{a}) = (m_1, m_2'', 0)$, причем $m_1' + m_2'' = m_2$. Если $m_2' \leq m_2''$, то $m_2' < n_2'$ и $\varphi(m_2') \leq \varphi(m_2) - 1$. Поэтому, по (7), $m((a),(b)) \leq \varphi(m_2') + 4m_1 \leq \varphi(m_2) + 4m_1 - 1 = m - 1$.

Если $m_2' > m_2''$, то $m_2'' < n_2''$ и $\varphi(m_2'') \leq \varphi(m_2) - 1$. Поэтому, по (7), $m((\bar{a}),(\bar{b})) \leq \varphi(m_2'') + 4m_1 \leq \varphi(m_2) + 4m_1 - 1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \varphi(m_2) + 4m_1 = m.$$

Случай (8): $m_1 = n_1$, $m_3 = n_3 = 1$, $m_2 < n_2$, $m_2 = 0$, $m = 1 + 4m_1$.

Пусть $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 1, 0)$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, то, по (1)–(6), $m((a),(b)) \leq 3+4(m_1-1) < < m-1$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$, то $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 0, 1)$ и, по (11),

$$m((a),(b)) \leq 4m_1 = m-1.$$

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq 1 + 4m_1 = m.$$

Случай (9): $m_1 = n_1$, $m_3 = n_3 = 1$, $m_2 < n_2$, $m_2 = = 1, 2, 3$, $m = 2 + 4m_1$.

Рассмотрим случай $m_1 = 1$ (остальные случаи разбираются аналогично).

Пусть $a \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 1, 0)$, $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 0, 1)$.

Если $\mathrm{ch}(b) \neq (m_1, 1, 0)$, то, по (1)–(6), (7), (11),

$$m((a),(b)) \leq 4m_1 < m-1.$$

Если $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 1, 0)$, то $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, n_2', 1)$, где $n_2' > 0$. Поэтому, по (8), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 1 + 4m_1 = m-1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq 2 + 4m_1 = m.$$

Случай (10): $m_1 = n_1$, $m_3 = n_3 = 1$, $m_2 < n_2$, $m_2 \geq 4$, $m = 1 + \psi(m_2) + 4m_1$.

Рассмотрим несколько подслучаев.

а) $m_2 = 4, \ldots, 7$, $m = 3 + 4m_1$.

Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 4, 0)$. Если $\mathrm{ch}_1(a) < < m_1$, то, по (1)–(6), $m((a),(b)) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m-1$.

Пусть теперь $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$. Если $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$, то, по (8), (9), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 2 + 4m_1 = m-1$.

Если $\mathrm{ch}(a) \neq \mathrm{ch}(b)$, то, по (7), (13), (14),

$$m((a),(b)) \leq 2 + 4m_1 = m-1.$$

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq 3 + 4m_1 = m.$$

б) $m_2 = 8, \ldots, 11$, $m = 3 + 4m_1$.

Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 8, 0)$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, то, по (1)–(6), $m((a),(b)) \leq 3+4(m_1-1) < < m-1$.

Пусть теперь $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$. Если $\mathrm{ch}_3(a) = 0$ и $\mathrm{ch}_2(a) \geq 8$, то, по (9), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Если $\mathrm{ch}_3(a) = 0$ и $\mathrm{ch}_2(a) < 8$, то, по (7),

$$m((a),(b)) \leq 2 + 4m_1 = m - 1.$$

Наконец, если $\mathrm{ch}_3(a) = 1$, то, по (13), (14),

$$m((a),(b)) \leq 2 + 4m_1 = m - 1.$$

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq 3 + 4m_1 = m.$$

в) $m_2 \geq 12$, $m = 1 + \psi(m_2) + 4m_1$.

Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (n_1, n_2', 0)$, где $n_2' = m_2 - (2^{\psi(m_2)} + \ldots + 2^2) + 1$. Заметим, что $n_2' \leq 2^{\psi(m_2)+1}$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, то, по (1)–(6),

$$m((a),(b)) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1.$$

Пусть теперь $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$. Если $\mathrm{ch}_3(a) = 1$, то, по (11)–(14), $m((a),(b)) \leq 2 + 4m_1 < m - 1$.

Пусть теперь $\mathrm{ch}_3(a) = 0$. Если $\mathrm{ch}_2(a) < n_2'$, то, по (7), $m((a),(b)) \leq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$.

Если $m_2' = \mathrm{ch}_1(a) \geq n_2'$, то в случае $m_2'' = \mathrm{ch}_2(\overline{a}) \leq 3$, по (8), (9), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 2 + 4m_1 \leq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$, так как $\psi(m_2) \geq 3$, а если $m_2'' \geq 4$, то, по (10),

$$m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 1 + \psi(m_2'') + 4m_1,$$

при этом $m_2'' = m_2 - m_2' \leq m_2 - n_2' = m_2 - (m_2 - (2^2 + \ldots$ $\ldots + 2^{\psi(m_2)}) + 1) = 2^2 + \ldots + 2^{\psi(m_2)} - 1$, следовательно, $\psi(m_2'') \leq$ $\leq \psi(m_2) - 1$. Поэтому $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$.

По предложению 1 заключаем, что

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq 1 + \psi(m_2) + 4m_1 = m.$$

<u>Случай (11)</u>: $m_1 = n_1$, $m_3 = 0$, $n_3 = 1$, $m_2 = 1$, $m = 4m_1$.

Если $m_1 = 0$, то доказывать нечего.

Пусть $m_1 > 0$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) =$ $= (n_1, n_2, 1)$, $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (n_1, 0, 1)$. Ясно, что или $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, или $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) < m_1$. Поэтому либо по (1)–(6) $m((a),(b)) \leq$ $\leq 3 + 4(m_1 - 1) = m - 1$, либо также по (1)–(6) $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq$ $\leq 3 + 4(m_1 - 1) = m - 1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(A, B) \leq 4m_1 = m - 1.$$

Случай (12): $m_1 = n_1$, $m_3 = 0$, $n_3 = 1$, $m_2 = 2, 3$, $m = 1 + 4m_1$.

