СТРУКТУРНЫЕ И СЛОЖНОСТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1999 год Выпуск 165

УДК 510.66

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ФОРМУЛЬНЫМИ ДЕРЕВЬЯМИ

Ю.Д. Корольков

В математическом моделировании заметные успехи связаны, в первую очередь, с непрерывными моделями, но в последние десятилетия, особенно в связи с развитием вычислительной техники, все больше внимание уделяется дискретным моделям. Возникла потребность в развитии методов построения и исследования дискретных моделей и их преобразований с учетом возможной их автоматизации. Наибольшее внимание уделяется алгебро-логическим моделям и моделям управляющих систем.

Успехи теории алгоритмов, математической кибернетики и теоретического программирования не в последнюю очередь связаны с алгебро-логическим подходом. Здесь можно отметить работы А.Н.Колмогорова и В.А.Успенского по вычислимым функциям и исчислениям; А.И.Мальцева, Ю.Л.Ершова и С.С.Гончарова по теории нумераций и конструктивным моделям; А.А.Ляпунова, С.В.Яблонского и В.М.Глушкова по математической кибернетике; Ю.И.Янова и А.П.Ершова по схемам программ; О.Б.Лупанова по синтезу и сложности управляющих систем; А.Н.Тихонова по регулярным моделям и многие другие у нас и за рубежом.

В последние годы ведутся многочисленные исследования по изучению алгоритмов над дискретными моделями, алгоритмических свойств моделей. К этому направлению также относятся работы по базам данных, логическому программированию, экспертным системам.

Локальные методы в математике используются практически во всех ее разделах. Там, где возможно применение локальных методов, они обычно приводят к новым и эффективным решениям. В алгебре особенно известны локальные теоремы А.И.Мальцева.

На важность связей между непрерывными и дискретными моделями неоднократно указывал Н.Н.Яненко.

Выделим три типа дискретных моделей.

Первый основан на понятии истинности и связан с алгеброй и математической логикой. Такой подход возможен, когда удается выразить интересующие нас свойства в виде предложений формального языка, например, узкого исчисления предикатов. Тогда моделью данного множества предложений является алгебраическая система, на которой истинны все эти предложения. Для этих моделей интересны вопросы изоморфизма, элементарной эквивалентности, разрешимости моделей, описания подсистем. Они применяются также для решения задач выбора и распознавания образов.

Второй тип дискретных моделей основан на понятии правильности. В этом направлении развивается не только теория логического вывода и прикладная логика, но и заметная часть теоретического программирования. Здесь главную роль играют вопросы построения и исследования систем эквивалентных преобразований для характеризации основных понятий модели. На таких моделях решаются задачи построения и автоматизации систем символьных преобразований термов, различных классов формул, операторных термов. Ставятся также алгоритмические вопросы.

К третьему типу отнесем математические модели, основанные на понятии качества. Первоначально качество продукции исследовалось в квалиметрии. В настоящее время важное место занимают задачи построения и применения моделей качества для целей сертификации и управления качеством программных средств на этапах их жизненного цикла. Актуальны вопросы выбора номенклатуры показателей качества, оценки надежности и эффективности, моделирования процессов отладки и тестирования.

1. Методика определения истинности формул на конечных деревьях

Под алгебраической моделью, как обычно, мы будем понимать алгебраическую систему — множество элементов с заданными на нем операциями и отношениями, и обозначать как $\mathcal{A} =< A, \sigma >$, где A — множество, а σ — сигнатура. В нашем случае без ограничения общности можно считать, что сигнатура конечна и содержит лишь предикатные символы. Класс формул ограничивается формулами узкого исчисления предикатов над сигнатурой σ (с равенством).

Теорией первого порядка $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ алгебраической системы $\mathcal{A} =< A, \sigma >$ называется множество всех замкнутых формул узкого исчисления предикатов сигнатуры σ, истинных на $\mathcal{A}$. Для таких теорий представляют интерес вопросы разрешимости и равенства.

Здесь предлагается переложение идей известного метода конечных частичных изоморфизмов Ю.Л.Ершова [2], использованного им для получения критерия элементарной эквивалентности моделей, на язык конечных деревьев для определения истинности формул (см. также [3–5]).

