ИЗМЕРЕНИЕ И МОДЕЛИ КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные системы)
1998 год Выпуск 162

УДК 517.11:518.5

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП РЕФЛЕКСИИ

Н.В.Белякин, В.А.Ганов

Введение

При аксиоматизации теории множеств довольно часто, помимо множеств, используются еще и классы. Характерным примером может служить система Геделя-Бернайса (GB). При ближайшем рассмотрении обнаруживается, что классы, по-существу, играют вспомогательную роль, сходную с ролью предикатных переменных. Говоря конкретнее, мыслится некоторый универсум множеств, и над ним имеется классовая надстройка, где каждый класс выражает некоторое допустимое к рассмотрению свойство множеств этого универсума. Сравнение теории GB с теорией полумножеств TSS′ Вопенки-Гаека [1] показывает,что с одним и тем же универсумом множеств можно соотнести существенно разные классовые надстройки так, что теоремы о множествах при этом останутся такими же. Более того, в случае системы GB можно обойтись достаточно узким запасом классов (или допустимых свойств), а именно — тех, которые определимы посредством ZF-формул. Впрочем, в этих формулах могут присутствовать множественные параметры, из-за чего всякое множество будет классом. С изложенной сейчас точки зрения, последнее обстоятельство не выглядит как обязательное, поскольку классы — это все-таки вспомогательные объекты и нас интересует не обширность их запаса, а то, насколько этот запас хорошо структурирован. Для нас гораздо важнее замкнутость семейства классов относительно некоторых часто употребляемых в математике операций.

Поводом для отказа от требования, чтобы каждое множество было классом, является возможность распространить так называемый принцип рефлексии на формулы, содержащие классовые переменные. Проиллюстрируем это на простом примере. Добавим к языку теории GB множественную константу M и будем предполагать, что допустимые к рассмотрению классы задаются ZF–формулами, но только с параметрами из M. Тогда мы уже не можем гарантировать, что каждое множество есть класс; выполнимость же остальных аксиом GB легко проверяется. Далее, опираясь на известную теорему Леви, мы можем дополнительно постулировать следующий принцип рефлексии: каждая ZF–формула φ с параметрами из M эквивалентна своей релятивизации φ^M к множеству M. Полученное таким образом расширение GB будет, конечно, консервативным. Но при этом релятивизация φ^M формулы φ, задающей некоторый класс, будет выделять из M то же подмножество, что и сама φ. Это подсказывает нам, каким образом можно релятивизовать к M любую нормальную (т.е. не содержащую классовых кванторов) GB–формулу: помимо ограничения множественных кванторов константой M, надо каждое свободное вхождение произвольной классовой переменной X заменить на $X \cap M$. Ясно, что если мы указанным образом распространим понятие релятивизации на все нормальные GB–формулы, то в рассматриваемой сейчас интерпретации этот расширенный принцип рефлексии тоже будет иметь место. В такой аксиоматической системе можно доказать, что если некоторое множество является классом, то оно есть элемент M. Действительно, пусть некоторое множество x равно классу X. Значит, верна формула $\exists y(y = X)$. В силу принципа рефлексии, верно $(\exists y \in M)(y = X \cap M)$. Пусть $y_0 \in M$ таково, что $y_0 = X \cap M$. Снова применяя рефлексию, получаем $y_0 = X$. Отсюда следует $x = y_0$, т.е. $x \in M$.

В предыдущих рассмотрениях принцип рефлексии давал всего лишь консервативное решение исходной системы. Однако напрашивается такой способ его усиления, который существенно расширяет его первоначальные дедуктивные возможности. Трактуя классы как свойства множеств, мы вовсе не обязаны требовать, чтобы эти свойства были выразимы именно в языке ZF. Тем не менее, выглядит вполне естественным интуитивное представление, что эти свойства должны быть выразимы в каком-нибудь неопределенно мыслимом языке. Возникает мысль — распространить принцип рефлексии на выражения этого предполагаемого языка. При этом, конечно, подразумевается, что такие выражения обладают все же определенным структурным сходством с ZF-формулами; в частности, их можно релятивизовать к M. Тогда описанный выше способ релятивизации нормальных GB-формул сохраняет свое интуитивное содержание, что, в значительной степени, избавляет нас от необходимости принимать какие-нибудь формальные постулаты, касающиеся самого воображаемого нами языка. В том числе, можно предположить, что всякое подмножество M задается релятивизованным к M текстом все того же воображаемого языка. А то, что количество таких текстов оказывается из-за этого весьма большим, решающего значения не имеет (поскольку язык все равно воображаемый). Тем самым, оказывается, что каждому подмножеству $x \subseteq M$ (определяемому некоторым текстом φ^M) можно сопоставить класс X, задаваемый соответствующим нерелятивизованным текстом φ. А так как мы распространили на эти тексты принцип рефлексии, то имеем $x = X \cap M$. Следовательно, мы можем формализовать вышеизложенные соображения, избегая разговоров о текстах воображаемого языка: достаточно принять аксиому