Рассмотрим случай $m_2 = 3$ (случай $m_2 = 2$ разбирается аналогично).

Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (n_1, n_2, 1)$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (n_1, 0, 1)$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$ или $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) < m_1$, то либо, по (1)–(6), $m((a),(b)) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1$, либо, также по (1)–(6), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1$.

Если $\mathrm{ch}_1(a) = m_1$ и $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) = m_1$, то или $\mathrm{ch}_2(a) = 1$, или $\mathrm{ch}_2(\overline{a}) = 1$. Поэтому либо, по (11), $m((a),(b)) \leq 4m_1 = m - 1$, либо, также по (11), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 1,

$$m(A, B) \leq 1 + 4m_1 = m.$$

Случай (13): $m_1 = n_1$, $m_3 = 0$, $n_3 = 1$, $m_2 \geq 4$, $n_2 = 0$, $m = 1 + 4m_1$.

Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 1, 0)$.

Если $\mathrm{ch}_1(b) < m_1$, то, по (1)–(6),

$$m((a),(b)) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1.$$

Если $\mathrm{ch}_1(b) = m_1$, то $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 0, 1)$, поэтому, по (11),

$$m((a),(b)) \leq 4m_1 = m - 1.$$

Следовательно, по предложению 1,

$$m(A, B) \leq 1 + 4m_1 = m.$$

Случай (14): $m_1 = n_1$, $m_3 = 0$, $n_3 = 1$, $m_2 \geq 4$, $n_2 \geq 1$, $m = 1 + 4m_1$.

Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (n_1, n_2, 0)$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (n_1, 0, 1)$.

Если $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) < m_1$, то, по (1)–(6),

$$m((\overline{a}),(\overline{b})) \leq 3 + 4(m_1 - 1) < m - 1.$$

Если $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) = m_1$, то, по (11)-(13),

$$m((\overline{a}),(\overline{b})) \le 1 + 4m_1 = m - 1.$$

Следовательно, по предложению 1,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \le 2 + 4m_1 = m.$$

ЭТАП 2.

Случай (1): $m_1 < n_1,\ m_3 = 0,\ m_2 = 1,\ m = 4m_1$.

Если $m_1 = 0$, то доказывать нечего.

Пусть $m_1 > 0$ и выбран $a \in A$. Ясно, что или $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, или $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) < m_1$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}_3(b) = \mathrm{ch}_3(a)$ и $\mathrm{ch}_3(b) = \mathrm{ch}_3(a)$, а также $\mathrm{ch}_2(b) = \mathrm{ch}_2(a)$, если $\mathrm{ch}_2(a) \le 2^{m-1}б$ и $\mathrm{ch}_2(b) = 2^{m-1}$, если $\mathrm{ch}_2(b) > 2^{m-1}$. Очевидно, что $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, а также либо $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, либо, по (7),(10), $m((a),(b)) \ge m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Если $\mathrm{ch}_1(b) < m_1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}_1(a) = \mathrm{ch}(b)$, $\mathrm{ch}_3(a) = \mathrm{ch}_3(b)$, а также $\mathrm{ch}_2(a) = \mathrm{ch}_2(b)$, если $\mathrm{ch}_2(b) \le 2^{m-1}$ и $\mathrm{ch}_2(a) = 2^{m-1}$, если $\mathrm{ch}_2(b) > 2^{m-1}$. Ясно, что $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A}), \mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$ и либо $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, либо, по (7), (10), $m((a),(b)) \ge m - 1$.

Если $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) < m_1$, то поступаем аналогично.

Пусть теперь $\mathrm{ch}_1(b) \ge m_1$, $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) \ge m_1$. Очевидно, что хотя бы одно из этих неравенств строгое. Без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{ch}_1(b) > m_1$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 1, 0)$ и $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1 - 1, m_2', 1)$, где $m_2' \ge 4$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (1), $m((a),(b)) \ge 4m_1 \ge m - 1$. Вместе с тем, по (6), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \ge 4m_1 - 1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \ge 4m_1 = m.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Читатель уже, наверное, отметил, что когда выбирается элемент x из $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ такой, что $\mathrm{ch}_1(x) < \min(\mathrm{ch}_1(\mathcal{A}),\mathrm{ch}_1(\mathcal{B}))$ или $\mathrm{ch}_1(\overline{x}) < (\mathrm{ch}_1(\mathcal{A}),\mathrm{ch}_1(\mathcal{B}))$, то ситуация разрешается стандартным образом, независимо от того, каковы $\mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\mathcal{B})$. Поэтому в дальнейшем, чтобы не повторяться, такие возможности выбора рассматривать не будем.

<u>Случай (2)</u>: $m_1 < n_1$, $m_3 = 0$, $m_2 = 2, 3$, $m = 1 + 4m_1$.

Рассмотрим случай $m_2 = 2$ (случай $m_3 = 3$ рассматривается аналогично).

Если выбран $a \in A$, то, принимая во внимание замечание, $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 1, 0)$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, 0, 1)$. Тогда, по (1), $m((a),(b)) \geq 4m_1 = m - 1$ и, по (11), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 1, 0)$. Тогда, по (1), (7), (11), $m((a),(b)) \geq \geq 4m_1 = m - 1$ и, также по (1), (7), (11), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 4m_1 = = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 1 + 4m_1 = m.$$

<u>Случай (3)</u>: $m_1 < n_1$, $m_3 = 0$, $m_2 \geq 4$, $m = 2 + 4m_1$.

Пусть выбран $a \in A$. Тогда $\mathrm{ch}(a) = (m_1, m_2', 0)$, $\mathrm{ch}(\overline{a}) = = (m_1, m_2'', 0)$. Если $m_2', m_2'' \geq 2$, то возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, 0, 1)$. Тогда, по (12),(13), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = = m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (2),(3), $m((a),(b)) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Если $m_2' = 1$, то возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = = (m_1, 1, 0)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > 1 + 4m_1 = m - 1$ и, по (2),(3), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Если $m_2'' = 1$, то поступаем аналогично.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Если $\mathrm{ch}_1(b) > m_1$ и $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) > m_1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}_2(a) \geq 2$ и $\mathrm{ch}_2(\overline{a}) \geq 2$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = ch(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (2), (3), $m((a),(b)) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, а также либо, по (2),(3), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$.

