СТРУКТУРНЫЕ И СЛОЖНОСТНЫЕ
ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)

1999 год Выпуск 165

УДК 510.532:519.766.23

ПРИНЦИП РЕДУКЦИИ ДЛЯ ИЕРАРХИЙ РЕГУЛЯРНЫХ БЕЗЗВЁЗДНЫХ ЯЗЫКОВ [1]

А.Г. Щукин

Введение

В теории автоматов известен замечательный результат Бюхи [2] о том, что регулярные языки совпадают с языками, определяемыми предложениями монадической логики второго порядка подходящей сигнатуры. Эта теорема установила тесную связь теории автоматов с математической логикой и инициировала длинную серию работ по применению методов теории автоматов в логике и методов логики в теории автоматов.

Важным шагом в разработке данного направления стала глубокая теорема МакНотона и Пейперта [4] о том, что языки, определяемые предложениями первого порядка — это в точности регулярные "беззвёздные" языки (т.е. языки, задаваемые обобщёнными регулярными выражениями без символа $*$). Впоследствии выяснилось, что этот же класс языков задаётся формулами линейной временной логики, играющей основную роль в спецификации и верификации систем с конечным числом состояний.

Работы Бюхи, МакНотона, Пейперта и их многочисленных последователей показали большую сложность регулярных языков,

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант по математике).

что привело к появлению различных классификаций (или иерархий) этих языков.

Теорема МакНотона Пейперта подсказывает естественную классификацию языков, индуцируемую традиционной для математической логики иерархией предложений по числу перемен кванторов в предварённой нормальной форме. В работах [9,5] показано, что такие иерархии (для предложений подходящих сигнатур), по существу совпадают с популярными в теории автоматов иерархиями Бжозовского и Штраубинга. Поэтому изучение этих иерархий представляет интерес как для логики (точнее, для теории конечных моделей, поскольку здесь рассматривается эквивалентность формул на множестве конечных моделей соответствующих теорий), так и для теории автоматов.

Как известно, уровни многих аналогов кванторных иерархий в дескриптивной теории множеств, теории вычислений и теории автоматов обладают так называемым свойством редукции (см., например, [6,7]).В этой статье мы доказываем, что уровни кванторных иерархий не обладают свойством редукции. Для доказательства этого результата применяется известный в теории конечных моделей [3] метод игр Эренфойхта–Фрессе.

Свойство редукции полезно при изучении некоторых утончений иерархий. Например, известно [6], что если бы каждый уровень кванторной иерархии обладал свойством редукции, то типизированная булева иерархия совпадала бы с тонкой иерархией (определения см. в [6]). Как показано в [10], это не так.

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

В этом параграфе содержатся используемые в дальнейшем определения, некоторые вспомогательные результаты, необходимые сведения об играх Эренфойхта–Фрессе, а также нужные результаты из [12].

Пусть A — конечный алфавит, A^+ — множество всех конечных слов ненулевой длины в алфавите A. *Языком* будем называть любое подмножество множества A^+. Пусть ϵ — пустое слово и $A^* = A^+ \cup \{\epsilon\}$. Для слов v и w мы пишем $v \sqsubseteq w$, если v является фактором слова w, т.е. $w = u_1 v u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in A^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

1) Пусть $L, M, L', M' \subseteq A^+$, $L' \subseteq L$, $M' \subseteq M$, $L' \cup M' = L \cup M$ и $L' \cap M' = \emptyset$. Тогда будем говорить, что L' и M' — *редуцирующие* языки для L и M.

2) Говорят, что класс языков S обладает свойством *редукции*, если для любых $L, M \in S$ существуют редуцирующие языки $L', M' \in S$ для L, M.

Мы будем использовать описание языков с помощью предложений формальной логики. Если слово рассматривать как конечную линейно упорядоченную структуру (в подходящей сигнатуре, включающей унарный предикат для каждого символа из алфавита A и бинарный предикат $<$), то предложения формальной логики первого порядка можно использовать для описания "беззвёздных" языков. (Чтобы охватить все регулярные языки, надо добавить предложения с монадическими переменными второго порядка.)

