ОБОБЩЕННАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ОПРЕДЕЛИМОСТЬ
(Вычислительные системы)
1998 год **Выпуск 161**

УДК 510.532

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ ФОРМУЛЬНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ РЕКУРСИВНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР[1]

С.Ю.Подзоров

В настоящей работе доказывается ряд утверждений, касающихся алгоритмической сложности некоторых формульных подмножеств специального вида в рекурсивных булевых алгебрах. Это является частным случаем более общей проблемы об алгоритмической сложности формульных подмножеств в произвольной рекурсивной модели. Ясно, что все такие подмножества будут арифметическими и что их сложность в арифметической иерархии будет не выше, чем их сложность в иерархии формул модели; проблема состоит в нахождении точной оценки уровня этих подмножеств в арифметической иерархии.

В случае булевых алгебр имеется каноническая система формульных подмножеств, выделяющих атомы, безатомные элементы, атомные элементы и идеалы Ершова–Тарского в последовательности фактор-алгебр по итерированным идеалам Ершова–Тарского. Для произвольной n–формулы $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры булевых алгебр справедливо следующее утверждение [3]:

$$\mathcal{B} \models [\Phi(\bar{x}) \longleftrightarrow \Psi_1(\bar{x})] \wedge [\Phi(\bar{x}) \longleftrightarrow \Psi_2(\bar{x})],$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 96–01–01525.

где B — булева алгебра, Ψ_1, Ψ_2 — $\forall$-формула и $\exists$-формула сигнатуры Σ_n (определения см. в [3]). Поэтому принципиальным представляется вопрос об арифметической сложности канонических формульных подмножеств, чему и посвящена эта статья.

Введем необходимые определения.

Пусть $\{I_n, A_n, Al_n, At_n : n \in N\}$ — каноническая система формул сигнатуры булевых алгебр. Для удобства изложения будем обозначать $P_{4n} \stackrel{\mathrm{df}}{=} I_n$, $P_{4n+1} \stackrel{\mathrm{df}}{=} A_n$, $P_{4n+2} \stackrel{\mathrm{df}}{=} Al_n$, $P_{4n+3} \stackrel{\mathrm{df}}{=} At_n$.

Пусть B — конструктивизируемая булева алгебра, ν — ее конструктивизация. Тогда

$$f_{(B,\nu)}(i) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mu k\{\nu^{-1}(P_i(B)) \in \Delta_{k+1}\},$$

$$F_B \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{f : N \to N : (\exists \nu \text{ — конструктивизация } B) \quad (f = f_{(B,\nu)})\},$$

$$f_B^{\min}(i) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \min\{f(i) : f \in F_B\},$$

$$f_B^{\max}(i) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\{f(i) : f \in F_B\}.$$

Заметим, что для $f \in F_B$ выполняются следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & f(i) \le i, \\
2) & f(4i+1) \le f(4i)+1, \\
3) & f(4i+2) \le f(4i+1)+1, \\
4) & f(4i+3) \le f(4i+2)+1, \\
5) & f(4i+4) \le \max\{f(4i+2), f(4i+3)\}+1, \\
6) & f(4i) \le f(4i+1)+1.
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Соотношения 1–5 следуют из определения множества F_B. Соотношение 6 тоже, так как $(\forall x \in B)[B \models I_n(x) \iff$ $\iff B \models (\exists a_1, a_2)(A_n(a_1) \wedge A_n(a_2) \wedge (x = a_1 \wedge a_2) \wedge \neg A_n(x))]$.

В дальнейшем мы будем работать в основном с этими обозначениями. Некоторые уже известные результаты теории конструктивных булевых алгебр можно изложить в этих обозначениях: так, например, если $ch(B) = (1,1,0)$ и $f_B^{\min}(1) = 0$, то $0 \in F_B$ [1]. Ряд других результатов получен в этой работе: при их доказательстве используются методы и теоремы статьи [2], для ссылок на которые будем пользоваться монографией [1]. Все необходимые определения и обозначения можно посмотреть в [1].

§ 1. Пример булевой алгебры с одноэлементным множеством F_B

В этом параграфе строится пример булевой алгебры, для которой $f_B^{\min}(i) = f_B^{\max}(i) = i$.

