СТРУКТУРНЫЕ И СЛОЖНОСТНЫЕ
ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1999 год Выпуск 165

УДК 510.5+510.68

О РЕЗОЛЬВЕНТНЫХ И ВНУТРЕННЕ ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МОДЕЛЯХ[1]

А.Н.Хисамиев

В [1] введено очень важное понятие резольвентного множества в допустимом множестве $\mathbb{A}$. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Множество $B \subseteq A$ называется резольвентным в $\mathbb{A}$, если существует Σ-функция $f : Ord\,\mathbb{A} \to A^*$ такая, что $f(\alpha) \subseteq f(\beta) \subseteq B$ для всех $\alpha \leq \beta \in Ord\,\mathbb{A}$ и $B = \bigcup\limits_{\alpha \in Ord\mathbb{A}} f(\alpha)$. Функция f называется резольвентной для B. Допустимое множество $\mathbb{A}$ называется резольвентным, если A резольвентно в $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — счетная модель конечной сигнатуры σ и $\sigma' = \sigma \cup \{\emptyset, \in\}$, $HF(\mathcal{M})$ — наследственно конечное допустимое множество над моделью $\mathcal{M}$, $\omega \subseteq HF(\mathcal{M})$ — множество ординалов. В [2] дано следующие

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует нумерация $\nu : \omega \to M$ модели $\mathcal{M}$ и ν является Σ-функцией в $HF(\mathcal{M})$, то $\mathcal{M}$ называется внутренне перечислимой моделью.

В заметке дан критерий резольвентности допустимого множества $HF(\mathcal{M})$, из которого следует, что допустимое множество $HF(\mathcal{M})$ над внутренней перечислимой моделью является резольвентным. Построен пример резольвентного множества $HF(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ не является внутренне перечислимой.

Все, используемые, но не определяемые понятия и обозначения, можно найти в [1].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 99-01-00485 и ФЦП "Интеграция" (проект 274).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Наследственно конечное допустимое множество $HF(\mathcal{M})$ резольвентно тогда и только тогда, когда основное множество M модели $\mathcal{M}$ резольвентно в $HF(\mathcal{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. Пусть $HF(\mathcal{M})$ резольвентное допустимое множество с резольвентой f. Определим функцию

$$g(n) = \{x | y \in f(n) \ \& \ x \in sp(y)\},$$

где $sp(y)$ — носитель элемента y. Функция $sp(y)$ Σ–определима в $HF(\mathcal{M})$ (см. [1]). Для функции g справедлива эквивалентность

$$g(n) = M_n \iff \forall x \in M_n \exists y \in f(n)(x \in sp(y)) \ \& \\ \& \ \forall y \in f(n) \forall z \in sp(y)(z \in M_n).$$

Отсюда $g(n)$ является Σ–функцией. Очевидно, что остальные условия того, что g является резольвентой для множества M, выполнены. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество M резольвентно в $HF(\mathcal{M})$ и Σ функция $g : \omega \to HF(M)^*$ такая, что для множества $g(n) = M_n$ выполнены следующие условия:

1) $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$,

2) $\bigcup\limits_{n\in\omega} M_n = M$.

Докажем, что допустимое множество $HF(\mathcal{M})$ резольвентно. Функция $h : \omega \to HF(\omega)$, определенная следующим образом

$$h(n) = \begin{cases} n_1, & \text{если } n = c(0, n_1), \\ \{h(n_1)\}, & \text{если } n = c(1, n_1), \\ h(n_1) \cup h(n_2), & \text{если } n = c(2, c(n_1, n_2)) \text{ и } n_1 < n_2, \\ \emptyset, & \text{иначе}, \end{cases}$$

является Σ нумерацией множества $HF(\omega)$ (см. [3]). Рассмотрим 3 х местную функцию $I^n_m(a) = a_m$, определенную на множестве $< n, m, a >$, $n, m \in \omega$, $m < n$, $a =< a_0, \ldots, a_{n-1} >$, и 2–х местную функцию $f(n, b) = b^n = \underbrace{b \times \ldots \times b}_{n \text{ раз}}$. Легко проверить, что они являются Σ–функциями в $HF(\mathcal{M})$. Для каждого $n \in \omega$ введем множества

$B_0 = B_1 = \emptyset$,

$B_n = \{æ[a] = æ(I_n^0(a), \ldots, I_n^{n-1}(a)) | h^{-1}(æ) \leq n \ \& \ a \in M_n^n\}$, $n > 1$.

Для этих множеств выполнены условия:

1) $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$,

2) $\bigcup\limits_{n \in \omega} B_n = HF(M)$.