Частичным изоморфизмом из модели $\mathcal{A}$ сигнатуры σ в модель $\mathcal{B}$ сигнатуры σ назовем всякое изоморфное отображение φ подмодели $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Если $\mathcal{B}$ — конечная модель, то φ назовем конечным частичным изоморфизмом. Через $\delta\varphi$ (область определения φ) будем обозначать основное множество C модели $\mathcal{C}$, а через $\rho\varphi$ (область значения φ) — множество $\varphi(C)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ [2]. *Две модели $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сигнатуры σ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq S_{n+1} \supseteq \ldots$ непустых множеств (конечных) частичных изоморфизмов из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, что для любого $n \in \omega$, любого $\varphi \in S_{n+1}$ и любых $a \in A$ и $b \in B$ существуют $\gamma, \lambda \in S_n$ такие, что $\varphi \subseteq \gamma, \lambda$ и $a \in \delta\gamma$, $b \in \rho\lambda$.*

Путем некоторой факторизации этих множеств частичных изоморфизмов с продолжениями из множеств S_n получим конечные деревья для определения истинности формул. Наряду с подходом Ю.Л.Ершова [2] или А.Т.Нуртазина [6], точно также получаются критерии элементарной эквивалентности и разрешимости, поскольку наши преобразования основываются в конечном итоге на разработанном А.Д.Таймановым [8] методе перекидки.

Пусть для каждого $n \in \omega$ последовательность $\varphi_0, \ldots, \varphi_{s(n)}$ состоит из всех атомных формул (т.е. бескванторных и содержащих не более одного предикатного символа) сигнатуры σ от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Ясно, что функция $s(n) = s(n, \sigma)$ рекурсивна.

Введем формулы $A^n_m(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \mathop{\&}\limits_{i=0}^{s(n)} \varphi_i^{m(i)}$, где $\varphi^1 = \varphi$, $\varphi^0 = \neg\varphi$, $m \in 2^{s(n)}$.

Если $a_1, \ldots, a_n$ — элементы A, то истинна в точности одна из формул $A^n_m(a_1, \ldots, a_n)$, $0 \leq m \leq 2^{s(n)}$.

Построим индуктивно систему вложенных помеченных деревьев $T_n = T_n(\mathcal{A})$. Элементами деревьев являются элементы A, ребра помечены формулами A^l_m, $1 \leq l \leq n$. Общий фиктивный корень, лежащий на уровне 0, обозначим $\emptyset$, $T_0 \Leftrightarrow \{\emptyset\}$.

Пусть построено T_{n-1}. С каждой вершиной $a_{n-1,j}$ уровня $(n-1)$ - последнего в T_{n-1} — свяжем ребрами свой комплект вершин $\{a_{ni}\}$, представляющий все элементы A по одному. Будем называть такой комплект подуровнем. Если b_n — элемент этого нового подуровня n и $\emptyset$, $b_1, \ldots, b_n$ — корневая ветвь, то ребро, входящее в b_n, помечаем той единственной формулой A^n_m, что $\mathcal{A} \models A^n_m(b_1, \ldots, b_n)$.

Если ввести для деревьев функцию $f(x) =$ "отец x", $f(\emptyset) = \emptyset$, то подуровень элемента b есть $f^{-1}(b)$.

Под изоморфизмом помеченных деревьев будем понимать изоморфизм деревьев при одинаковых метках на соответствующих ребрах. Для изоморфизма главных поддеревьев T_n потребуем дополнительно следующие условия: их корни должны принадлежать одному подуровню ($f(x) = f(y)$), а ребра, ведущие в эти корни, — одинаково помечены.

Пусть дерево P_n получено из T_n следующей процедурой. Сначала из каждого класса изоморфных главных поддеревьев с корнями на последнем уровне (эти деревья — элементы подуровня последнего уровня, но с учетом входящих в них ребер) оставляем по одному. Полученное дерево обозначим T^n_n. Затем из каждого класса изоморфных главных поддеревьев с корнями на уровне $(n-1)$ оставляем по одному и получаем T_n^{n-1} и т.д. Дерево $P_n = T_n^1$.

Ясно, что из-за произвола выбора представителей деревьев P_n может быть бесконечно много, но все они изоморфны как помеченные деревья. Кроме того, все P_n конечны и их размеры мажорируются подходящей рекурсивной функцией $p(n) = p(n, \sigma)$. Но вовсе не всякое помеченное дерево, изоморфное P_n, будет таковым, даже если все формулы-метки A_i^j на ребрах будут истинными на элементах дерева. Будем также называть деревья P_n деревьями типа P_n.