Кроме основного алфавита A мы рассмотрим расширенный [5,6] алфавит $A \times 2^{\nu}$, где ν — конечное множество переменных. Будем называть ν структурой слово $(a_1, U_1) \ldots (a_r, U_r)$ (расширенного) алфавита $A \times 2^{\nu}$ такое, что множества $U_1, U_2, \ldots, U_r$ попарно не пересекаются и в объединении дают ν. Формулы со свободными переменными в ν будут выражать свойства ν–структур. Унарные предикаты Q_a, $a \in A$, будем интерпретировать так: $w \models Q_a x$ тогда и только тогда, когда w содержит букву вида (a, U), где $x \in U$. Предикат $<$ будет иметь обычный смысл: $w \models x < y$ тогда и только тогда, когда $w = (a_1, U_1) \ldots (a_i, U_i) \ldots (a_j, U_j) \ldots (a_r, U_r)$, где $x \in U_i$, $y \in U_j$, $i < j$. Пусть $w = (a_1, U_1) \ldots (a_r, U_r)$. Тогда $w \models \exists x \phi$ тогда и только тогда, когда для некоторого i, $1 \leq i \leq r$, справедливо $(a_1, U_1) \ldots (a_i, U_i \cup \{x\}) \ldots (a_r, U_r) \models \phi$. Булевы операции интерпретируются естественным образом. Букву $(a, \emptyset)$ алфавита $A \times 2^{\nu}$ мы будем отождествлять с буквой a алфавита A.

Если ϕ — предложение, то ϕ можно интерпретировать в слове $w \in A^+$, поскольку это слово можно рассматривать как $\emptyset$-структуру. Каждое предложение описывает язык, состоящий из слов, которые удовлетворяют этому предложению. Каждому множеству формул соответствует класс языков, которые можно описать предложениями из этого множества. Мы будем использовать одни и те же обозначения для множества формул и для соответствующих классов языков.

Пусть ϕ — некоторое предложение, тогда формулой $\phi^{<z<}(x,y)$ будем обозначать результат замены в формуле ϕ каждого вхождения $\exists z(\ldots)$ на $\exists z(x<z<y \wedge \ldots)$ и каждого вхождения $\forall z(\ldots)$ на $\forall z(x<z<y \rightarrow \ldots)$ (при этом может потребоваться стандартная в аналогичных случаях замена некоторых связанных переменных). Эта формула выражает то же свойство, что и ϕ, но только для подслова, ограниченного позициями x и y.

Пусть класс S_k состоит из языков, которые можно описать предложениями вида $\exists x_1^1 \ldots \exists x_{n_1}^1 \forall x_1^2 \ldots \forall x_{n_2}^2 \ldots Q x_1^k \ldots Q x_{n_k}^k \phi$, где $Q \in \{\exists, \forall\}$, ϕ — формула без кванторов. Иерархию языков $\{S_k\}_{k\in N}$ будем называть *кванторной*. (Мы считаем множество натуральных чисел N равным $\{1,2,\ldots\}$.) Очевидно, что $S_k \cup \check{S}_k \subseteq$ $\subseteq S_{k+1}$, где $k \in N$, $\check{S}_k = \{A^+ \backslash L |\ L \in S_k\}$ — двойственный класс для S_k.

Определим индукцией по k множество формул специального вида класса $S_{k,r}$, $k \geq 0$, $r \in N$. При $r \in N$ множество формул специального вида класса $S_{0,r}$ состоит из формул без кванторов, которые находятся в дизъюнктивной нормальной форме без повторений элементарных конъюнкций и без повторений конъюнктивных членов в элементарных конъюнкциях. При $k,r \in N$ формула специального вида класса $S_{k,r}$ — это дизъюнкция попарно различных формул вида $\exists z_1^k \exists z_2^k \ldots \exists z_p^k \neg\phi$, где $p \leq r$, ϕ — формула специального вида класса $S_{k-1,r}$. Класс $S_{k,r}$ состоит из формул, которые эквивалентны формулам специального вида класса $S_{k,r}$. (Эквивалентность понимается как равносильность на ν-структурах. Для формул ϕ и ψ мы будем писать $\phi \equiv \psi$, если ϕ и ψ эквивалентны.) Для каждого $k \in N$ классы языков $S_{k,r}$, $r \in N$, соответствующие множествам формул $S_{k,r}$, исчерпывают класс S_k. По построению, связанные переменные формул специального вида множества $S_{k,r}$ находятся среди $z_1^i, z_2^i, \ldots z_r^i$, $i \leq k$. Легко проверить, что число формул специального вида из $S_{k,r}$ с фиксированным набором свободных переменных конечно.