Пусть $k > 0$. По теореме 3.5.1 [1], существует конструктивная $2k$-атомная булева алгебра B'_k, которая не сильно конструктивизируема. Тогда $\dfrac{B'_k}{F_{2k}(B'_k)}$ — Σ_{4k}-алгебра. Эта алгебра не является Δ_{4k}-алгеброй, иначе она была бы Σ_{4k-1}-алгеброй [1, теорема 3.5.4] и, по следствию 3.5.7 [1], была бы изоморфна $\dfrac{B}{F_{2k}(B)}$ для некоторой сильно конструктивной $2k$-атомной булевой алгебры B. Поскольку $\dfrac{B'_k}{F_{2k}(B'_k)}$ не одноэлементна (что очевидно), то, по упражнению 1.5.3 [1], $B'_k \cong B$, что противоречит исходному предположению относительно B'_k.

По следствию 3.7.7 [1], $\dfrac{B'_k}{F_{2k}(B'_k)} \cong \dfrac{B_k}{I_k(B_k)}$ для некоторой конструктивной булевой алгебры (B_k, ν_k). Так как $\dfrac{B_k}{I_k(B_k)}$ не Δ_{4k}-алгебра, то $f_{(B_k,\nu_k)}(4k) = 4k$. Заметим, что (B_k, ν_k) строится эффективно по k.

Пусть теперь $(B, \nu) = \sum_{k \in N} {}_{rec}(B_k, \nu_k)$. Покажем, что $f_B^{\min}(4i)$ не может быть меньше, чем $4i$. Действительно, иначе для некоторой функции $f \in F_B$ $f(4i) < 4i$. Тогда для некоторого $b_i \in B$ $\hat{b}_i \cong B_i$ и существует $f \in F_{B_i}$ такая, что $f(4i) < 4i$, а это невозможно по построению.

Равенство $f_B^{\min}(i) = i$ следует теперь из равенства $f_B^{\min}(4i) = 4i$ и соотношений (1).

§ 2. Простые булевы алгебры

В этом параграфе доказан ряд утверждений относительно того, какие функции содержатся в F_B, если B — простая булева алгебра.

Пусть $f \in F_B$, B — простая алгебра. Тогда для f выполнены следующие соотношения:

1)–6) соотношения (1);

7) $f(4i+3) \le \max\{f(4i), f(4i+1)+1\}$;

8) $f(4i) \le 3i$.

Соотношение 7 очевидно, так как в B нет элементов, содержащих бесконечно много попарно различных атомов i-го уровня. Соотношение 8 является следствием соотношений 1–7.

Через B_n будем обозначать простую булеву алгебру элементарной характеристики $(n, 1, 0)$, через B_ω — простую булеву алгебру характеристики $(\infty, 0, 0)$. Если $A \subseteq N$, то через $A^{<\omega}$ будем обозначать множество всех конечных последовательностей элементов из A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $A \neq N$ — бесконечное арифметическое множество и для $k, n \in N$ $A = W_k^{\emptyset^n}$. Существует конструктивизация ν булевой алгебры B_{n+1}, для которой $\nu^{-1}(I_n(B_{n+1})) \equiv_m A^{<\omega}$, причем ν эффективно строится по n и k.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все построения, используемые при доказательстве предложения, будут эффективны.

Пусть $R \subseteq N^{n+1}$ — $(n+1)$-местный предикат, $n > 0$. Определим предикат $\mathcal{F}(R)$ следующим образом: $R' \overset{\mathrm{df}}{=} R \cup \cup\{\langle x, 0, \ldots, 0\rangle : x \in N\}$, $\mathcal{F}(R) \overset{\mathrm{df}}{=} R' \cup \{\langle x, y_1, \ldots, y_k, 0, y'_{k+2}, \ldots \ldots, y'_n\rangle : y'_{k+2}, \ldots, y'_n \in N, (\exists y_{k+1}) \ldots (\exists y_n) R'(x, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots y_n)\}$.

Докажем лемму относительно свойств введенного оператора.