Через K_n обозначим дерево, полученное из P_n заменой конкретных элементов A в вершинах и формулах A_m^l символами различных переменных. Деревья K_n используются вместо P_n в случаях, когда нежелательно расширение сигнатуры σ именами элементов A.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебраические системы одной сигнатуры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$ *(или $\mathcal{A}$ элементарно эквивалентна $\mathcal{B}$) тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ помеченные деревья $K_n(\mathcal{A})$ и $K_n(\mathcal{B})$ изоморфны.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *разрешима тогда и только тогда, когда существует эффективная процедура построения по $n \in \omega$ дерева $K_n(\mathcal{A})$.*

Перейдем к доказательству предложений 1 и 2.

По каждой формуле можно эффективно построить эквивалентную ей формулу в пренексной приведенной нормальной форме $\psi = Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, где бескванторная φ есть дизъюнкция некоторых $A_m^n(x_1, \ldots, x_n)$. Поэтому будем считать, что формулы из $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ имеют такой вид.

Введем понятие истинности замкнутой формулы ψ на помеченном дереве. Область действия квантора Q_1 — первый уровень дерева (подуровень корня $f^{-1}(\emptyset)$). Если зафиксирован элемент b_1 первого подуровня, то область действия второго квантора Q_2 — $f^{-1}(b_1)$, подуровень второго уровня, чьи элементы соединены ребрами с b_1 и т.д. Например, $\exists$ — формула истинна на дереве, если среди концевых формул дерева найдется такая A_m^n, что содержится в φ в качестве дизъюнкта. Или формула $\forall x \exists y(A_1^2 \vee A_2^2)$

истинна на дереве K_2, если из каждого элемента первого уровня выходит ребро с меткой A_1^2 или A_2^2.

Очевидно, что истинность формулы φ на $\mathcal{A}$ равносильна истинности ψ на T_n. Перекидкой тривиально доказывается равносильность истинности ψ на T_n и P_n, поскольку при построении P_n отбрасывались поддеревья, изоморфные одному из оставшихся. Достаточность предложений 1 и 2 доказана.

Доказательство необходимости этих предложений следует из формульности деревьев K_n. Более точно, каждому помеченному дереву, имеющему n уровней, формулы на ребрах вида A^i_m и не содержащему изоморфных поддеревьев (таких деревьев конечное число и их можно перебрать эффективно), однозначно ставится в соответствие замкнутая формула сигнатуры σ такая, что она истинна на $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда соответствующее дерево есть $K_n(\mathcal{A})$.

Опишем построение формулы Φ, утверждающей, что данное дерево есть K_n. Пусть элементы дерева обозначены $x_1, \ldots, x_l$. Внешняя кванторная приставка имеет вид $\exists x_1 \ldots x_l$. Первым конъюнктивным членом является конъюнкция всех формул A^j_i, стоящих на всех ребрах дерева. Эта часть формулы утверждает правильность главных поддеревьев с вершинами на уровне n, т.е. элементов последнего уровня. Поддерево с вершиной на уровне s назовем правильным, если все его поддеревья правильны и оно содержит все возможные для него правильные поддеревья (с точностью до изоморфизма, конечно). Это определение повторяет построение дерева P_n, поэтому правильные деревья и есть P_n.

Следующие конъюнктивные члены формулы Φ будут утверждать правильность деревьев с вершинами на уровне $(n-1)$. Пусть $x, \ldots$ есть все элементы уровня $(n-1)$. Для каждого из них напишем свою формулу, утверждающую его правильность. Пусть из x выходят ребра со следующими формулами на ребрах: $A_1^n(\ldots, x, z_1), \ldots, A_v^n(\ldots, x, z_v)$, где $z_1, \ldots, z_v$ — все элементы $f^{-1}(x)$, а за многоточием скрываются справа налево $f(x), f(f(x))$ и т.д. Тогда утверждение о правильности x будет иметь вид: $\forall y(A_1^n(\ldots, x, y) \vee \ldots \vee A_v^n(\ldots, x, y))$.

Более точно, утверждение о правильности состоит из двух частей: правильность поддеревьев и полнота относительно правильных поддеревьев. Последняя формула утверждает полноту поддерева с вершиной x на уровне $(n-1)$, а правильность его поддеревьев (элементов уровня n) была записана ранее.

