СТРУКТУРНЫЕ И СЛОЖНОСТНЫЕ
ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)

1999 год Выпуск 165

УДК 517.15

УНИВЕРСАЛЬНАЯ НУМЕРАЦИЯ ВЫЧИСЛИМЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ВЫДЕЛЕННЫМ ИДЕАЛОМ[1]

Н.Т.Когабаев

Одной из основных проблем при изучении конкретных классов конструктивных моделей является проблема выбора наиболее «естественной» вычислимой нумерации для данного класса. Конечно, ответ на такой неопределенный вопрос во многом зависит от внутренней структуры рассматриваемого класса, от природы моделей из данного класса и от того контекста, в котором рассматривается «естественность» той или иной нумерации. Однако если наделить семейство всех вычислимых нумераций данного класса дополнительной структурой в виде предпорядка сводимости, то естественно обратиться к наибольшей нумерации. Существование такой наибольшей относительно предпорядка сводимости вычислимой нумерации приводит к понятию главной вычислимой нумерации.

В настоящей работе изучаются конструктивные (вычислимые) булевы алгебры с выделенным идеалом. В дальнейшем такие алгебры будем называть I-алгебрами.

В статье показано, что в классе конструктивных I-алгебр существует универсальная вычислимая нумерация, т.е. существует вычислимая последовательность конструктивных I-алгебр, являющаяся главной в данном классе.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта "Университеты России" Министерства образования РФ № 3Н-334-99 и ФЦП "Интеграция".

Рассматриваются I–алгебры в сигнатуре $\sigma \rightleftharpoons \langle \vee, \wedge, C, 0, 1, I\rangle$, где I — символ унарного предиката, выделяющего идеал булевой алгебры.

Основные сведения по теории алгоритмов, рекурсивных функций и теории нумераций содержатся в [1,2]. С методами и понятиями теории конструктивных моделей можно познакомиться в [3,4]. Вся необходимая информация по теории счетных булевых алгебр может быть найдена в [4]. Работа в значительной степени опирается на метод порождающих деревьев для булевых алгебр, изложенный в [4, § 1.7, § 3.3; 5, § 3].

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс конструктивных моделей сигнатуры Σ. Последовательность конструктивных моделей из класса $\mathcal{K}$ $\langle \mathcal{M}_0, \nu_0\rangle$, $\langle \mathcal{M}_1, \nu_1\rangle$, $\ldots$, $\langle \mathcal{M}_n, \nu_n\rangle$, $\ldots$ называется *вычислимой*, если эти модели равномерно конструктивны, т.е. индексы рекурсивных функций, определяющих основные операции, а также индексы характеристических функций множеств номеров основных предикатов вычисляются для модели $\langle \mathcal{M}_n, \nu_n\rangle$ рекурсивными функциями по номеру n.

Пусть $\alpha = \{\langle \mathcal{M}_n, \nu_n\rangle | n \in \mathbf{N}\}$ и $\beta = \{\langle \mathcal{N}_n, \mu_n\rangle | n \in \mathbf{N}\}$ - две последовательности конструктивных моделей из класса $\mathcal{K}$. Последовательность α *сводится* к последовательности β, если существует рекурсивная функция f такая, что модели $\langle \mathcal{M}_n, \nu_n\rangle$ и $\langle \mathcal{N}_{f(n)}, \mu_{f(n)}\rangle$ рекурсивно изоморфны.

Будем говорить, что последовательность α *эффективно сводится* к последовательности β, если существуют рекурсивные функции f и g такие, что для любого n функция $\varphi_{g(n)}$ определяет рекурсивный изоморфизм конструктивной модели $\langle \mathcal{M}_n, \nu_n\rangle$ на модель $\langle \mathcal{N}_{f(n)}, \mu_{f(n)}\rangle$, т.е. отображение $\psi_n(\nu_n(m)) \rightleftharpoons \mu_{f(n)}(\varphi_{g(n)}(m))$ корректно определено и является изоморфизмом $\mathcal{M}_n$ на $\mathcal{N}_{f(n)}$.