Пусть теперь $\mathrm{ch}_1(b) = m_1$ или $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) = m_1$. Для определенности будем считать, что $\mathrm{ch}_1(b) = m_1$. Если $\mathrm{ch}_3(b) = 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}_2(a) \geq 2$ и $\mathrm{ch}_2(\overline{a}) \geq 2$. Тогда, по (12)–(14), $m((a),(b)) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, а также либо, по (2), (3), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = ch(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$.

Пусть теперь $\mathrm{ch}_3(b) = 0$. Если $\mathrm{ch}_2(b) = 1, 2$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}\mathcal{B}$, либо, по (2), (3), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Если $\mathrm{ch}_2(b) \geq 3$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 2, 0)$. Тогда, по (7), $m((a),(b)) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (2),(3), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 2 + 4m_1 = m.$$

Случай (4): $m_1 < n_1,\ m_3 = 1,\ m_2 = 0,\ m = 1 + 4m_1$.

Пусть выбран $a \in A$. Тогда $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 0, 1)$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 0, 1)$. Тогда $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, а также $m((a),(b)) = \infty > m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 0, 1)$. Тогда или $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или вследствие того, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ или, по (4), (8), (11)–(13), $m((a),(b)) \geq 4m_1 = m - 1$, а также или $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или так как $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$ или, по (4), (8), (11)–(13), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 1 + 4m_1 = m - 1.$$

Случай (5): $m_1 < n_1,\ m_3 = 1,\ m_2 = 1, 2, 3,\ m = 2 + 4m_1$.

Рассмотрим случай $m_2 = 1$ (случаи $m_2 = 2$ и 3 разбираются аналогичным образом).

Пусть выбран $a \in A$. Тогда $\mathrm{ch}(a) = (m_1, m_2', m_3')$, $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, m_2'', m_3'')$. Без ограничения общности можно считать, что $m_2' = 1$. Тогда $m_2'' = 0$ и $m_3'' = 1$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$ и, по (4), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Пусть $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 1, 0)$ или $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, 1, 0)$. Для определенности будем считать, что выполнено первое. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 1, 0)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$ и, по (4), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$. Пусть теперь $\mathrm{ch}(b) \neq (m_1, 1, 0)$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) \neq (m_1, 1, 0)$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) =$

$= (m_1, 0, 1)$, $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 1, 1)$. Тогда вследствие того, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ или, по (4), (8), (12),(13), $m((a),(b)) \geq$ $\geq 1 + 4m_1 = m - 1$, а также или $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или так как $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$, или, по (5), (8), (9), (12), (14), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 2 + 4m_1 = m.$$

Случай (6): $m_1 < n_1$, $m_3 = 1$, $m_2 \geq 4$, $m = 3 + 4m_1$.

Пусть выбран $a \in A$. Пусть $\mathrm{ch}(a) = (m_1, m_2', 0)$, где $m_2' = 1, 2, 3$, или $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 0, 1)$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > 2 + 4m_1 = m - 1$, а также или $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или, по (3), (5), (6), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Если $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, m_1'', 0)$, где $m_1'' = 1, 2, 3$, или $\mathrm{ch}(\overline{a}) =$ $= (m_1, 0, 1)$, то поступаем аналогичным образом.

Пусть теперь $\mathrm{ch}(a) \neq (m_1, m_2, 0) \neq \mathrm{ch}(\overline{a})$, где $m_2' = 1, 2, 3$, и $\mathrm{ch}(a) \neq (m_1, 0, 1) \neq \mathrm{ch}(\overline{a})$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = (m_1, n_2', 0)$, где $n_2' \geq 4$. Тогда из того, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ или, по (7),(14), $m((a),(b)) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$, а также или $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или, по (3),(5),(6), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq$ $\geq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Пусть $\mathrm{ch}(b) = (m_1, n_2', 0)$, где $n_2' = 1, 2, 3$, или $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 0, 1)$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$. Эта ситуация уже рассматривалась выше. Если $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, n_2'', 0)$, где $n_2'' = 1, 2, 3$, или $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, 0, 1)$, то поступаем аналогично. Пусть теперь $\mathrm{ch}(b) \neq (m_1, n_2', 0) \neq \mathrm{ch}(\overline{b})$, где $n_2' = 1, 2, 3$, и $\mathrm{ch}(b) \neq$ $\neq (m_1, 0, 1) \neq \mathrm{ch}(\overline{b})$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) =$ $= (m_1, m_2', 1)$, $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, m_2'', 1)$, где $m_2', m_2'' \geq 2$. Тогда или $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или так как $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ или, по (5),(6),(9),(10),(14), $m((a),(b)) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$, а также или $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (\mathcal{B})$, или так как $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$ или, по (5),(6),(9),(10),(14), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq 3+4m_1 = m.$$

Случай (7): $m_1 = n_1$, $m_3 = n_3 = 0$, $m_2 < n_2$, $m = \varphi(m_2)+4m_1$.

Рассмотрим два подслучая.

а) $m_2 = 1$.

Если $m_1 = 0$, то утверждение очевидно.

Пусть $m_1 > 0$. Если выбирается элемент $a \in A$, то либо $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, либо $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) < m_1$, т.е. возникает ситуация, о которой шла речь в замечании. Поэтому возможность такого выбора рассматривать не будем.

Пусть выбран $b \in B$. Напомним, что, в силу замечания, $\mathrm{ch}_1(b) = m_1$ и $\mathrm{ch}_1(\overline{b}) = m_1$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 1, 0)$ и $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1 - 1, m_2'', 1)$, где $m_2'' \geq 4$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо вследствие того, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ или, по (7), $m((a),(b)) \geq 4m_1 > m-1$, а также, по (6), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 3+4(m_1-1) = m-1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq 4m_1 = m-1.$$

б) $m_2 > 1$.