Теперь в готовой части формулы Φ утверждается правильность поддеревьев с вершинами на уровне $(n-1)$, так что следующим шагом можно будет записать полноту относительно этих поддеревьев. Она будет уже $\forall\exists$-формулой: надо написать, что любое другое поддерево, кроме уже имеющихся, неправильно. А мы уже записали правильность для этого уровня $\exists\forall$-формулой. Поэтому можно сказать про дальнейшее построение формулы Φ "и так далее".

В заключение доказательства предложений 1 и 2 отметим, что формула для P_n отличается от Φ для K_n лишь отсутствием внешних кванторов существования. Еще нужно вместо символов переменных из K_n подставить имена элементов системы $\mathcal{A}$, составляющих дерево P_n, с учетом изоморфизма этих деревьев.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подсистема $\mathcal{A}$ системы $\mathcal{B}$ называется элементарной подсистемой, если для любой формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ сигнатуры σ со свободными переменными $x_1,\ldots,x_n$ и для любых элементов $a_1,\ldots,a_n$ из $\mathcal{A}$ формула $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ истинна на $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда она истинна на $\mathcal{B}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $\mathcal{A}$ — подсистема $\mathcal{B}$, то система $\mathcal{A}$ является элементарной подсистемой системы $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда каждое дерево $P_n(\mathcal{A})$ является деревом $P_n(\mathcal{B})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 1 и из формульности деревьев P_n сразу следует необходимость предложения 3. Докажем достаточность. Пусть в $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ имеется k связанных переменных. Построим дерево $P_{n+k}(\mathcal{A})$ так, чтобы одна из корневых ветвей имела вид $\emptyset,\ a_1,\ldots,a_n$. Тогда это дерево будет и деревом $P_{n+k}(\mathcal{B})$ по условию предложения 3. Так как истинность формулы на системе равносильна истинности на деревьях P, то предложение 3 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Любой изоморфизм $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ переводит дерево типа $P_n(\mathcal{A})$ в дерево типа $P_n(\mathcal{B})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм α индуцирует изоморфизм деревьев T_n и αT_n, где дерево αT_n получено из T_n заменой каждого вхождения элементов $a \in A$ на αa. Более того, дерево αT_n есть дерево типа $T_n(B)$. Поэтому можно проводить построение деревьев $P_n(A)$ и $P_n(B)$ параллельно для T_n и αT_n. В итоге мы получим деревья P_n и αP_n, изоморфные по построению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дерево D, полученное из $T_n(A)$ процедурой удаления изоморфных поддеревьев, но оставляя при этом, быть может, из каждого класса изоморфных поддеревьев более одного, называется полным для A. Полное дерево может быть получено из P_n-дерева добавлением правильных поддеревьев.

Эквивалентность истинности формул на A и на полном дереве доказывается аналогично P_n-деревьям. Очевидно, что P_n-дерево является полным и что из конечного полного дерева эффективно извлекается P_n-дерево.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если A — подсистема B, то всякое P_n-дерево из A можно пополнить до P_n-дерева в B.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – P_n-дерево из A. Погружая его в B, заметим, что все формулы на его ветвях остались истинными. Поэтому в нем не появились изоморфные поддеревья. Так что его можно пополнить новыми элементами B.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для любого эпиморфизма $\alpha : A \to B$ и любого n существуют такие конечные полные деревья $L_n(A)$ и $M_n(B)$, что $\alpha L_n(A) = M_n(B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\alpha T_n(A)$ в качестве $T_n(B)$ для построения P_n-дерева. На первом шаге удаления изоморфных поддеревьев в $\alpha T_n(A)$ будем следить, чтобы в прообразе $T_n(A)$ оставляемых элементов было достаточно для получения полного дерева. Выберем, например, в $T_n(A)$ и $\alpha T_n(A)$ необходимые элементы на последнем уровне и добавим в $\alpha T_n^n(A)$ образы выделенных элементов из $T_n^n(A)$, а в $T_n^n(A)$ добавим по одному из прообразов выделенных элементов из $\alpha T_n^n(A)$. Число выделенных элементов на первом шаге по сравнению с процедурой построения P_n-деревьев не более чем удвоится. Далее идем по индукции, не забывая о том, что тип изоморфизма поддерева очередного уровня определяется не всеми поддеревьями, а только неизоморфными поддеревьями. Поэтому количество типов изоморфизма будет оставаться всегда конечным и мы получим в итоге конечные полные деревья $\alpha L_n(A) = M_n(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Произведением двух конечных деревьев равных уровней назовем дерево той же глубины, состоящее из пар элементов исходных деревьев, полученных по следующему правилу. Корень есть пара корней. Если элемент (a, b) уже построен, то его сыновья получаются объединением попарно сыновей a из первого дерева с сыновьями b из второго.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Произведение P_n-деревьев систем $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ дает полное дерево прямого произведения $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расставим нужные формулы на ветвях D произведения деревьев $L(\mathcal{A})$ и $M(\mathcal{B})$. Они определяются только элементами D в $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Предположим, на одном из нижних подуровней D нехватает для полноты элемента (a, b). Но если мы возьмем в соответствующих подуровнях $L(\mathcal{A})$ и $M(\mathcal{B})$ элементы c и d, изоморфные a и b в $L(\mathcal{A})$ и $M(\mathcal{B})$ соответственно, то пара (c, d) изоморфна паре (a, b) в $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, противоречие. Таким образом, нижние подуровни в D полны. Далее идем по индукции с учетом замечаний о конечности из предыдущего доказательства.