$$\forall x \subseteq M \exists X (x = X \cap M).$$

Условимся называть ее аксиомой интенсиональности. Как будет показано ниже, сочетание этой аксиомы с принципом рефлексии, распространенным на классы, позволяет выводить осень сильные утверждения. Но при этом, конечно, острее чем обычно, встает проблема непротиворечивости такой системы.

§ 1. Система множеств и классов с обобщенной рефлексией

Определяем формальную систему S, в которой имеются объекты двух сортов: множества и классы. Их элементами являются множества. Строчные буквы $x, y, z, t, \ldots$ обозначают переменные для множеств; заглавные буквы $X, Y, Z, \ldots$ — переменные для классов; M — множественная константа. Формально множества представляются множественными переменными и константой M, а классы — классовыми переменными. Символы $\in$ и $=$ обозначают отношения принадлежности и равенства между данными объектами. Атомные формулы могут быть двух видов: множество принадлежит множеству или классу; множество или класс равно множеству или классу. Остальные формулы строятся из атомных формул обычным образом с использованием логических связок и кванторов, последние можно навешивать на переменные обоих сортов. Формула системы S называется чистой, если в ней нет кванторов по классовым переменным и нет константы M.

Аксиомы S — это формулы следующих видов.

1. Аксиома экстенсиональности множеств

$$\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y) \rightarrow x = y.$$

2. Аксиома регулярности множеств

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)).$$

3. Аксиома существования пустого множества

$$\exists x \forall y(y \notin x).$$

4. Аксиома существования и транзитивности множества M

$$\exists x(x = M) \wedge \forall y(y \in M \rightarrow y \subseteq M).$$

5. Схема аксиом подстановки

$$\forall x \exists ! y \varphi(x,y) \to \forall u \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \varphi(x,t))),$$

где $\varphi(x,y)$ — произвольная S–формула, не содержащая z; x — ее свободная переменная, но возможны и другие свободные переменные.

6. Схема аксиом рефлексии

$$(\forall x_1, \ldots, x_k \in M)(\varphi(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_m) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \varphi^M(x_1, \ldots, x_k, Y_1 \cap M, \ldots, Y_m \cap M)),$$

где φ — чистая формула, $(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_m)$ — полный список ее свободных множественных и классовых переменных; формула φ^M получается из φ путем ограничения множественных кванторов константой M и путем замены классовых переменных их пересечениями с M.

7. Аксиома интенсиональности

$$\forall x (x \subseteq M \to \exists X (X \cap M = x)).$$

Из схемы аксиом подстановки и существования пустого множества обычным образом выводится схема аксиом выделения. С ее помощью доказывается существование пересечения двух множеств и пересечения класса с множеством, что оправдывает употребление знака $\cap$ в аксиомах 2,6,7. Аксиомы рефлексии и интенсиональности были прокомментированы во введении.

Аксиома экстенсиональности, с помощью рефлексии, тривиально распространяется на классы, а также (чуть менее тривиально) на случай класса и множества. Столь же легко показывается, что для каждого $x \subseteq M$ существует единственный расширяющий его класс X, такой, что $X \cap M = x$. Это дает возможность ввести функцию $c(x)$ на подмножествах M, указывающую для каждого такого x соответствующий ему класс X.

Докажем еще несколько вспомогательных утверждений.

1. $\forall x (x \in M \leftrightarrow \exists X (X = x))$.

Это означает, что только множества из M одновременно являются классами. В одну сторону это утверждение фактически было доказано во введении. Остается доказать, что если $x \in M$, то x есть класс. Пусть $x \in M$. В силу транзитивности $M, x \subseteq M$. Пусть класс X такой, что $X \cap M = x$. Применяя рефлексию,получаем, $X = x$, т.е. x есть класс.

2. $\forall x, y(x \subseteq y \wedge y \in M \to x \in M)$.

Пусть $x \subseteq y$ и $y \in M$, тогда $x \subseteq M$, и пусть $X = c(x)$. Отсюда следует, что $X \cap M \subseteq y$ и, в силу рефлексии, $X \subseteq y$. Тогда $X \subseteq M$, и, следовательно, $X = X \cap M = x$.. Отсюда, в силу предыдущего утверждения, $x \in M$.