Пусть выбран $a \in A$ и $\mathrm{ch}(a) = (m_1, m_2', 0)$, $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, m_2'', 0)$. Без ограничения общности можно считать, что $m_2' \leq m_2''$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m-1$, а также, по (7), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq \varphi(m_2'') + 4m_1 \geq \varphi(m_2) = 4m_1 - 1 = m-1$, так как $\varphi(m_2'') \geq \varphi(m_2) - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Если $\mathrm{ch}_2(b) \leq \left[\frac{m_2}{2}\right]$, то выбираем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m-1$, а также, по (7), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq \varphi(m_2'') = 4m_1 \geq \varphi(m_2)+4m_1-1 = m-1$. Если $\mathrm{ch}_2(\overline{b}) \leq \left[\frac{m_2}{2}\right]$, то поступаем аналогично.

Пусть теперь $\mathrm{ch}_2(b) > \left[\frac{m_2}{2}\right]$ и $\mathrm{ch}_2(\overline{b}) > \left[\frac{m_2}{2}\right]$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, m_2', 0)$, $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, m_2'', 0)$, причем $m_2', m_2'' \geq \left[\frac{m_2}{2}\right]$. Тогда так как $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ или, по (7), $m((a),(b)) \geq \varphi(m_2') + 4m_1 \geq \varphi(m_2) + 4m_1 - 1 = m - 1$, а также в силу того, что $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$ или, по (7), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq$ $\geq \varphi(m_2'') + 4m_1 \geq \varphi(m_2) + 4m_1 - 1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq \varphi(m_2) + 4m_1 = m - 1.$$

Случай (8): $m_1 = n_1$, $m_3 = n_3 = 1$, $m_2 < n_2$, $m_2 = 0$, $m = 1 + 4m_1$.

Пусть выбран $a \in A$. Тогда $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 0, 1)$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$. Тогда $m((a)),(b) = \infty > m - 1$, а также $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) =$ $= \mathrm{ch}(\mathcal{B})$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 0, 1)$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо из-за того, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ или, по (8),(11)-(13), $m((a),(b)) \geq 4m_1 = m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо так как $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$ или, по (8),(11)-(13), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq 1 + 4m_1 = m.$$

Случай (9): $m_1 = n_1$, $m_3 = n_3 = 1$, $m_2 < 1,2,3$, $m =$ $= 2 + 4m_1$.

Рассмотрим случай $m_2 = 1$ (случаи $m_2 = 2$ и 3 рассматриваются аналогично).

Пусть выбран $a \in A$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{ch}_2(a) = 1$. Тогда $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 0, 1)$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, n_2'', 1)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также, по (8), $m((\overline{a}),(\overline{b}) \geq 1 + 4m_1 =$ $= m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Если $\mathrm{ch}(b) = (m_1, 1, 0)$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также, по (8), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$. Если $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, 1, 0)$, то проделываем все аналогично.

Пусть теперь $\mathrm{ch}(b) \neq (m_1, 1, 0) \neq \mathrm{ch}(\overline{b})$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = (m_1, 0, 1)$ и $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 1, 1)$. Тогда так как $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ или, по (8),(12),(13), $m((a),(b)) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо из-за того, что $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$ или, по (8),(9),(12),(14), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 2 + 4m_1 = m.$$

<u>Случай (10)</u>: $m_1 = n_1$, $m_3 = n_3 = 1$, $m_2 < n_2$, $m_2 \geq 4$, $m = 1 + \psi(m_2) + 4m_1$.

Рассмотрим несколько подслучаев.

а) $m_2 = 4, \ldots, 11$, $m = 3 + 4m_1$.

Пусть выбран $a \in A$. Ясно, что $\mathrm{ch}_3(a) = 1$ или $\mathrm{ch}_3(\overline{a}) = 1$. Без ограничения общности можно считать, что выполнено первое. Если $\mathrm{ch}_2(a) = 0$, то возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{ch}_3(\overline{b}) = \mathrm{ch}_3(\overline{a})$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также или $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или, по (7),(10), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Во всех остальных случаях выбираем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\overline{a})$ и $\mathrm{ch}_3(b) = \mathrm{ch}_3(a)$. Тогда $m((\overline{a}),(\overline{b})) = \infty > m - 1$, а также или $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или, по (9),(10), $m((a),(b)) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Ясно, что $\mathrm{ch}_3(b) = 1$ или $\mathrm{ch}_3(\overline{b}) = 1$. Для определенности пусть выполнено первое. Если $\mathrm{ch}_3(\overline{b}) = 0$, $\mathrm{ch}_2(\overline{b}) = 1, 2, 3$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$. Тогда $m((\overline{a}),(\overline{b})) = \infty > m - 1$, а также, по (9), (10), $m((a),(b)) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Если $\mathrm{ch}_2(a) = 0$ и $\mathrm{ch}_3(a) = 1$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$ и $\mathrm{ch}_3(\overline{a}) = \mathrm{ch}_3(\overline{b})$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также или $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, или, по (7), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Во всех остальных случаях берем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}_3(a) = \mathrm{ch}_3(\overline{a}) = 1$ и $\mathrm{ch}_2(a) = \mathrm{ch}_2(\overline{a}) \geq 1$. Тогда, по (9),(10),(14), $m((a),(b)) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$ и, также по (9),(10),(14), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 2 + 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(A,B) \geq 3 + 4m_1 = m.$$

б) $m_2 \geq 12$, $m = 1 + \psi(m_2) + 4m_1$.

Пусть выбран $a \in A$, $\mathrm{ch}(a) = (m_1, m_2', m_3')$, $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, m_2'', m_3'')$. Ясно, что $m_3' = 1$ или $m_3'' = 1$. Для определенности пусть $m_3' = 1$. Если $m_3'' = 0$ и $m_2'' \leq 2^{\psi(m_2)}$, то $m_2' = m_2 - m_2'' \geq (2^{\psi(m_2)} + \ldots + 2^2) - 2^{\psi(m_2)} = 2^{\psi(m_2)-1} + \ldots + 2^2$ и, следовательно, $\psi(m_2') \geq \psi(m_2) - 1$.

Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\overline{a})$. Тогда $m((\overline{a}),(\overline{b})) = \infty > m - 1$, а также, по (10), $m((a),(b)) \geq \geq 1 + \psi(m_2') + 4m_1 \leq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$.

Если $m_3'' = 0$ и $m_2'' > 2^{\psi(m_2)}$, то выберем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$ и $\mathrm{ch}_3(\overline{b}) = \mathrm{ch}_3(\overline{a})$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также, по (7), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь $m_3'' = 1$. Для определенности будем считать, что $m_2' \leq m_2''$. Тогда $m_2'' \geq \dfrac{m_2}{2} = \dfrac{(2^{\psi(m_2)} + \ldots + 2^2)}{2} > > 2^{\psi(m_2)-1} + \ldots + 2^2$ и, следовательно, $\psi(m_2') \geq \psi(m_2) - 1$.

Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$ и $\mathrm{ch}_3(\overline{b}) = \mathrm{ch}_3(\overline{a})$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также, по (10), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq \geq 1 + \psi(m_2'') + 4m_1 \geq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$, $\mathrm{ch}(b) = (n_1, n_2', n_3')$, $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (n_1, n_2'', n_3'')$. Ясно, что $n_1' = 1$, или $n_3'' = 1$. Пусть $n_3' = 1$. Если $n_3'' = 0$ и $n_2'' \leq 2^{\psi(m_2)}$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$. Тогда $m((\overline{a}),(\overline{b})) = \infty > m - 1$, а также, по (10), $m((a),(b)) \geq 1 + \psi(\mathrm{ch}_2(a)) + 4m_1 \geq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$.

Если $n_3'' = 0$, и $n_2'' > 2^{\psi(m_2)}$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}_3(\overline{a}) = \mathrm{ch}_3(\overline{b})$, $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также, по (7), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь $n_3'' = 1$. Пусть $n_2' < 2^{\psi(m_2)-1} + \ldots + 2^2$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(b)$, $\mathrm{ch}_3(\overline{a}) = \mathrm{ch}_3(\overline{b})$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также, по (10), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq \geq 1 + \psi(\mathrm{ch}_2(\overline{a})) + 4m_1 \geq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$, так как $\mathrm{ch}_2(\overline{a}) = m_2 - \mathrm{ch}_2(a) = m_2 - n_2' \geq 2^{\psi(m_2)} + \ldots + 2^2 - (2^{\psi(m_2)-1} + \ldots \ldots + 2^2) = 2^{\psi(m_2)} > 2^{\psi(m_2)-1} + \ldots + 2^2$.

Если $n_2'' < 2^{\psi(m_2)-1} + \ldots + 2^2$, то поступаем аналогично.

Пусть теперь $n_2', n_2'' \geq 2^{\psi(m_2)-1} + \ldots + 2^2$. Тогда возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}_3(a) = \mathrm{ch}_3(\overline{a}) = 1$ и $\mathrm{ch}_2(a), \mathrm{ch}_2(\overline{a}) \geq \geq 2^{\psi(m_2)-1} + \ldots + 2^2$. Тогда либо $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, либо, по (10), $m((a),(b)) \geq 1 + \psi(\mathrm{ch}_2(a)) + 4m_1 \geq \psi(m_2) + 4m_1 = = m - 1$, а также либо $m((\overline{a}),(\overline{b})) = \infty > m - 1$, либо по (10) $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + \psi(\mathrm{ch}_2(\overline{a})) + 4m_1 \geq \psi(m_2) + 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 1 + \psi(m_2) + 4m_1 = m.$$

<u>Случай (11)</u>: $m_1 = n_1$, $m_3 = 0$, $n_3 = 1$, $m_2 = 1$, $m = 4m_1$.

Если $m_1 = 0$, то очевидно, что $m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.

Пусть $m_1 > 0$. Пусть выбран $a \in A$. Тогда либо $\mathrm{ch}_1(a) < m_1$, либо $\mathrm{ch}_1(\overline{a}) < m_1$, т.е. попадаем в ситуацию, оговоренную замечанием.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Ясно, что либо $\mathrm{ch}_3(b) = 1$, либо $\mathrm{ch}_3(\overline{b}) = 1$. Для определенности пусть $\mathrm{ch}_3(b) = 1$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1 - 1, m_2'', 1)$, где $m_2'' \geq 4$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (11), $m((a),(b)) \geq 4m_1 > m - 1$, а также, по (6), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 3 + 4(m_1 - 1) = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 4m_1 = m.$$

<u>Случай (12)</u>: $m_1 = n_1$, $m_3 = 0$, $n_3 = 1$, $m_2 = 2, 3$, $m = 1 + 4m_1$.

Рассмотрим случай $m_2 = 2$ (случай $m_2 = 3$ разбирается аналогично).

Пусть выбран $a \in A$. Тогда $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 1, 0)$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}_3(b) = \mathrm{ch}_3(\overline{b}) = 1$. Тогда, по (11),

$m((a),(b)) \geq 4m_1 = m - 1$ и также по (11) $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\overline{a}) = (m_1, 1, 0)$. Тогда либо $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, либо, по (7),(11), $m((a),(b)) \geq 4m_1 = m - 1$, а также либо $m((\overline{a}),(\overline{b})) = \infty > m - 1$, либо, по (7),(11), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 1 + 4m_1 = m.$$

Случай (13): $m_1 = n_1$, $m_3 = 0$, $n_3 = 1$, $m_2 \geq 4$, $n_2 = 0$, $m = 1 + 4m_1$.