Пусть $k \geq 0$ и $r \geq 1$. Рассмотрим рефлексивные и транзитивные отношения $\leq_{k,r}$ на множестве структур [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть ν — множество переменных, u и v — ν–структуры. Если из $u \models \phi$ следует $v \models \phi$ для любой формулы $\phi \in S_{k,r}$ со свободными переменными из ν, то будем писать $u \leq_{k,r} v$.

Отметим некоторые свойства этих отношений и характеризацию играми Эренфойхта–Фрессе. Опишем вариант игры Эренфойхта–Фрессе $C_{k,r}(u,v)$ с k раундами. В начале игры имеются две $\{y_1,\ldots,y_m\}$–структуры u и v. В игре участвуют два игрока. Цель первого игрока — показать, что эти две структуры различны, цель второго — показать, что они неразличимы. У каждого игрока есть kr фишек, помеченных переменными $z_1^j,\ldots,z_r^j$, $j=1,\ldots,k$. В первом раунде первый игрок ставит свои фишки $z_1^k,\ldots,z_p^k$, $p \leq r$, на буквы структуры u. В результате $\{y_1,\ldots,y_m\}$–структура u превратится в $\{y_1,\ldots,y_m,z_1^k,\ldots,z_p^k\}$–структуру u'. Второй игрок в ответ на ход первого игрока ставит свои фишки $z_1^k,\ldots,z_p^k$ в другую структуру v. Получается еще одна $\{y_1,\ldots,y_m,z_1^k,\ldots,z_p^k\}$-структура v'. В следующем раунде игроки действуют по тем же правилам, но первый игрок ставит свои фишки уже во вторую структуру v', а второй делает ответный ход в первую u'. И так далее. В конце игры получим две структуры u_0 и v_0. Считается, что второй игрок выиграл, если для каждой атомарной формулы α, $u_0 \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $v_0 \models \alpha$. Другими словами, второй игрок выигрывает, когда $u_0 \leq_{0,r} v_0$ и $v_0 \leq_{0,r} u_0$ для всех $r \in N$. В любой конкретной игре у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

Характеризацию отношений $\leq_{k,r}$ в терминах игр Эренфойхта–Фрессе даёт следующая

ЛЕММА 1. *Пусть u, v — ν-структуры, $k \geq 0$, $r \geq 1$. Тогда $u \leq_{k,r} v$ если и только если у второго игрока есть выигрышная стратегия в игре $C_{k,r}(u,v)$.*

Согласно этой лемме, чтобы доказать соотношение $u \leq_{k,r} v$ достаточно описать выигрышную стратегию для второго игрока в игре $C_{k,r}(u,v)$. Это обычно нетрудно сделать, если число раундов k в игре равно одному или двум. В этой статье мы воспользуемся леммой 1 только в случае $k=1$, а с помощью следующих лемм 2 и 3 проведём индукцию по k.

Мы будем обозначать конкатенацию двух слов (ν–структур) u и v через uv или $u \cdot v$. Если w — слово алфавита A, мы будем использовать обозначение $w^n = w^{n-1} \cdot w$, где $n \geq 2$, $w^1 = w$.

ЛЕММА 2. *Пусть ν — множество переменных, $k \geq 0$, $r \geq 1$ и u_1, u_2, v_1, v_2, u_1u_2, v_1v_2 — ν-структуры. Тогда если $u_1 \leq_{k,r} v_1$ и $u_2 \leq_{k,r} v_2$, то $u_1u_2 \leq_{k,r} v_1v_2$.*

Введём обозначения: $c(0,r) = 1$ при всех $r \in N$, $c(k,r) = r + (r+1)c(k-1,r) + 1$ при $k, r \in N$. Для фиксированных k и r из N возьмём $M = r + 2(r+1)c(k-1,r) + 1$ и $K = M + c(k-1,r)$. Введём операции F и G на множестве A^+ так: $F(u) = u^M$, $G(u,v) = v^K uv^K$.