ЛЕММА 1. *Для $R \subseteq N^{n+1}$ выполнены соотношения:*

1) $$\{x : (\exists^\omega y_1)\ldots(\exists^\omega y_n)R(x, y_1, \ldots, y_n)\} = \\ = \{x : (\exists^\omega y_1)\ldots(\exists^\omega y_n)\mathcal{F}(R)(x, y_1, \ldots, y_n)\};$$

2) $(\forall x \in N)(\langle x, 0, \ldots, 0\rangle \in \mathcal{F}(R)), \quad R \subseteq \mathcal{F}(R);$

3) $$\langle x, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n\rangle \in \mathcal{F}(R) \Longrightarrow (\exists^{\geq 1} y'_{k+1}) \\ (\exists^\omega y'_{k+2})\ldots(\exists^\omega y'_n)\mathcal{F}(R)(x, y_1, \ldots, y_k, y'_{k+1}, \ldots, y'_n);$$

4) *если R — рекурсивно-перечислимый предикат, то и $\mathcal{F}(R)$ — рекурсивно-перечислимый предикат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1.

1. Проведем доказательство п.1 по индукции. При $n = 1$

$$\{x : (\exists^\omega y)R(x, y)\} = \{x : (\exists^\omega y \neq 0)R(x, y)\} = \\ = \{x : (\exists^\omega y \neq 0)\mathcal{F}(R)(x, y)\} = \{x : (\exists^\omega y)\mathcal{F}(R)(x, y)\}.$$

Пусть утверждение верно для n. Тогда для $n + 1$

$$\{x : (\exists^\omega y_1)\ldots(\exists^\omega y_{n+1})R(x, y_1, \ldots, y_{n+1})\} = \\ = \{x : (\exists^\omega y_1 \neq 0)(\exists^\omega y_2)\ldots(\exists^\omega y_{n+1})R(x, y_1, \ldots, y_{n+1})\} = \\ = \{x : (\exists^\omega y_1 \neq 0)(\exists^\omega y_2)\ldots(\exists^\omega y_{n+1})R(y_1 \cdot)(x, y_2, \ldots, y_{n+1})\} = \\ = \{x : (\exists^\omega y_1 \neq 0)(\exists^\omega y_2)\ldots(\exists^\omega y_{n+1})\mathcal{F}(R(y_1, \cdot))(x, y_2, \ldots \\ \ldots, y_{n+1})\} = \\ = \{x : (\exists^\omega y_1 \neq 0)(\exists^\omega y_2)\ldots(\exists^\omega y_{n+1})\mathcal{F}(R)(x, y_1, \ldots, y_{n+1})\} = \\ = \{x : (\exists^\omega y_1)\ldots(\exists^\omega y_{n+1})\mathcal{F}(R)(x, y_1, \ldots, y_{n+1})\}.$$

Нетривиальным здесь является лишь предпоследнее равенство, которое следует из соотношения $\{\langle x, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\rangle : \mathcal{F}(R(y_1, \cdot))(x, y_2, \ldots, y_{n+1})\} = \{\tau \in \mathcal{F}(R) : \pi_2(\tau) = y_1\} \cup \{\langle x, y_1, 0, y'_3, \ldots, y'_{n+1}\rangle : x, y'_i \in N\}$ при $y_1 \neq 0$.

2. Следует из определения $\mathcal{F}(R)$.

3. Доказывается следующим образом. Либо $(\forall i \leq k)$ $(y_i \neq 0)$ и тогда в качестве y_{k+1} можно взять 0 при $k < n$ (при $k = n$ кванторной приставки нет), либо это неверно и y_{k+1} может быть любым.