Пусть выбран $a \in A$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, 0, 1)$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (11),(12), $m((a),(b)) \geq 4m_1 = m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (11),(12), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Тогда $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, 0, 1)$. Возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}_1(a) = \mathrm{ch}_1(\overline{a}) = m_1$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (11),(12), $m((a),(b)) \geq 4m_1 = m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (11),(12), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 1 + 4m_1 = m.$$

Случай (14): $m_1 = n_1$, $m_3 = 0$, $n_3 = 1$, $m_2 \geq 4$, $n_2 \geq 1$, $m = 2 + 4m_1$.

Пусть выбран $a \in A$. Если $\mathrm{ch}_2(a) = 1$, то возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(a)$. Тогда $m((a),(b)) = \infty > m - 1$, а также, по (12),(13), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Если $\mathrm{ch}_2(\overline{a}) = 1$, то поступаем аналогично.

Пусть теперь $\mathrm{ch}_2(a) > 1$ и $\mathrm{ch}_2(\overline{a}) > 1$. Возьмем $b \in B$ такой, что $\mathrm{ch}_3(b) = \mathrm{ch}_3(\overline{b}) = 1$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (12),(13), $m((a),(b)) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (12),(13), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Пусть теперь выбран $b \in B$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{ch}_3(b) = 1$. Если $\mathrm{ch}(\overline{b}) = (m_1, 1, 0)$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\overline{b})$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (12),(13), $m((a),(b)) \geq \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, а также $m((\overline{a}),(\overline{b})) = \infty > m - 1$.

Если $\mathrm{ch}(b) \neq (m_1, 1, 0)$, то возьмем $a \in A$ такой, что $\mathrm{ch}_1(a) > 1$ и $\mathrm{ch}_2(\overline{a}) > 1$. Тогда либо $\mathrm{ch}(a) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(b) = = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (11),(12), $m((a),(b)) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$, а также либо $\mathrm{ch}(\overline{a}) = \mathrm{ch}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{ch}(\overline{b}) = \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, либо, по (7),(12),(13), $m((\overline{a}),(\overline{b})) \geq 1 + 4m_1 = m - 1$.

Следовательно, по предложению 3,

$$m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 2 + 4m_1 = m.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — булевы алгебры,* $\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = = (m_1, m_2, m_3)$, $\mathrm{ch}(\mathcal{B}) = (n_1, n_2, n_3)$, $\mathrm{ch}(\mathcal{A}) <_{1,2,3} \mathrm{ch}(\mathcal{B})$, $m_2 \geq 4$, $n_2 \geq 1$. *Тогда* $m(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 2 + 4m_1 + m_3 + +(\varphi(m_2)(1 - m_3) + \psi(m_2)m_3 - 2)\delta(m_1, n_1)\delta(m_3, n_1)$, *где*

$$\delta(s, k) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = k, \\ 0, & \text{если } s \neq k. \end{cases}$$

§ 2. Сложность идеала в суператомной булевой алгебре

Д.Пальчунов в [15] исследовал разрешимость элементарных теорий булевых алгебр с выделенным идеалом. Была доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы теория счетной булевой алгебры $\mathcal{A}$ с любым выделенным идеалом была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{A}$ была суператомной.*

В дальнейшем под алгеброй $(\mathcal{A}, I)$ будем понимать счетную суператомную булеву алгебру $\mathcal{A}$ с выделенным идеалом I.

В [15] была произведена элементарная характеризация алгебр $(\mathcal{A}, I)$, для чего была введена r–характеристика: $r((\mathcal{A}, I)) = (r_1((\mathcal{A}, I)), r_2((\mathcal{A}, I)), r_3((\mathcal{A}, I)))$, где $r_i \in \omega \cup \{\infty\}$.

Под формулой будем понимать формулу сигнатуры $\Sigma = (\cup, \cap, ^-, 0, 1, I)$ с одной стороны свободной переменной.

Будем говорить, что элемент x алгебры (A, I) является P–элементом, если в (A, I) истинно $P(x)$. Назовем произведением формул P и Q формулу

$$PQ(x) = \neg(\exists y \le x)((\forall z \le y)(\neg P(z)\ \&(\forall z \le x \setminus y)(\neg Q(z))))\ \& \\ \&\ (\forall y \le x)(Q(y) \Leftrightarrow \neg Q(x \setminus y))\ \& \\ \&\ (\forall y_1 y_2 \le x)(y_1 \cap y_2 = 0 \rightarrow (\neg Q(y_1) \vee \neg Q(y_2))).$$

Введем обозначения:

$V_1(x)$ означает, что x — атом, лежащий в идеале I,

$V_2(x)$ означает, что x — атом, не лежащий в I,

$V_3(x)$ означает, что x/I — атом и все атомы, лежащие под x, принадлежат I,

$$V_n(x) = V_{n-3}V_{n-2}(x)\ \&\ (\forall y \le x)(\neg V_{n-1}(y)), \quad n \ge 3.$$

Определим r–характеристику алгебры (A, I).

Если существует такое наименьшее k, что для любого $t > k$ в (A, I) нет V_t–элементов, то положим $r_3 = k$. Если такого k не существует, то $r_3 = \infty$. Далее: если $r_3 = \infty$, то $r_1 = \infty$, $r_2 = 0$; если $0 < r_3 < \infty$, то r_1 — количество непересекающихся V_k–элементов в (A, I); если $r_3 = 1$, то $r_2 = 0$; если $1 < r_3 < \infty$, то r_2 — количество непересекающихся V_{k-1}–элементов в (A, I).

r_3–характеристика описывает алгебру (A, I) с точностью до элементарной эквивалентности. Число r_3 назовем сложностью идеала I в алгебре A. Интересен вопрос: какая максимальная сложность идеала возможна в алгебре A? Так как всякая счетная булева алгебра A является суператомной тогда и только тогда, когда существуют ординал γ и натуральное число $n > 0$ такие, что булева алгебра $B_{\omega^\gamma \times n}$ изоморфна алгебре A [1], то ответ на поставленный вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 2. *В счетной суператомной булевой алгебре $B_{\omega^\gamma \times n}$ максимальная возможная сложность идеала равна $2\gamma + 2$, если $\gamma < \omega$, и равна ∞, если $\gamma \ge \omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде чем непосредственно приступить к доказательству теоремы, установим несколько полезных фактов.