ЛЕММА 3. *Для любых $u, v \in A^+$ из $u \leq_{k-1,r} v$ следует $F(v) \leq_{k,r} G(u,v)$, где $k, r \in N$.*

Кроме сигнатуры $\Sigma_0 = \{<\} \cup \{Q_a | \ a \in A\}$, мы будем рассматривать следующие сигнатуры: $\Sigma' = \Sigma_0 \cup \{S, \min, \max\}$, $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{s, \min, \max\}$, $\Sigma_2 = \Sigma_0 \cup \{p, \min, \max\}$, $\Sigma_3 = \Sigma_0 \cup \{s, p, \min, \max\}$ и $\Sigma_4 = \Sigma' \cup \Sigma_3$. Символы этих сигнатур интерпретируются так: min, max — первая и последняя позиции в структуре; $s(x)$ — позиция, непосредственно следующая за x при условии, что x не является последней позицией, и последняя позиция в противном случае; $p(x)$ — позиция, непосредственно предшествующая x при условии, что x не является первой позицией, и первая позиция в противном случае; $S(x, y)$ — "y непосредственно следует за x".

Легко видеть, что для любой формулы одной из этих сигнатур можно найти эквивалентную ей формулу в сигнатуре Σ_0. Если Σ — некоторая сигнатура, то через $S_k(\Sigma)$ и $S_{k,r}(\Sigma)$ мы будем обозначать классы, которые определяются так же, как классы S_k и $S_{k,r}$, если вместо сигнатуры Σ_0 взять сигнатуру Σ. Классы $S_k(\Sigma')$ и $S_{k,r}(\Sigma')$ будем обозначать через S'_k и $S'_{k,r}$.

Нетрудно проверить, что кванторные иерархии для сигнатур Σ', Σ_1, Σ_2, Σ_3 и Σ_4 совпадают. Это вытекает из хорошо известной в логике [11] процедуры обогащения сигнатуры определимыми предикатными и функциональными символами; надо только учесть, что S, s, p определяются друг через друга формулами очень простого вида. Совпадение кванторных иерархий объясняет, почему из введенных сигнатур мы будем рассматривать только Σ_0 и Σ'.

Следующее предложение показывает, что наличие в этих сигнатурах констант min и max оказывает влияние только на первый уровень кванторной иерархии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* $\{<\} \subseteq \Sigma$. *Тогда* $S_n(\Sigma) = S_n(\Sigma \cup \{\min, \max\})$ *при* $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi \in S_n(\Sigma \cup \{\min, \max\})$, $n \geq 2$ и переменные x и y не входят в ϕ. Построим формулу ψ заменой всех вхождений min и max в формуле ϕ на переменные x и y, соответственно. Тогда

$$\exists x \exists y (\forall z (\neg z < x \wedge \neg y < z) \wedge \psi) \equiv \phi.$$

Таким образом, $\phi \in S_n(\Sigma)$. ■

Рассмотрим отношения $\leq'_{k,r}$, которые определяются так же, как отношения $\leq_{k,r}$, но уже для классов $S'_{k,r}$. Для сигнатуры Σ' можно определить игры $C'_{k,r}(u,v)$ Эренфойхта–Фрессе так же, как это было сделано выше. Тогда для этих отношений и изменённого варианта игр Эренфойхта–Фрессе леммы 1–3 будут также справедливы.

Основным результатом этой статьи является

ТЕОРЕМА. *Для любого алфавита, содержащего не менее двух символов, классы языков* S_k, S'_k, $\check{S}_k$ *и* $\check{S}'_k$, $k \in N$, *не обладают свойством редукции.*

Как известно, кванторные иерархии $\{S_k\}_{k \in N}$ и $\{S'_k\}_{k \in N}$ нетривиальны [1]: $S_k \neq \check{S}_k$, $S'_k \neq \check{S}'_k$, $k \in N$. Заметим, что это так же следует из нашей теоремы.

Для доказательства теоремы нам понадобится

ЛЕММА 4. *Пусть* $k \in N$, $L, M \in S_k$ *и для каждого* $r \in N$ *существуют слова* u_r, v_r, w_r *и* x_r *такие, что* $u_r \leq'_{k,r} w_r$, $v_r \leq'_{k,r} w_r$, $x_r \leq'_{k,r} u_r$, $x_r \leq'_{k,r} v_r$, $u_r \in L \backslash M$ *и* $v_r \in M \backslash L$. *Тогда классы языков* S_k, S'_k, $\check{S}_k$ *и* $\check{S}'_k$ *не обладают свойством редукции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют редуцирующие языки L' и M' из S'_k для L и M. Тогда $u_r \in L'$ и $v_r \in M'$. В силу отношений $u_r \leq'_{k,r} w_r$, $v_r \leq'_{k,r} w_r$, для достаточно больших r, $w_r \in L' \cap M'$, противоречие. Таким образом, для языков $L, M \in S_k$ нет редуцирующих множеств из S'_k, следовательно, классы S_k и S'_k не обладают свойством редукции. Аналогично можно показать, что для языков $A^+ \backslash L, A^+ \backslash M \in \check{S}_k$ нет редуцирующих множеств из $\check{S}'_k$, следовательно, классы $\check{S}_k$ и $\check{S}'_k$ не обладают свойством редукции. ∎