4. Очевидно. □

Ясно, что $\overline{A}$ — Π_{2n}-множество и $x \in A \iff (\exists x^{\omega} y_1)\ldots$ $\ldots(\exists^{\omega} y_n)R'(x, y_1, \ldots, y_n)$, где R' — рекурсивно-перечислимый предикат. Пусть $R = \mathcal{F}(R')$, $\leq_1$ — рекурсивный линейный порядок на натуральных числах по типу $2+\eta$, причем 0 — его наименьший элемент. Под характеристикой линейного порядка будем понимать элементарную характеристику булевой алгебры, построенной по этому порядку. Рассмотрим множество $L = \{\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n\rangle :$ $R(x, y_1, \ldots, y_n)\}$ и линейный порядок на нем, определенный следующим образом: $\langle x, y_1, z_1, \ldots\rangle <_R \langle x', y_1', z_1', \ldots\rangle$, если $x < x'$ или $x = x' \wedge y_1 < y_1'$, или $x = x' \wedge y_1 = y_1' \wedge z_1 <_1 z_1'$, или ... или $x = x' \wedge \bigwedge_{i<n} (y_i = y_i' \wedge z_i = z_i') \wedge y_n = y_n' \wedge z_n <_1 z_n'$.

Пусть $\overline{u}$ — набор натуральных чисел длины не более чем $2n$, являющийся начальным сегментом некоторого элемента из L, $L(\overline{u})$ — линейный порядок, получающийся ограничением $(L, \leq_R)$ на множество наборов из L, начинающихся с $\overline{u}$. Докажем лемму, касающуюся свойств $L(\overline{u})$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_n z_n\rangle \in L$, $1 \leq k < n$. *Тогда*

1) *если выполнено* $(\exists^{\omega} y_{k+1}')\ldots(\exists^{\omega} y_n')R(x, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}', \ldots$ $\ldots, y_n')$, *то* $ch(L(\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_k, z_k\rangle)) = (n-k, 1, 0)$, *а иначе* $ch(L(\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_k, z_k\rangle)) = (n-k-1, m, 1)$ *для некоторого* $0 < m < \omega$;

2) *если выполнено* $(\exists^{\omega} y_{k+1}')\ldots(\exists^{\omega} y_n')R(x, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}', \ldots$ $\ldots, y_n')$, *то* $ch(L(\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_k\rangle)) = (n-k, 1, 1)$, *в противном случае* $ch(L(\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_k\rangle)) = (n-k, 0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2.

1. Очевидно для $k = n-1$.

2. Для $k = n-1$ следует из того, что булева алгебра, построенная по линейному порядку $(2+\eta)\times m\times(2+\eta)$, $m \geq 1$, имеет характеристику (1,0,1), а по линейному порядку $(2+\eta)\times\omega\times(2+\eta)$ — (1,1,1).

Пусть утверждение леммы верно для $k+1$. Тогда $L(\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_k, z_k\rangle) = \sum_{y_{k+1}} L(\langle x, y_1, z_1, \ldots, z_k, y_{k+1}\rangle)$ и $L(\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_k\rangle) = L(\langle x, y_1, z_1, \ldots, y_k, z_k\rangle) \times (2+\eta)$, что доказывает лемму для k. □

Закончим доказательство предложения 1.

В качестве следствия леммы получаем, что при $x \in \overline{A}$ $ch(L(\langle x\rangle)) = (n, 1, 0)$, а при $x \in A$ $1 \in I_n(B_{L(\langle x\rangle)})$. Кроме того, легко показать, что если $L(\langle x\rangle) = L_1 + L_2$, то $ch_1(L_1) < n$, так что $[\langle x, \ldots\rangle, \langle x_1, \ldots\rangle[\in I_n(B_L) \iff (\forall x \le x' < x_1)(x' \in A)$. В линейных порядках $L(\overline{u})$ полуинтервалы, определяющие элементы характеристики $(m, 1, 0)$, $m < n$, нигде не стоят рядом, так что булева алгебра B_L — простая, характеристики $(n, \infty, 0)$. Поскольку L не имеет последнего элемента, то линейный порядок $L^* = L + [(2+\eta)\times\omega]^* \times \eta$ определяет простую булеву алгебру характеристики $(n+1, 1, 0)$ и L — рекурсивно-перечислимое множество. Пусть ν — "естественная" конструктивизация булевой алгебры B_{L^*}, которая получается из конструктивизации линейного порядка $(L, \le_R)$ с помощью перечисляющей функции для L. Тогда ν удовлетворяет всем условиям предложения, сводящие функции находятся очевидным образом. □