СЛЕДСТВИЕ [2]. *Прямое произведение разрешимых моделей разрешимо.*

2. Частичные изоморфизмы на линейных порядках

Рассмотрим отдельно случай, когда изучается не вся теория $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, а ее ограничение замкнутыми формулами без кванторов всеобщности ($\exists$ теория модели $\mathcal{A}$). Как и выше, можно считать, что $\exists$-формула имеет вид $\exists xy \ldots (A^n_m \vee A^n_k \ldots)$, т.е. бескванторная часть есть дизъюнкция конъюнкций атомных формул. Но формула такого вида эквивалентна дизъюнкции $(\exists xy \ldots A^n_m) \vee (\exists xy \ldots A^n_k) \vee \ldots$. Поэтому проверка истинности произвольной $\exists$–формулы сводится к проверке истинности формул вида $\exists xy \ldots A^n_m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем n–универсальным словом модели $\mathcal{A} = (A, \sigma)$ такой кортеж $a_1, a_2, \ldots, a_k$ элементов из A, что в него изоморфно вкладывается любая последовательность из n элементов множества A.

Очевидно, что универсальные слова всегда существуют и что разрешимость $\exists$–теории модели $\mathcal{A}$ эквивалентна существованию алгоритма, дающего по каждому $n \in \omega$ некоторое

n–универсальное слово. В то же время наименьшая длина n универсальных слов как функция от n может служить определением сложности разрешимой $\exists$ теории.

Теперь предлагается следующая постановка задачи. Имеется два конечных линейно упорядоченных множества $a_1 < \ldots < a_k$ и $b_1 < \ldots < b_m$, элементы которых помечены буквами (по одной) некоторого алфавита S. Требуется найти максимальный частичный изоморфизм φ этих помеченных линейных порядков (a и φa помечены одно буквой из S). Эта задача естественно связана с предыдущими построениями. Кроме того, она напоминает задачу о домах и колодцах из области плоских графов и задачу восстановления стертой информации. Ее можно отнести к задачам распознавания образов.

Непонятно сразу, как можно обобщить эту задачу на случай произвольного числа линейных порядков. Но и обобщение, и решение получаются довольно легко, если воспользоваться понятием универсального слова. Переформулируем задачу так.

Даны помеченные линейные порядки. Требуется найти минимальное универсальное слово, т.е. такой помеченный линейный порядок P минимальной мощности, в который данные помеченные порядки изоморфно вкладываются.

Если отождествлять помеченные линейные порядки со словами в алфавите S, составленными из меток на элементах, то можно получить уравнения в свободной полугруппе со свободными образующими из S для поиска P:

$$P = x_0 a_1 x_1 \ldots a_k x_k = y_0 b_1 y_1 \ldots b_m y_m = \ldots, \qquad (1)$$

причем оказывается, что решения этой системы всегда существуют и минимальным решениям соответствуют минимальные универсальные слова.

Рассмотрим приложение этой модели к практической задаче.

3. Задача идентификации геологических разрезов

В геологии известна задача идентификации (сопоставления) геологических разрезов. Разрез рассматривается как последовательность типов однородности пород (осадочных, геохимических и т.п.), а задача идентификации разрезов заключается в таком сопоставлении однотипных элементов разных разрезов, которое соответствует реальному прохождению геологических тел на данной территории [7].