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть $A = \{a, b, \ldots\}$ и $a \neq b$. Рассмотрим предложения

$$\phi_1 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\ x_1 < x_2 < x_3 \wedge Q_b x_1 \wedge Q_a x_2 \wedge Q_b x_3,$$

$$\psi_1 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\ x_1 < x_2 < x_3 \wedge Q_b x_1 \wedge Q_b x_2 \wedge Q_b x_3.$$

Эти предложения задают языки L_1 и M_1 из класса S_1. Возьмём $u_r = a^r baba^r \in L_1 \backslash M_1$, $v_r = a^r bbba^r \in M_1 \backslash L_1$, $w_r = u_r v_r$ и $x_r = a^{k+1}$.

Используя характеризацию отношений $\leq'_{k,r}$ играми Эренфойхта–Фрессе (лемма 1), нетрудно проверить, что

$$u_r \leq_{1,r} w_r, \quad v_r \leq_{1,r} w_r, \quad x_r \leq_{1,r} u_r, \quad x_r \leq_{1,r} v_r. \tag{1}$$

Покажем, например, что $u_r \leq_{1,r} w_r$. Рассмотрим игру $C'_{1,r}(u_r, w_r)$. В начале этой игры имеются две $\emptyset$–структуры:

$$u_r = \underbrace{aa\ldots a}_{r} bab \underbrace{aa\ldots a}_{r}, \quad w_r = \underbrace{aa\ldots a}_{r} bab \underbrace{aa\ldots a}_{2r} bbb \underbrace{aa\ldots a}_{r}.$$

Пусть первый игрок поставил p фишек ($p \leq r$) в первую структуру. Покажем, что второй игрок может так ответить на ход первого игрока, что полученные структуры будут неразличимы (т.е. любая атомарная формула сигнатуры Σ' будет истинна в одной структуре тогда и только тогда, когда она истинна в другой). Возьмём максимальное число l, $0 \leq l \leq r$, такое, что на каждой из последних l букв первой структуры стоит хотя бы одна фишка. Тогда $u_r = u' \underbrace{aa\ldots a}_{l}$, $u' \in A^+$, и на последней букве фактора u' фишек нет. Множество ν переменных, которыми помечены p фишек, использованные первым игроком, разобьём на две группы: первая группа — это переменные, которыми помечены фишки, поставленные в фактор u', вторая — все остальные.

Для некоторого слова $w' \in A^+$, $w_r = u'w'\underbrace{aa\ldots a}_{l}$. Если из второй структуры $w_r = u'w'\underbrace{aa\ldots a}_{l}$ удалить фактор w', то получится структура u_r. Второй игрок должен полностью скопировать ход первого игрока, мысленно удалив фактор w' из второго слова.

В результате получаем две неразличимых ν–структуры. Действительно. Рассмотрим атомарную формулу $S(x,y)$, где $x, y \in \nu$, причём x — переменная из первой группы, y — из второй. Так как во второй структуре между фишками, помеченными переменными первой группы, и фишками, помеченными переменными второй группы имеются символы фактора w', то $S(x,y)$ ложна во второй структуре. Формула $S(x,y)$ будет ложной и в первой структуре, поскольку на последнюю букву фактора u' первой структуры фишек не было поставлено. Для других атомарных формул проверки очевидны.

По лемме 4, классы S_1, S_1', $\check{S}_1$ и $\check{S}_1'$ не обладают свойством редукции.

Для $k > 1$ возьмём

$$u_r^k = G_1(u_r^{k-1}, w_r^{k-1})F_1(w_r^{k-1}),\ v_r^k = F_1(w_r^{k-1})G_1(v_r^{k-1}, w_r^{k-1}),$$
$$w_r^k = G_1(u_r^{k-1}, w_r^{k-1})G_1(v_r^{k-1}, w_r^{k-1}),\ x_r^k = F_1(w_r^{k-1})F_1(w_r^{k-1}),$$

где $u_r^1 = bu_rb$, $v_r^1 = bv_rb$, $w_r^1 = bw_rb$, $F_1(u) = F(bub)$ и $G_1(u,v) = G(bub, bvb)$, $r \in N$.