Пусть B — счетная суператомная булева алгебра. Определим функцию $h : B \setminus \{0\} \to \omega + 1$. Положим $h(a) = \max\{\beta \in \omega + 1 |$ существует $b \leq a$ такой, что $(b) \cong B_{\omega^\beta}\}$.

ЛЕММА 1. *Пусть B — счетная суператомная булева алгебра, $a \in B$, $k \in \omega$ и $(B, I) \models V_{2k+1}(a)$ или $(B, I) \models V_{2k+2}(a)$. Тогда $h(a) \geq k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по k.

Пусть $k = 0$. Тогда $(B, I) \models V_1(a)$ или $(B, I) \models V_2(a)$. По определению $V_1(x)$ и $V_2(x)$ в обоих случаях a — атом, поэтому $(a) \cong B_{\omega^0}$, т.е. $h(a) = 0$.

Пусть для $k - 1$ утверждение справедливо. Покажем, что оно верно и для k. Пусть $(B, I) \models V_{2k+1}(a)$ или $(B, I) \models V_{2k+2}(a)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $(B, I) \models V_{2k+1}(a)$. Тогда существуют последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ попарно непересекающихся элементов таких, что $a_i \leq a$, $b_i \leq a$, $i \in \omega$, причем $(B, I) \models V_{2k-2}(a_i)$ и $(B, I) \models V_{2k-1}(b_i)$ для всех $i \in \omega$. По индукционному предположению $h(a_i) \geq k - 2$, $h(b_i) \geq k - 1$. Следовательно, $h(a) \geq k$.

Случай 2: $(B, I) \models V_{2k+2}(a)$. Рассматривается аналогично.

Лемма 1 доказана.

Прежде чем двигаться дальше введем, как это было сделано в [15], конструкцию ω-смешивания семейств алгебр.

Алгебру (B_L, I) назовем ω-смешиванием алгебр $\{(B_{L_n}, I^n)\}_{n\in\omega}$, если:

1) $L = \sum_{i=0}^{\infty} L_i$ — сумма линейных порядков,

2) $x \in I$ равносильно $x \leq b_1 \cup \ldots \cup b_k$ для некоторого $k \in \omega$, причем b_i — элемент алгебры B_{L_i} и $x \cap b_i \in I^i$ для $0 \leq i \leq k$.

ЛЕММА 2. *Для любого $k \in \omega$ существуют идеалы I_1 и I_2 в $B = B_{\omega^k}$ такие, что $1_{(B,I_1)}$ — V_{2k+1}-элемент и $1_{(B,I_2)}$ — V_{2k+2}-элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по k.

Пусть $k=0$. Тогда $B=B_{\omega^0}$ — двухэлементная булева алгебра. Ясно, что если $1_B \in I$, то 1_B — V_1-элемент, а если $1_B \notin I$, то 1_B — V_2-элемент. Следовательно, для $k=0$ утверждение справедливо.

Пусть $k=1$, $B=B_\omega$. Положим $I=\{x\in B|x$ — объединение конечного числа атомов $\}$. Тогда 1_B — V_3-элемент. Пусть теперь

$$L_i=\omega^0,\quad I^{2i}=\hat{1}_{B_{L_{2i}}},\quad I^{2i+1}=\hat{0}_{B_{L_{2i+1}}},\quad i\in\omega.$$

Положим (B,I) — ω-смешивание алгебр $\{(B_{L_i},I^i)\}_{i\in\omega}$. Ясно, что $1_{(B,I)}$ — V_4-элемент, причем $B\cong B_\omega$. Итак, утверждение доказано и для $k=1$.

Пусть теперь утверждение справедливо для $k-2$ и $k-1$. Покажем, что оно имеет место и для k. По индукционному предположению существуют алгебры $(B_{\omega^{k-2}},I_1),(B_{\omega^{k-1}},I_2)$ такие, что $1_{(B_{\omega^{k-2}},I_1)}$ — V_{2k-2}- элемент и $1_{(B_{\omega^{k-1}},I_2)}$ — V_{2k-1}-элемент. Положим: $L_{2i}=\omega^{k-2}$, $I^{2i}=I_1$, $L_{2i+1}=\omega^{k-1}$, $I^{2i+1}=I_2$, $i\in\omega$. Пусть (B,I) — ω-смешивание алгебр $\{(B_{L_i},I^i)\}_{i\in\omega}$. Непосредственно из определения формул $V_i(x)$ следует, что $1_{(B,I)}$ — V_{2k+1}-элемент, причем $B\cong B_{\omega^k}$.

Аналогично строится алгебра (B,I) такая, что $1_{(B,I)}$ — V_{2k+2}-элемент и $B\cong B_{\omega^k}$.

ЛЕММА 3. *Для всякой суператомной булевой алгебры $B_{\omega^k\times n}$, $k\in\omega$, $n>0$, существует идеал I такой, что $r_3((B_{\omega^k\times n},I))=2k+2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (B_{ω^k},I') такая алгебра, что $1_{(B_{\omega^k},I')}$ — V_{2k+2}-элемент. Тогда в качестве требуемой можно взять, например, алгебру $(B_{\omega^k\times n},I)\cong$ $\cong(B_{\omega^k},I')\times\ldots\times(B_{\omega^k},I')$, где в правой части n прямых сомножителей.

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. *Для любой счетной суператомной булевой алгебры $B_{\omega^\gamma \times n}$, где $\gamma \geq \omega$, $n > 0$, существует идеал I такой, что $r_3((B_{\omega^k \times n}, I)) = \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что утверждение достаточно доказать для B_{ω^ω}. Пусть алгебры (B_{ω^k}, I^k), $k \in \omega$, таковы, что $1_{(B_\omega^k, I^k)}$ — V_{2k+2}-элемент. Положим (B, I) ω-смешивание алгебр $\{(B_{\omega^k}, I^k)\}_{k \in \omega}$. Очевидно, что $B \cong B_{\omega^\omega}$ и $r_3((B, I)) = \infty$.