Важность данной задачи обусловлена тем, что базой теоретических построений в геологии является физическое пространство геологических тел. Его структура и определяется результатом решения задачи идентификации.

Предложен новый модельный подход к решению этой задачи, полученный автором совместно с Э.Г.Бернгардтом [1]. В [1] подробно рассмотрен случай двух разрезов и несколько фрагментарно — общий случай. Дадим полное изложение.

Разрезы являются разноместными реализациями единого процесса осадконакопления P. Обычно считают, что осадконакопление носило устойчивый характер. Это предположение позволяет сформулировать задачу идентификации для комплекса разрезов $\{A_i\}$ как задачу выделения систем слоев (модельных аналогов геологических пластов) с максимальным числом слоев, что равносильно построению по разрезам $\{A_i\}$ процесса P как минимального универсального слова для $\{A_i\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Кортеж $(a_j^{i_1}, a_s^{i_2}, \ldots, a_k^{i_n})$ элементов из A_i, в котором все компоненты однотипны, а $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — различны, назовем слоем длины n, $n > 0$. В каждом слое присутствует не более одного элемента из любого A_i.

Для корректности построения систем слоев одной непересекаемости слоев недостаточно. Необходимо избегать ситуаций типа: $\{(a_1, b_2), (b_1, c_2), (a_2, c_1)\}$ (непересекающиеся слои на разрезах $A = fa_1a_2$, $C = fc_1c_2$ и $B = fb_1b_2$), которые невозможно описать никаким осадочным процессом, так как нельзя определить, какой слой образовался раньше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что слой α расположен ниже слоя β, если для всех i таких, что $\alpha \cap A_i = \{a\}$, $\beta \cap A_i = \{b\}$ имеем $a < b$ в A_i.

Введенное отношение "ниже" на множестве всех слоев не является порядком, но оно отражает наше представление о процессе осадконакопления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть T — некоторая система слоев с заданным на ней линейным порядком $<_T$. Систему T назовем корректной, если из $\alpha <_T \beta$ следует, что α ниже β $(\alpha, \beta \in T)$, и каждый элемент разрезов $A_1, \ldots, A_r$ принадлежит в точности одному слою из T.

Рассматривая задачу идентификации для двух разрезов, мы взяли в качестве критерия выбора результирующей системы слоев максимальность по мощности (числу слоев). На случай произвольного числа разрезов этот критерий не может быть автоматически перенесен, так как на группе разрезов слои могут быть разной длины. С другой стороны желательно, чтобы критерий для группы давал для двух скважин то же самое сопоставление.

Пусть $R = \{X_0^1, \ldots, X_{t_1}^1, X_0^2, \ldots, X_{t_r}^r\}$ — допустимое решение уравнения (1), т.е. без самосокращающихся букв.

Если $P_R = fp_1p_2 \ldots p_t$, то, как и в случае $r = 2$, система слоев T_R содержит t слоев, каждый из которых связан с одной из букв p_i слова P_R отношением $\sim_R$. Слой буквы p_i состоит из тех представителей $A_1, \ldots, A_r$, которые находятся в отношении $\sim_R$ с p_i (сокращающихся с p_i при подстановке решения R в уравнения (1)). Линейный порядок $<_T$ индуцируется естественным расположением букв $p_1p_2 \ldots p_t$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Система слоев T_R, порожденная допустимым решением R, корректна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая буква любого A_i сокращается в точности с одной из букв $p_1p_2 \ldots p_t$, из чего следует вторая часть условия корректности. Первая часть вытекает из свойств сокращения букв в свободной подгруппе: буквы сокращаются только в том порядке, в котором они были записаны как в слове A_i, так и в слове P_R.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть T — корректная система. Тогда существует допустимое решение R уравнения* (1), *такое, что $T = T_R$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем метки $p_1, \ldots, p_t$ для каждого слоя из T (каждый слой содержит только одинаково помеченные элементы) и рассмотрим слово $P = p_1 \ldots p_t$. Утверждаем, что P является универсальным словом для $A_1, \ldots, A_r$ и тем самым существует решение R такое, что $P = P_R$. Отсюда будет следовать и $T = T_R$.

Изоморфное вложение φ: $A_i \to P$ для произвольного i осуществляется так. Пусть $a \in A_i$ и лежит в слое $T_a \in T$. Пусть T_a соответствует буква p_q в P. Тогда определяем $\varphi(a) = p_q$. Поскольку в каждом слое не более одной буквы a из A_i, то φ определено как отображение корректно. Так как разным слоям поставлены в соответствие разные вхождения букв в P, то φ взаимно-однозначно. Осталось показать, что из $a < b$ в A_i следует $q < m$, где $\varphi(a) = p_q$, $\varphi(b) = p_m$. Это сразу следует из определений.