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть $A \ne N$ — бесконечное арифметическое множество, $A = W_k^{\emptyset^{(n)}}$. Существует нумерация ν булевой алгебры B_1, для которой все операции представимы рекурсивными функциями, а $\nu^{-1}(0) \equiv_m A^{<\omega}$, причем ν эффективно строится по n и k.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $k, n \in A$, A — бесконечное Σ_k-множество с непустым дополнением, $k \le 3n$. Тогда существует конструктивизация ν булевой алгебры B_{n+1}, для которой $\nu^{-1}(I_n(B_{n+1})) \equiv_m A^{<\omega}$, причем она эффективно строится по n и A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все построения предложения будут эффективны. Будем пользоваться терминологией и обозначениями раздела 3.7 [1]. Для классов арифметической иерархии будем считать $\Sigma_k = \Pi_k = \Delta_k = \Delta_0$, если $k < 0$. По индукции определим последовательность нормальных сегментов двоичного дерева $S_0, S_1, S_2, \ldots$ так, чтобы $S_i \in \Pi_{k-3i}$ и $(\overline{S}_0)^{<\omega} \equiv_m A^{<\omega}$.

Положим $S_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \{\sigma : \nu[\sigma] \ne 0\}$, где $\{\nu[\sigma] : \sigma \in 2^{<\omega}\}$ — стандартное множество, порождающее нумерованную булеву алгебру, построенную в следствии 1. Так как $A^{<\omega}$ — Σ_k-множество, то S_0 — Π_k-сегмент. Функции $f : \langle\sigma_1, \ldots \ldots, \sigma_s\rangle \mapsto h_1(\nu^{-1}(\nu[\sigma_1])) * \ldots * h_1(\nu^{-1}(\nu[\sigma_s]))$ и $g : \tau \mapsto \langle\tau_1 * 0, \ldots \ldots, \tau_{2^v} * 0\rangle$, где h_1, h_2 — сводящие функции для $\nu^{-1}(0)$ и $A^{<\omega}$, $\tau_1, \ldots, \tau_{2^v}$ — все элементы дерева $2^{<\omega}$ уровня v, $v = h_2(\tau)$, определяют нужную нам m-эквивалентность.

Пусть S_i определено, $q = k - 3i - 3$. Имеем: $\tau \notin S_i \iff \iff (\exists x)(\forall y)(\exists z)R(\tau, x, y, z)$, где R — Π_q-отношение. Согласно [4, § 4], существует Π_q-предикат $P(\tau, z, n)$, для которого

1) $\psi_\tau = \{n : (\exists z)P(\tau, z, n)\}$ — непустой начальный сегмент натурального ряда,

2) $\tau \in S_i \iff (\exists^\omega \sigma \succeq \tau)(\psi_\sigma \neq \omega)$.

Отношение $(\forall i < z)\neg P(\tau, i, n)$ является Σ_q-отношением. Значит, $D'(\tau, z, n) \overset{\mathrm{df}}{=} P(\tau, z, n) \land (\forall i < z)\neg P(\tau, i, n) = = (\forall x)P'(\tau, z, n, x) \land (\exists x)P''(\tau, z, n, x)$, где P' и P'' — Σ_{q-1}- и Π_{q-1}-отношения. Определим отношения:

1) $q > 0 :$ $D(\tau, z, n, t) \overset{\mathrm{df}}{=} (\forall x \leq t)P'(\tau, z, n, x) \land (\exists x \leq t) P''(\tau, z, n, x)$, $Q(\tau, z, n, t) \overset{\mathrm{df}}{=} (\forall s \geq t)(D(\tau, z, n, s) \longleftrightarrow D(\tau, z, n, t)) \land \land[(t = 0) \lor (D(\tau, z, n, t) \longleftrightarrow \neg D(\tau, z, n, t - 1))] \land D(\tau, z, n, t)$;

2) $q \leq 0 :$ $Q(\tau, z, n, t) \overset{\mathrm{df}}{=} P(\tau, z, n) \land (\forall i < z)\neg P(\tau, i, n) \land (t = 0)$.