Следующее утверждение показывает, что каждая чистая формула $\varphi(t)$ с множественными параметрами из M определяет некоторый класс X.

3. $(\forall x_1, \ldots, x_k \in M)\exists X \forall t(t \in X \leftrightarrow \varphi(t, x_1, \ldots, x_k))$.

Действительно, пусть $\varphi(t)$ — чистая формула, в которой все множественные параметры зафиксированы в M. Тогда, по аксиоме выделения, существует множество $y = \{t \in M / \varphi^M(t)\}$. Пусть $X = c(y)$, тогда, по рефлексии, $X = \{t / \varphi(t)\}$, что и требовалось доказать.

4. Если f есть функция-множество вида $M \to M$ и ее область определения d есть элемент M, то $f \in M$.

В самом деле, нетрудно показать, что $f \subseteq M$, и пусть класс $F = c(f)$. Так как $d \in M$, то, в силу рефлексии, этот класс F является функцией с той же областью определения d. А так как $f \subseteq F$, то $F = f$, и, в силу вспомогательного утверждения 1, $f \in M$.

Опираясь на эти утверждения, с помощью рефлексии, легко показывается, что в системе S выводимы все аксиомы ZF. Для примера, рассмотрим пару характерных случаев.

Аксиома пары. Пусть $x, y \in M$, тогда $z = \{x, y\}$ существует по аксиоме выделения. Таким образом, имеем

$$\exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y).$$

Применяем рефлексию: $(\exists z \in M)(\forall t \in M)(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$. Принимая во внимание транзитивность M, получаем, что для произвольных $x, y \in M$ пара $\{x, y\}$

принадлежит M, т.е. аксиома пары имеет место в M. Осталось еще раз применить рефлексию.

Аналогично проверяется **аксиома суммы**. Из доказанного следует, что если $x \in M$, то $x \cup \{x\} \in M$. Кроме того, очевидно, что $\emptyset \in M$, следовательно, M удовлетворяет аксиоме бесконечности.

Аксиома степени. Сначала докажем ее в M, откуда, по рефлексии, она будет выполняться на всем универсуме. Пусть $x \in M$. В силу вспомогательного утверждения 2 совокупность всех подмножеств x совпадает с совокупностью всех элементов M, являющихся подмножествами x. Но последняя совокупность есть множество, в силу аксиомы выделения. Следовательно, имеем

$$\exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow t \in M \wedge t \subseteq x).$$

Пусть $Y = c(y)$, тогда $(\forall t \in M)(t \in Y \cap M \leftrightarrow t \subseteq x)$. По рефлексии, получаем $\forall t(t \in Y \leftrightarrow t \subseteq x)$. Но, в силу сказанного выше, $Y = Y \cap M = y$, следовательно, $y \in M$.

Следовательно, в S доказуемы все теоремы ZF и любые понятия ZF определяются обычным образом. Легко доказывается, что в S существует класс всех ординалов, обозначим его через On. Пусть α_0 — первый ординал, не принадлежащий M. Легко видеть, что $M = V_{\alpha_0}$, где V_γ есть множество всех множеств ранга меньше γ. В дальнейшем буквы α, β, γ будут обозначать ординалы.

Докажем, что α_0 удовлетворяет условию регулярности, т.е. если f есть функция вида $\alpha_0 \to \alpha_0$ и ее область определения есть ординал $\beta < \alpha_0$, то супремум всех значений этой функции f меньше α_0. Это следует непосредственно из вспомогательного утверждения 4. Из доказанного свойства ординала α_0 вытекает, что он является регулярным кардиналом. Далее с помощью рефлексии легко устанавливается, что α_0 — слабо недостижимый кардинал, кардинал Мало и т.д.

Докажем более сильное утверждение, что α_0 есть измеримый кардинал. Для этого нужно построить нетривиальный α_0-полный ультрафильтр на множестве подмножеств α_0. Пусть $z = \{x \subseteq \alpha_0 / \alpha_0 \in c(x)\}$.