Лемма 4 доказана.

Из лемм 1–4 непосредственно следует доказательство теоремы 2.

В действительности, как это уже было отмечено во введении, методы, применяемые в доказательствах вышеприведенных лемм, позволяют понять не только какие сложности возможны в конкретной суператомной булевой алгебре, но и дают возможность определить, какие могут быть получены различные элементарные теории данной суператомной булевой алгебры при обогащении ее выделенным идеалом. Ввиду громоздкости доказательств, факты, касающиеся сделанного выше замечания, не приводятся, тем более что читатель, если в этом возникнет необходимость, без труда проведет нужные рассуждения. Здесь сформулируем лишь одно простое

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если идеал I имеет максимальную возможную сложность в алгебре $B_{\omega^m \times n}$, где $m \in \omega, n > 0$, то $r_1((B_{\omega^m \times n}, I)) + r_2((B_{\omega^m \times n}, I)) \leq n$.*

Пусть B — алгебра Линденбаума теории T класса K алгебраических систем некоторой сигнатуры Σ. Если $K_0 \in K$, то $I_{K_0} = \{\Phi$ — предложение сигнатуры $\Sigma | A \models \neg\Phi$ для всех $A \in K_0\}$ — идеал в B.

СЛЕДСТВИЕ 3. Максимально возможная сложность идеала I_{K_0} в алгебре Линденбаума

а) класса всех моделей пустой сигнатуры (имеется лишь предикат равенства) равна 4,

б) класса всех булевых алгебр равна 6,

в) класса всех суператомных булевых алгебр с выделенным идеалом равна 8,

г) класса всех моделей сигнатуры, содержащей ровно n одноместных предикатов, равна $2(2^n + 1)$.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр //Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 31-40.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры. — М.: Наука, 1988.

3. ДУЛАТОВА З.А. Расширенные теории булевых алгебр//Сиб. мат. журн. — 1984. — Т. 25, № 1. — С. 201-204.

4. ДУЛАТОВА З.А. Булевы алгебры с выделенной локально конечной группой автоморфизмов //8 Всесоюзн. конф. по мат. логике, Москва, сент. 1986 г.: Тез. докл. — Москва, 1986. — С. 62.

5. ЕРШОВ Ю.Л. Неразрешимость теорий симметрических и простых конечных групп //ДАН СССР. — 1964. — Т. 158, № 4. — С. 777-779.

6. ЕРШОВ Ю.Л. Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров //Алгебра и логика. — 1964. — Т. 3, № 3. — С. 17-38.

7. ЕРШОВ Ю.Л. Неразрешимость некоторых полей //ДАН СССР. — 1965. — Т. 161, № 1. — С. 27-29.

8. ЕРШОВ Ю.Л. Об элементарных теориях локальных полей //Алгебра и логика. — 1965. — Т. 4, № 2. — С. 5-30.

9. ЕРШОВ Ю.Л. Об элементарной теории максимальных нормированных полей //Алгебра и логика. — 1965. — Т. 4, № 3. — С. 31-70.

10. Элементарные теории /Ю.Л.Ершов, И.А.Лавров, А.Д.Тайманов, М.А.Тайцлин //Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, № 4. — С. 37-108.

11. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.

12. КОКОРИН А.И., ПИНУС А.Г. Вопросы разрешимости расширенных теорий //Успехи мат.наук. — 1978. — Т. 33, № 2. — С. 49–84.

13. МАРТЬЯНОВ В.И. Неразрешимость теории булевых алгебр с автоморфизмом //Сиб.мат.журн. — 1982. — Т. 23, № 3. — С. 147–154.

14. МОРОЗОВ А.С. Группы рекурсивных автоморфизмов конструктивных булевых алгебр //Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 2. — С. 138–158.

15. ПАЛЬЧУНОВ Д.Е. О неразрешимости теории булевых алгебр с выделенным идеалом //Алгебра и логика. — 1986. — Т. 25, № 3. — С. 326–346.

16. ПАЛЬЧУНОВ Д.Е. Счетно-категоричные булевы алгебры с выделенными идеалами. — Новосибирск, 1986. — 48 с. — (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 12).

17. ПАЛЬЧУНОВ Д.Е. Конечно-аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами //Алгебра и логика. — 1987. — Т. 16, № 4. — С. 435–455.

18. AX J., KOCHEN S. Diophantine problems over local fields. III //Ann. Math. — 1966. — Vol. 84. — P. 437–456.

19. AX J. The elementary theory of finite fields //Ann. Math. — 1968. — Vol. 88. — P. 239–271.

20. DENEF J. Some trivial remarks on Hensel fields in char. — 1978 (Preprint).

21. EHRENFEUCHT A. An application of games to the complet-eness problem for formalized theories //Fund. Math. — 1961. — Vol. 49. — P. 129–141.

22. Mc KENZIE R., MONK J.D. On the automorphism groups of Boolean algebras //Proc. Int. Colloc. of Infinite and Finite Sets, Keszthely, Hungary. — 1973. — P. 951–988.

23. MONK J.D. On the automorphism groups of denumerable Boolean algebras //Ann. Math. — 1975. — Vol. 216. — P. 5–10.

24. RABIN M.O. Decidability of the second order theories and automata on infinite trees //Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. № 141. — P. 1–35.

25. RUBIN M. On the automorphism groups of countable Boolean algebras //Israel J. Math. — 1980. — Vol. 35, № 1-2. — P. 151–170.

26. SZMIELEW W. Elementary properties of Abelian groups //Fund. Math. — 1955. — Vol. 41. — P. 203–271.

27. TARSKI A. Arithmetical classes and types of Boolean algebras //Bull. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 55. — P. 63.

28. TARSKI A. Arithmetical classes and types of algebraically closed and real clossed fields //Bull. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 55. — P. 63.

Поступила в редакцию
10 марта 1998 года