Пусть $Q_\tau \overset{\mathrm{df}}{=} \{\langle z, n, t\rangle : Q(\tau, z, n, t)\}$. Следующие свойства проверяются непосредственно:

1) $D(\tau, z, n, t)$ — Δ_q-отношение, $Q(\tau, z, n, t)$ — Π_q-отношение, Q_τ — Π_q-множество;

2) $n \in \psi(\tau) \Longrightarrow (\exists! z)D'(\tau, z, n), n \notin \psi_\tau \Longrightarrow \neg(\exists z)D'(\tau, z, n)$;

3) $D'(\tau, z, n) \Longrightarrow (\exists t_0)(\forall t \geq t_0)D(\tau, z, n, t)$, $\neg D'(\tau, z, n) \Longrightarrow \Longrightarrow (\exists t_0)(\forall t \geq t_0)\neg D(\tau, z, n, t)$;

4) $D'(\tau, z, n) \Longrightarrow (\exists! t)Q(\tau, z, n)$, $\neg D'(\tau, z, n) \Longrightarrow \neg(\exists t) Q(\tau, z, n, t)$;

5) Q_τ бесконечно $\iff \psi_\tau = \omega$.

Определим нормальный сегмент R_τ двоичного дерева $R_\tau \overset{\mathrm{df}}{=} \{\sigma \in 2^{<\omega} : (\sigma = \Lambda) \lor (\sigma = 1 * \sigma') \lor [(\sigma = 0 * \sigma') \land (\forall i \leq \leq lh(\sigma'))(\pi_i(\sigma') = 1 \longrightarrow i \in Q_\tau)]\}$; R_τ — Π_q-сегмент. Наконец, полагаем $S_{i+1} \overset{\mathrm{df}}{=} \{\sigma \in 2^{<\omega} : (\sigma = \tilde{\tau}) \lor (\sigma = \tilde{\tau} * 0) \lor (\sigma = = \tilde{\tau} * 1 * \varepsilon \land \varepsilon \in R_\tau)\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — безатомная булева алгебра и $\varphi : 2^{<\omega} \to \mathcal{A}$ — такое отображение, что $2^{<\omega}$ порождает $\mathcal{A}$ [1, 1.7]. Пусть $S \subseteq 2^{\omega}$ — нормальный сегмент. Ясно, что $I_S \stackrel{\text{df}}{=} \bigcup\{\varphi(\sigma) : \sigma \in S_0 \in \mathcal{P}_{fin}(\bar{S})\}$ — идеал в $\mathcal{A}$ и что $\dfrac{\mathcal{A}}{I_S} \cong al(S)$. Для нормального сегмента S рассмотрим нумерованную булеву алгебру $(\mathcal{B}_S, \nu_S)$, которая определяется следующим образом: пусть μ — конструктивизация булевой алгебры $\mathcal{A}$, построенная по дереву $2^{<\omega}$ [1, 3.3], тогда $(\mathcal{B}_S, \nu_S) \stackrel{\text{df}}{=} (\dfrac{\mathcal{A}}{I_S}, \dfrac{\mu}{I_S})$. Ясно, что $\nu_S^{-1}(0) \equiv_m (\bar{S})^{<\omega}$ и все операции на $\mathcal{B}_S$ представимы рекурсивными функциями.

Нам потребуется

ЛЕММА 3. $\mathcal{B}_{S_i} \cong \mathcal{B}_{i+1}, \nu_{S_i}^{-1}(I_i(\mathcal{B}_{S_i})) \equiv_m A^{<\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проведем индукцией по i. Для $i = 0$ справедливость леммы следует из определения S_0. Пусть лемма доказана для i. Покажем, что:

1) в $\mathcal{B}_{S_{i+1}}$ не существует атомного элемента, содержащего бесконечно много атомов;

2) $\mathcal{B}_{S_i} \cong \dfrac{\mathcal{B}_{S_{i+1}}}{Fal(\mathcal{B}_{S_{i+1}})}$;

3) $\nu_{S_i}^{-1}(I_i(\mathcal{B}_{S_i})) \equiv_m \nu_{S_{i+1}}^{-1}(I_{i+1}(\mathcal{B}_{S_{i+1}}))$.