С помощью рефлексии доказывается, что z — искомый ультрафильтр. Действительно, пусть $x \in z$ и $x \subseteq y \subseteq \alpha_0$, тогда $c(x) \subseteq c(y)$ и, следовательно, $y \in z$. Далее, пусть $x \subseteq \alpha_0$, $X = c(x)$ и $\alpha_0 \notin X$. Тогда $\alpha_0 \in \mathrm{On}\backslash X$, но $(\mathrm{On}\backslash X) \cap M = \alpha_0\backslash x$, $c(\alpha_0\backslash x) = \mathrm{On}\backslash X$ и, следовательно, $\alpha_0\backslash x \in z$. На основании вспомогательного утверждения 1 никакой синглетон $\{\beta\}$ для $\beta < \alpha_0$, не может принадлежать z, поэтому z не яляется тривиальным. Осталось проверить α_0-полноту z. Пусть $\beta < \alpha_0$, рассмотрим последовательность $\{x_\gamma \in z/\gamma < \beta\}$, и пусть $x = \cap\{x_\gamma \in z/\gamma < \beta\}$. Докажем, что $x \in z$. Полагаем $y = \{(\gamma, \alpha)/\gamma < \beta \wedge \alpha \in x_\gamma\}$. По аксиоме выделения, множество z существует, тогда множества x, y также существуют и $x, y \subseteq M$. Тогда, по рефлексии,

$$\alpha \in c(x) \leftrightarrow (\forall\gamma < \beta)((\gamma, \alpha) \in c(y)).$$

Кроме того, в силу рефлексии и вспомогательного утверждения 3, для всякого $\alpha < \beta : c(x_\gamma) = \{\alpha/(\gamma, \alpha) \in c(y)\}$.

Однако, по условию, наложенному на последовательность $\{x_\gamma\}$ верно $(\forall\gamma < \beta)(\alpha_0 \in c(x_\gamma))$. Следовательно, $(\forall\gamma < \beta)((\gamma, \alpha_0) \in c(y))$, откуда $\alpha_0 \in c(x)$. Таким образом, множество z существует и удовлетворяет всем необходимым требованиям, поэтому α_0 есть измеримый кардинал.

§ 2. Проблема относительной непротиворечивости S

Так как система S имеет довольно нетрадиционный характер, то желательно было бы оценить ее дедуктивную силу и возможные виды на непротиворечивость относительно какой-нибудь гипотезы, сформулированной в языке ZF. Естественно, что в этой формулировке должно быть задействовано предположение о существовании достаточно больших кардиналов. Ниже будет сформулировано некоторое допущение такого рода, из которого следует существование натуральной модели для S. Это допущение само по себе весьма проблематично, но, по крайней мере, оно не находится в обязательной связи с представлениями о воображаемых текстах и тому подобном.

По своему непосредственному смыслу оно напоминает далеко продвинутую модификацию принципа выбора и может быть названо аксиомой "согласованного выбора".

Мы хотим иметь такой регулярный кардинал λ чтобы множество V_λ могло быть универсумом системы S. Константу M мы намерены проинтерпретировать как множество V_σ для некоторого кардинала $\sigma < \lambda$. Из рассмотрений предыдущего параграфа ясно, что σ должен быть измеримым кардиналом. Но главное, что нам нужно, — это построить такое отображение f, которое каждое подмножество V_σ переводило бы в расширяющее его подмножество V_λ, и притом так, чтобы обеспечить выполнение принципа рефлексии в искомой модели. Тогда можно считать, что классовые переменные пробегают область значений функции f. При такой интерпретации проверка всех аксиом системы S, кроме схемы рефлексии, не составит трудностей. Действительно, аксиома интенсиональности будет иметь место по построению, а схема аксиом подстановки для S будет следовать непосредственно из того, что эта схема имеет место в ZF и из регулярности кардинала λ. Оказывается для выполнимости схемы аксиом рефлексии достаточно потребовать, чтобы упомянутая функция f сохраняла все так называемые геделевские операции: $x \setminus y$, $x \times y$, $dom(x)$, $cnv(x)$, $cnv_3(x)$ (см.[1]). Поэтому добавляем к ZF следующую аксиому.

Аксиома согласованного выбора. Существуют регулярный канал λ, кардинал $\sigma < \lambda$ и функция-множество f вида $P(V_\sigma) \to P(V_\lambda)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $x \subseteq f(x)$;
2) $f(V_\sigma) = V_\lambda$;
3) $f(\in \cap (V_\sigma \times V_\sigma)) = \in \cap (V_\lambda \times V_\lambda)$;
4) $f(x \setminus y) = f(x) \setminus f(y)$;
5) $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$;
6) $f(dom(x)) = dom(f(x))$;
7) $f(cnv(x)) = cnv(f(x))$;
8) $f(cnv_3(x)) = cnv_3(f(x))$,

где $x, y \subseteq V_\sigma$.