Покажем индукцией по k, что

$$u_r^k \le_{k,r}^l w_r^k,\ \ v_r^k \le_{k,r}^l w_r^k,\ \ x_r^k \le_{k,r}^l u_r^k,\ \ x_r^k \le_{k,r}^l v_r^k, \tag{2}$$

для всех $k, r \in N$. Для $k = 1$ это следует из соотношений (1) с помощью леммы 2. Заметим, что по той же лемме для $u, v \in A^+$, $k, r \in N$, если $u \le_{k,r}^l v$, то $bub \le_{k,r}^l bvb$, следовательно, лемма 3 остаётся справедливой, если заменить F и G на F_1 и G_1.

Пусть теперь $k > 1$ и соотношения (2) справедливы для меньших значений k. По индуктивному предположению $v_r^{k-1} \le_{k-1,r} w_r^{k-1}$, следовательно, в силу леммы 3, $F_1(w_r^{k-1}) \le_{k,r}^l \le_{k,r}^l G_1(v_r^{k-1}, w_r^{k-1})$. По лемме 2, $G_1(u_r^{k-1}, w_r^{k-1})F_1(w_r^{k-1}) \le_{k,r}^l \le_{k,r}^l G_1(u_r^{k-1}, w_r^{k-1})G_1(v_r^{k-1}, w_r^{k-1})$, т.е. $u_r^k \le_{k,r}^l w_r^k$. Остальные соотношения из (2) доказываются аналогично.

Языки L_k, M_k, $k > 1$, определим так:

$$w \in L_k \iff \underbrace{bb\dots b}_{2k} u \underbrace{bb\dots b}_{2k} \sqsubseteq w, \text{где } u \notin M_{k-1},$$

$$w \in M_k \iff \underbrace{bb\dots b}_{2k} u \underbrace{bb\dots b}_{2k} \sqsubseteq w, \text{где } u \notin L_{k-1}.$$

Покажем, что $L_k, M_k \in S_k$, $k > 1$, $r \in N$.

Возьмём

$$\phi_k = \exists x_1^k \dots \exists x_{2p}^k \left(\bigwedge_{i=1}^{2p} Q_b x_i^k \wedge \bigwedge_{i=1}^{2p-1} x_i^k < x_{i+1}^k \wedge \neg\psi_{k-1}^{<x<}(x_p^k, x_{p+1}^k) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \forall y^k \left(\bigwedge_{i=1}^{p-1} neg(x_i^k < y^k < x_{i+1}^k) \wedge \bigwedge_{i=p+1}^{2p-1} \neg(x_i^k < y^k < x_{i+1}^k) \right) \right),$$

$$\psi_k = \exists x_1^k \dots \exists x_{2p}^k \left(\bigwedge_{i=1}^{2p} Q_b x_i^k \wedge \bigwedge_{i=1}^{2p-1} x_i^k < x_{i+1}^k \wedge \neg\phi_{k-1}^{<x<}(x_p^k, x_{p+1}^k) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \forall y^k \left(\bigwedge_{i=1}^{p-1} \neg(x_i^k < y^k < x_{i+1}^k) \wedge \bigwedge_{i=p+1}^{2p-1} \neg(x_i^k < y^k < x_{i+1}^k) \right) \right),$$

где $k > 1$, $p = 2k$. Формулы ϕ_k и ψ_k, принадлежащие классу S_k по построению, описывают языки L_k и M_k. Таким образом, $L_k, M_k \in S_k$, $k > 1$, $r \in N$.

Покажем, что $u_r^k \in L_k \backslash M_k$ и $w_r^k \in L_k$, $k \geq 2$, индукцией по k. При $k = 2$, $u_r^2 = G(b^2 u_r b^2, b^2 w_r b^2) F(b^2 w_r b^2)$, следовательно, $b^4 u_r b^4 \sqsubseteq u_r^2$. Так как $u_r \in L_1 \backslash M_1$, то $u_r^2 \in L_2$. Аналогично, $w_r^2 \in L_2$. Если $b^4 u b^4 \sqsubseteq u_r^2$, то $u = z_1 b^4 z_2 b^4 \dots z_m$, где $m \in N$ и $z_i \in \{u_r, w_r\}$. Но тогда $u \in L_1$ и, следовательно, $u_r^2 \notin M_2$.