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что отношение $f(n) = B_n$ является Σ-отношением. В $HF(\mathcal{M})$ справедлива эквивалентность:

$$f(n) = B_n \Longleftrightarrow (n \leq 1 \ \& \ B_n = \emptyset) \vee$$
$$\vee (n > 1 \ \& \ \forall x \in B_n \exists k \leq n \exists a \in g(n)^n (x = h(k)[a]) \&$$
$$\& \forall k \leq n \forall a \in g(n)^n \exists x \in B_n (x = h(k)[a])).$$

Легко проверить, что отношение $R(k, a, n, x) \rightleftharpoons [x = h(k)[a]]$, где $h(k) = æ(0, 1, \ldots, n) \in HF(n)$, $k \leq n$ и $a \in g(n)^n$, является Σ-отношением. Отсюда из вышеуказанной эквивалентности следует, что функция f является Σ-функцией. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\mathcal{M}$ внутренне перечислимая модель, то наследственно конечное допустимое множество $HF(\mathcal{M})$ резольвентно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}$ внутренне перечислима и $\nu : \omega \to \mathcal{M}$ ее Σ-нумерация, т.е. ν является Σ-функцией в $HF(\mathcal{M})$. Для любого числа $n \in \omega$ определим множество $M_n = \{\nu(k) | k < n\}$. Покажем, что $f(n) = M_n$ в $HF(\mathcal{M})$ является Σ-функцией. Действительно, в $HF(\mathcal{M})$ справедлива эквивалентность

$$f(n) = M_n \Longleftrightarrow \forall x \in M_n \exists k < n(\nu(k) = x) \ \&$$
$$\& \ \forall k < n \exists x \in M_n(\nu(k) = x)).$$

Отсюда следует, что функция f является резольвентой множества M. Тогда по предложению 1 допустимое множество $HF(\mathcal{M})$ резольвентно.

В [2] показано, что арифметика и любая конечно порожденная алгебра являются внутренне перечислимыми моделями. Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $\mathcal{N} = < \omega, +, \star, 0, 1 >$ стандартная модель арифметики, то допустимое множество $HF(\mathcal{N})$ резольвентно.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если $\mathcal{A}$ — конечно порожденная алгебра, то допустимое множество $HF(\mathcal{A})$ резольвентно.*

В резольвентном множестве существует универсальная функция. Отсюда из следствия 3 следует, что для любой конечно порожденной алгебры $\mathcal{A}$ в допустимом множестве $HF(\mathcal{A})$ существует универсальная функция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует не внутренне перечислимая модель $\mathcal{M}$ такая, что допустимое множество $HF(\mathcal{M})$ резольвентно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S — множество всех простых чисел и группа $G = \bigoplus_{p \in S} Z_p$ является прямой суммой циклических групп Z_p, $p \in S$, простого порядка p. Покажем, что допустимое множество $HF(\mathcal{M})$ резольвентно. Для этого, по предложению 1, достаточно показать, что множество G резольвентно в $HF(G)$. Определим функцию $f(n) = \{x | x \in G \;\&\; n!x = 0))\}$.

Ясно, что для множества G_n справедливы условия:

1) $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots$,

2) $\bigcup\limits_{n \in \omega} G_n = G$.

Покажем, что f является Σ-функцией. Для этого заметим, что группа G_n порождается элементом $a_{p_0} + a_{p_1} + \ldots + a_{p_{r-1}}$, где элемент $a_{p_i} \in Z_{p_i}$, $a_{p_i} \neq 0$, $i < r$, и через $p_0, \ldots, p_{r-1}$ обозначены все простые числа меньше n. Отсюда следует, что в $HF(G)$ справедлива эквивалентность:

$$\begin{aligned} f(n) = G_n \leftrightarrow \forall x \in G_n(n!x = 0) \;\& \\ \& \; \exists y \in B_n \exists m[\forall p < n(p|m \;\&\; p^2|m) \;\&\; my = 0 \;\& \\ \& \; \forall k < m(k \neq 0 \to ky \neq 0) \;\&\; \forall k < m(ky \in B_n)]. \end{aligned}$$

Легко проверить, что все отношения, встречающиеся в правой части этой эквивалентности, являются Σ-предикатами. Отсюда f является Σ-функцией. Следовательно допустимое множество $HF(G)$ резольвентно.

Покажем, что множество $HF(G)$ не внутренне перечислимо. В [2] доказано, что если G внутренне перечислимая модель, то некоторое ее обогащение конечным числом констант, будет жесткой моделью, т.е. не существует автоморфизма отличного от тождественного, оставляющего на месте эти константы. Легко проверить, что у группы G такого обогащения не существует. Отсюда группа G не внутренне перечислима. Предложение доказано.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Определимость и вычислимость. — Новосибирск: Научная кн., 1966. — 286 с. (Сибирская школа алгебры и логики).

2. KHISAMIEV A.N. Numbering and definability in the hereditary finite superstructure of a model //Siberian Advances in Mathematics. — 1997. — Vol. 7, № 3. — P. 63–74.

3. СТУКАЧЕВ А.И. Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках//Обобщенная вычислимость и определимость. — Новосибирск, 1998. — Вып. 161: Вычислительные системы. — С. 3–14.

Поступила в редакцию
13 ноября 1999 года