Обозначим $I^0 \stackrel{\text{df}}{=} I_{S_i}, \quad I^1 \stackrel{\text{df}}{=} I_{S_{i+1}}$.

Для доказательства п.1 достаточно показать, что если $\sigma \in 2^{<\omega}$, то $\dfrac{\varphi(\sigma)}{I^1}$ либо содержит безатомный элемент, либо только конечное число атомов. Если $\sigma = \tilde{\tau} * 1 * \varepsilon$, то имеем:

а) если $\varepsilon = \Lambda$, то $\dfrac{\varphi(\sigma)}{I^1}$ содержит безатомный элемент $\dfrac{\varphi(\sigma * 1)}{I^1}$;

б) если $\pi_1(\varepsilon) = 1$, то $\dfrac{\varphi(\sigma)}{I^1}$ — безатомный;

в) если $\pi_1(\sigma) = 0$, то при $\psi_\tau = \omega$ $\dfrac{\varphi(\sigma)}{I^1}$ — безатомный, а при $\psi_\tau \neq \omega$ $\dfrac{\varphi(\sigma)}{I^1}$ состоит из объединения конечного числа атомов.

Если $\sigma = \tilde{\tau}$ или $\sigma = \tilde{\tau} * 0$, то $\dfrac{\varphi(\sigma)}{I^1}$ содержит безатомный элемент $\dfrac{\varphi(\widetilde{\tau * 0 * 11})}{I^1}$.

Для доказательства п.2 заметим, что соответствие $\alpha : \dfrac{\varphi(\tau)}{I^0} \longmapsto \dfrac{\varphi(\tilde{\tau})}{I^1}$ однозначно и определяет изоморфизм между $\mathcal{B}_{S_i}$ и $\dfrac{\mathcal{B}_{S_{i+1}}}{Fal(\mathcal{B}_{S_{i+1}})}$, так как $\tau \in S_i \iff (\exists^{<\omega}\sigma)(\sigma \succeq \tau \wedge \psi_\tau \neq \omega)$.

Пункт 3 следует из того, что $\dfrac{\varphi(\tau)}{I^0} \in I_i(\mathcal{B}_{S_i}) \iff \dfrac{\varphi(\tilde{\tau})}{I^1} \in I_{i+1}(\mathcal{B}_{S_{i+1}}) \iff \dfrac{\varphi(\tilde{\tau} * 0)}{I^1} \in I_{i+1}(\mathcal{B}_{S_{i+1}})$ и $\dfrac{\varphi(\tilde{\tau} * 1)}{I^1} \in I_1(\mathcal{B}_{S_{i+1}})$. □

В качестве ν теперь можно взять ν_{S_n}, что и доказывает предложение. □

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В построенной конструктивизации множества $\nu^{-1}(I_i(\mathcal{B}_{n+1}))$ лежат в Σ_{k-3i}.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть g — рекурсивная функция, для которой $g(i+1) - g(i) \leq 3$, $g(0) = 0$. Тогда существует $f \in F_{\mathcal{B}_\omega}$, для которой $f(4i) = g(i)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По i можно эффективно найти множество A_i из $\Sigma_{g(i)} \setminus \Pi_{g(i)}$. Тогда $A_i^{<\omega} \in \Sigma_{g(i)} \setminus \Pi_{g(i)}$. Пусть ν_i — конструктивизация алгебры $\mathcal{B}_{i+1}$, построенная в предложении 2. Возьмем $(\mathcal{B}, \nu) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i \in N} {}_{rec}(\mathcal{B}_{i+1}, \nu_i)$. Ясно, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\omega$ и $f = f_{(\mathcal{B},\nu)}$ удовлетворяет требуемым свойствам. □

Таким образом, в $F_{\mathcal{B}_\omega}$ содержится достаточно много функций. В следующем параграфе мы докажем похожую теорему для плотных булевых алгебр.