Пусть теперь $k > 2$. По построению, $b^{k+1} u_r^{k-1} b^{k+1} = b^{2k} \tilde{u}_r b^{2k} \sqsubseteq u_r^k$, где $b^{k-1} \tilde{u}_r b^{k-1} = u_r^{k-1}$. По индуктивному предположению $u_r^{k-1} \in L_{k-1} \backslash M_{k-1}$, следовательно, $\tilde{u}_r \in L_{k-1} \backslash M_{k-1}$ и $u_r^k \in L_k$. Аналогично, $w_r^k \in L_k$. Если $b^{2k} u b^{2k} \sqsubseteq u_r^k$, то $u = z_1 b^{2k} z_2 b^{2k} \dots z_m$, где $m \in N$, $z_i \in \{\tilde{u}_r, \tilde{w}_r\}$, $b^{k-1} \tilde{u}_r b^{k-1} = u_r^{k-1}$ и $b^{k-1} \tilde{w}_r b^{k-1} = w_r^{k-1}$. По индуктивному предположению $u_r^{k-1}, w_r^{k-1} \in L_{k-1}$, следовательно, $\tilde{u}_r, \tilde{w}_r \in L_{k-1}$ и $u \in L_{k-1}$. Отсюда, $u_r^k \notin M_k$.

Аналогично можно показать, что $v_r^k \in M_k \backslash L_k$ и $w_r^k \in M_k$, $k \geq 2$. По лемме 4, классы S_k, S'_k, $\check{S}_k$ и $\check{S}'_k$, $k \geq 2$, не обладают свойством редукции. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналог теоремы 1 можно доказать для случая ω–языков, состоящих из бесконечных слов. Для этого можно модифицировать наше доказательство теоремы 2. При этом слова u_r, v_r, w_r, x_r, u_r^k, v_r^k, w_r^k и x_r^k, $k > 1$, из нашего доказательства можно заменить на ω–слова $u_r a^\omega$, $v_r a^\omega$, $w_r a^\omega$, $x_r a^\omega$, $u_r^k a^\omega$, $v_r^k a^\omega$, $w_r^k a^\omega$ и $x_r^k a^\omega$, а формулы ϕ_k, и ψ_k для определения ω языков L_k и M_k взять те же, что и в доказательстве теоремы.

В заключение автор хотел бы поблагодарить В.Л. Селиванова за предоставление литературы и помощь в работе.

Литература

1. BRZOZOWSKI J.A., KNAST R. The dot-depth hierarchy of star-free languages is infinite //J. Comput. System Sci. — 1978. — Vol. 16. — P. 37–55.

2. BÜCHI J.R. Weak second-order arithmetic and finite automata //Z. Math. Logik und Grundl. Math. — 1960. — Vol. 6. — P. 66–92.

3. EBINGHAUS H.D., FLUM J. Finite Model Theory. Springer. — New York, 1995.

4. MCNAUGHTON R., PAPERT S. Counter-free automata. — MIT Press, Cambridge, Massachusets, 1971.

5. PERRIN D., PIN J.E. First-order logic and star-free sets //J. Comput. System. Sci. — 1986. — Vol. 32. — P. 393–406.

6. SELIVANOV V.L. Fine hierarchies and Boolean terms // J. Symbolic Logic. — 1995. — Vol. 60. — P. 289–317.

7. SELIVANOV V.L. Fine hierarchy of regular ω-languages //Theoretical Computer Science — 1998. — Vol. 191. — P. 37–59.

8. STRAUBING H. Finite Automata, Formal Logic, and Circuit Complexity. — Birkhäuser, 1994.

9. THOMAS W. Classifying regular events in symbolic logic //J. Comput. System Sci. — 1982. — Vol. 25. — P. 360–376.

10. СЕЛИВАНОВ В.Л., ЩУКИН А.Г. Об иерархиях регулярных беззвёздных языков. — Новосибирск, 2000. — 29 с. — (Препринт/СО РАН, ИСИ; 69).

11. ШЕНФИЛД ДЖ. Математическая логика. — Наука, М., 1975.

12. ЩУКИН А.Г. Разностные иерархии регулярных языков //Обобщенная вычислимость и определимость. — Новосибирск, 1998. — Вып. 161: Вычислительные системы.— С. 141–155.

Поступила в редакцию
26 января 2000 года