Обозначим систему ZF с этой аксиомой через ZF^+. Теперь мы можем проинтерпретировать язык системы S описанным выше способом. Возьмем λ, σ, f, удовлетворяющие добавленной аксиоме, и пусть множественные переменные S пробегают V_λ, классовые переменные пробегают область значений f, символ M интерпретируется как V_σ, $\in$ имеет обычный смысл. Мы утверждаем, что при такой интерпретации выполняются все аксиомы S. Для установления этого факта, как уже было отмечено, достаточно проверить выполнение схемы аксиом рефлексии. Для этого с помощью математической индукции по длине формулы φ докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Пусть φ — чистая формула и $x_1,\ldots,x_n$ — список множественных переменных, содержащий все свободные множественные переменные φ и не содержащий связанных переменных φ. Тогда имеет место:*

а) $(\forall\, x_1,\ldots,x_n \in M)(\varphi \leftrightarrow \varphi^M)$;

б) $A = \{< x_1,\ldots,x_n > /\varphi\}$ *есть S — класс.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что φ может содержать классовые параметры, список и значения которых на протяжении всей индукции остаются фиксированными. Список $(x_1,\ldots,x_n)$ будет меняться. Ключевым моментом доказательства является следующий факт: множество A из пункта "б" задается термом, построенным посредством геделевских операций из значений классовых параметров формулы φ, а также множеств V_λ и $\in \cap(V_\lambda \times V_\lambda)$ (см. [1]). Без ограничения общности мы можем считать, что φ не содержит знака $=$ и содержит только логические знаки $\neg$, $\wedge$, $\exists$. Такая возможность обеспечивается правилами логики и аксиомой экстенсиональности.

<u>База индукции.</u> Пусть φ есть $x_i \in x_j$. Тогда утверждение "а" выполняется тривиально. Рассмотрим множество $A = \{< x_1,\ldots,x_n > /x_i \in x_j\}$ и пусть $B = \{< x_1,\ldots$ $\ldots,x_n > \in M/x_i \in x_j\}$. Множество A, как следует из [1], задается термом вышеописанного вида, содержащим только операции $\times$, cnv, cnv_3 и множества V_λ, и $\in \cap(V_\lambda \times V_\lambda)$. Множество B задается таким же термом с заменой V_λ на V_σ. Теперь согласно условия 2,3,5,7,8 из аксиомы согласо-

ванного выбора, получаем $f(B) = A$, следовательно, A есть S-класс. Так же легко рассматривается случай атомной формулы $x_i \in X_j$.

Индукционный шаг. В случае конъюнкции и отрицания искомый результат тривиально получается с помощью условий 2,4 из аксиомы согласованного выбора. Рассмотрим наиболее трудный случай, когда φ есть $\exists y \varphi_1(y)$, и выполняется индукционное предположение для формулы $\varphi_1(y)$ и списка $(x_1, \ldots, x_n, y)$. Это значит, что $(\forall x_1, \ldots, x_n, y \in M)(\varphi_1(y) \leftrightarrow \varphi_1^M(y))$ и множество $B = \{< x_1, \ldots, x_n, y > / \varphi_1(y)\}$ является S-классом. Обозначим через B' множество $\{< x_1, \ldots, x_n, y > \in M / \varphi_1^M(y)\}$, через A множество $\{< x_1, \ldots, x_n > / \exists y \varphi_1(y)\}$ и через A' множество $\{< x_1, \ldots, x_n > \in M / (\exists y \in M)\varphi_1^M(y)\}$. Тогда $A = dom(B)$, $A' = dom(B')$ и $B \cap M = B'$, и требуется доказать соотношение $A \cap M = A'$. Имеем $B' \subseteq M$, поэтому $f(B')$ есть некоторый класс, который обозначим через C, при этом $C \cap M = B'$. Из предыдущих соотношений получаем равенство $C \cap M = B \cap M$. Отсюда следует, что $C = B$, или $f(B') = B$. Тогда $f(A') = f(dom(B')) = dom(f(B')) = dom(B) = A$, т.е. $f(A') = A$. Это влечет искомое соотношение $A \cap M = A'$, и множество A является S-классом. Теорема доказана.

Заметим, что регулярность кардинала λ использовалась только для провекри схемы аксиом подстановки. Если мы от S перейдем к более слабой теории S^-, в которой схема подстановки заменяется на схему выделения, то можно соответственно ослабить аксиому согласованного выбора, установив требование регулярности λ. Результат получится аналогичный.

Литература

1. VOPENKA P., HAJEK P. The theory of simisets. — Amsterdam-London: North-Holland, 1972. — 332 p.

Поступила в редакцию
13 февраля 1998 года