§ 3. Плотные булевы алгебры

ТЕОРЕМА 2. *Пусть B — плотная булева алгебра элементарной характеристики $(\infty, 0, 0)$, g — рекурсивная функция, для которой $g(i+1) - g(i) \leq 4$, $g(0) = 0$. Тогда существует $f \in F_B$, для которой $f(4i) = g(i)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идея доказательства этой теоремы такая же, как и предыдущей. Сначала мы должны доказать, что существует нумерация плотной булевой алгебры характеристики (1,1,0), для которой все операции представимы рекурсивными функциями, а прообраз нуля m–эквивалентен $A^{<\omega}$, где A — произвольное арифметическое множество. Затем мы должны научиться превращать эту алгебру в плотную рекурсивную булеву алгебру элементарной характеристики $(n+1, 1, 0)$, для которой I_n m–эквивалентно $A^{<\omega}$. После этого, если наша конструкция окажется эффективной, нам останется лишь рассмотреть прямую сумму некоторой вычислительной последовательности конструктивных булевых алгебр. Не останавливаясь на деталях, общих для доказательства этой и предыдущей теорем, мы акцентируем внимание лишь на тех моментах, в которых эти доказательства различаются.

Во–первых, нам надо доказать аналог следствия 1. Пусть L — линейный порядок, построенный в предложении 1. Рассмотрим рекурсивную булеву алгебру B, построенную по линейному порядку $L \times \eta + \eta$. Пусть I — идеал в B, порожденный элементами вида $[\langle\langle x, 0, \ldots, 0\rangle, q\rangle, \langle\langle x+1, 0, \ldots, 0\rangle, q\rangle[$, где $x \in A$, $q \in \eta$. Тогда очевидно, что $I \equiv_m A^{<\omega}$ и $\dfrac{B}{I}$ — плотная булева алгебра характеристики (1,1,0).

Во–вторых, надо доказать аналог предложения 2, причем должен быть верен аналог замечания 1. Основная идея доказательства остается неизменной, следует только принять $q = k - 4i - 4$ и по — новому определить сегменты R_r.

По тем же причинам, что и ранее, существует Σ_q-предикат $P(\tau, y, z, n)$, для которого

1) $\psi_\tau = \{n : (\exists y)(\forall z)P(\tau, y, z, n)\}$ — непустой начальный сегмент натурального ряда;

2) $\tau \in S_i \iff (\exists^\omega \sigma \succeq \tau)(\psi_\sigma \neq \omega)$.

Определим последовательность начальных Σ_{q+1}-сегментов натурального ряда $c_{\tau,x}$

$$c_{\tau,x} \overset{\text{df}}{=} \{n : \ (\forall y < n)(\exists z)\neg P(\tau, y, z, x)\}.$$

Так же, как и ранее, определим Π_q-множества $Q_{\tau,x}$, обладающие свойством: $Q_{\tau,x}$ бесконечно $\iff c_{\tau,x} = \omega$.

Пусть теперь $R_{\tau,x} \overset{\text{df}}{=} \{\sigma \in 2^{<\omega};\ \pi_i(\sigma) = 1 \longrightarrow i \in Q_{\tau,x}\}$. Пусть $R_\tau \overset{\text{df}}{=} 1 * 2^{<\omega} \bigcup 0 * \prod\limits_{x \in \omega} R_{\tau,x}$, где натуральное число x понимается как код двоичной последовательности в естественной кодировке двоичных последовательностей. R_τ — Π_q-сегмент. Если мы определим S_{i+1} так же, как и ранее, т.е. $S_{i+1} \overset{\text{df}}{=} \prod\limits_\tau R_\tau$, то конструкция предложения 2 даст нам нужный результат, так как $c_{\tau,x} = \omega \iff x \notin \psi_\tau$. □

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. — Новосибирск: Научная книга, 1996.

2. ОДИНЦОВ С.П., СЕЛИВАНОВ В.Л. Арифметическая иерархия и идеалы нумерованных булевых алгебр //Сиб. мат. журн. — 1989. — Т. 30, № 6. — С. 140–149.

3. PODZOROV S.Yu. Restricted completeness of extended Boolean algebras //Siberian Adv. Math. — 1977. — Vol. 7, № 2. — P. 98-123.

4. LACHLAN A.H. On the lattice of recursively enumerable sets //Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 130, № 1. — P. 1–36.

Поступила в редакцию
11 августа 1997 года