ТЕОРЕМА. *Решение R уравнения* (1) *с минимальной длиной P_R порождает корректную систему слоев T_R с максимальным значением суммы $S(T_R) = \sum_{i=2}^{r}(i-1)N_i$, где N_i — число слоев мощности i.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим более общую задачу. Пусть мы имеем систему линейных порядков $A_1, \ldots, A_r$. Системой слоев $M = \{M_1, \ldots, M_k\}$ на $A = \cup A_i$ назовем произвольное разбиение A на непустые подмножества, т.е. $\cup M_i = A$, $M_j \cap M_p = \emptyset$ при $j \neq p$.

Простым (локальным) преобразованием M назовем перенос одного элемента из одного из слоев M_j в другой слой M_p, если только после этого преобразования снова получается система слоев. Для этого слой M_i не должен быть одноэлементным. При простом преобразовании число слоев не меняется.

Назовем две системы слоев $L = \{L_1, \ldots, L_k\}$ и $M = \{M_1, \ldots, M_k\}$ эквивалентными, если от одной к другой можно пройти конечным числом простых преобразований.

ЛЕММА. *Эквивалентные системы слоев M и L имеют равные суммы $S(M) = S(L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При простом преобразовании перенос элемента a из M_j, содержащего i элементов, $i > 1$, в M_p, содержащего q элементов, приводит к изменению характеристик N_i (уменьшается на 1), N_{i-1} (увеличивается на 1), $N_q(-1)$ и $N_{q+1}(+1)$. Это происходит из-за того, что M_j переходит из разряда i-слоев в разряд $(i-1)$-слоев, а M_p переходит из q-слоев в $(q+1)$-слои. Другие показатели N_t в сумме S не изменятся. Поэтому $S(L) = \ldots (i-1)(N_{i-1}+1) + i(N_i - 1) + \ldots + q(N_q - 1) +$

$+(q+1)(N_q+1) = S(M)+(i-1)-i+(-q)+(q+1) = S(M)$, где $N_{i-1},\ldots,N_{q+1}$ — показатели для M.

Продолжим доказательство теоремы. Заметим, что системы слоев для $A_1,\ldots,A_r$ с одинаковым числом слоев эквивалентны. Поэтому их суммы S равны. Если же мы уменьшаем число слоев на единицу, а это можно сделать, перенося последний элемент из некоторого слоя M_j в другой M_p с q элементами, сумма S увеличится на 1, поскольку слагаемые с $i=1$ и $i=0$ отсутствуют, а слагаемые $(-q)+(q+1)$ дают увеличение на 1.

Осталось заметить, что для системы T_R число слоев совпадает с длиной решения R.

В итоге мы установили соответствия между универсальными словами, решениями уравнений в свободной полугруппе и корректными системами слоев.

Литература

1. БЕРНГАРДТ Э.Г., КОРОЛЬКОВ Ю.Д. Моделирование задачи идентификации геологических разрезов уравнениями в свободной полугруппе //Алгоритмические и комбинаторные вопросы дискретных систем и ЭВМ. — Иркутск, 1990. — С. 16–26 (Межвуз.сб.тр.).

2. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М., 1980. — 416 с.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Язык Σ–выражений //Логические вопросы теории типов данных. — Новосибирск, 1986. — Вып. 114: Вычислительные системы. — С. 3–10.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Определимость и вычислимость. — Новосибирск, 1996. — 286 с.

5. КОРОЛЬКОВ Ю.Д. Теории первого порядка отдельных алгебраических систем //Третья сибирская школа по алгебре и анализу. — Иркутск, 1990. — С. 21–25 (Сб. тр.).

6. НУРТАЗИН А.Т. Об элиминации кванторов //Девятая всесоюзн. конф. по матем.логике. — Л., 1988. — С. 119.

7. САЛИН Ю.С. Стратиграфическая корреляция. — М., 1983. — 277 с.

8. ТАЙМАНОВ А.Д. Характеристики аксиоматизируемых классов моделей //Алгебра и логика. — 1962. — Т. 1, № 4. — С. 5-32.

Поступила в редакцию
2 июля 1999 года