Последовательность α конструктивных моделей класса $\mathcal{K}$ называется *универсальной* в классе $\mathcal{K}$, если выполняются следующие условия:

1) последовательность α вычислима,

2) последовательность α — главная в классе $\mathcal{K}$, т.е. любая вычислимая последовательность β конструктивных моделей из класса $\mathcal{K}$ сводится к α.

Зафиксируем следующие общепринятые обозначения:

$\rightleftharpoons$ — знак, означающий «равно по определению»,

$dom(\cdot)$ — область определения функции,

$rang(\cdot)$ — область значений функции,

φ_n — частично-рекурсивная функция номера n,

W_n — рекурсивно-перечислимое множество номера n ($W_n = dom(\varphi_n), n$ называется *р.п.индексом* множества W_n),

$W_n^t \rightleftharpoons \{x \in W_n \mid x \le t, \varphi_n(x)$ сходится не более чем за t шагов$\}$,

γ - сильно вычислимая нумерация конечных наборов из; $\mathbf{N}$ $(\gamma(n) = \{k_0 < k_1 < \ldots < k_s\} \Leftrightarrow n = 2^{k_0} + \ldots + 2^{k_s})$,

$\mathcal{B}_D$ — булева алгебра, построенная по дереву D [4, §1.7; 5, §3].

Определим на $\mathbf{N}$ следующие функции и подмножества [4, §1.7; 5; §3]:

$R(n) \rightleftharpoons 2n+2, \quad L(n) \rightleftharpoons 2n+1,$

$H(n) = 0$, если $n = 0$, $H(n) = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, если $n > 0$, где $[x]$ — целая часть x,

$$S(n) \rightleftharpoons \begin{cases} n-1, & \text{если } n \text{ четное}, n > 0, \\ n+1, & \text{если } n \text{ нечетное}, n > 0, \\ 0, & \text{если } n = 0, \end{cases}$$

$h(0) = 0, \quad h(n+1) = h(H(n+1)) + 1,$

$H(x,0) = x, \quad H(x,n+1) = H(H(x,n)),$

$$x \preceq y \Leftrightarrow \prod_{n=0}^{h(x)} |H(x,n) - y| = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть D — бинарное дерево. Подмножество $K \subseteq D$ называется *идеальным в* D, если выполняются следующие условия:

а) $\forall n((n \neq 0 \ \& \ n \in K \ \& \ S(n) \in K) \Longrightarrow H(n) \in K)$,

б) $\forall m \forall n((m \in K \ \& \ n \in D \ \& \ n \preceq m) \Longrightarrow n \in K)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть (D, φ) — порождающее дерево для булевой алгебры $\mathcal{B}$, $K \subseteq D$, K — идеальное в D. Свяжем с множеством K следующее подмножество алгебры B

$$I_K \rightleftharpoons \{ \bigvee_{x \in H} \varphi(x) \mid H \subseteq K,\ H \text{ — конечно} \}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть (D, φ) — порождающее дерево для булевой алгебры B, $K \subseteq D$, K – идеальное в D. Тогда множество I_K определено корректно и является идеалом булевой алгебры B.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем корректность определения I_K. Пусть $a \in B$ и $a = \bigvee_{x \in H} \varphi(x)$ для некоторого конечного $H \subseteq K$. По лемме 1.7.1 [4] существует H^* — каноническое представление для a. Из определения идеального подмножества и из доказательства леммы 1.7.1 [4] следует, что по–прежнему $H^* \subseteq K$. Пусть теперь G — произвольное конечное подмножество D такое, что $a = \bigvee_{y \in G} \varphi(y)$. Так как $\bigvee_{y \in G} \varphi(y) = \bigvee_{x \in H^*} \varphi(x)$, то поскольку H^* - каноническое представление, заключаем, что $\forall y \in G \quad \exists x \in H^* \ (y \preceq x)$. В силу идеальности K, отсюда следует, что $G \subseteq K$. Корректность доказана.

Докажем, что I_K является идеалом в B. Очевидно $0^B \in I_K$, так как $\emptyset \subseteq K$. Если $\bigvee_{x \in H} \varphi(x)$, $\bigvee_{y \in G} \varphi(y) \in I_K$, то также ясно, что элемент $(\bigvee_{x \in H} \varphi(x)) \vee (\bigvee_{y \in G} \varphi(y)) \in I_K$. Пусть теперь $\bigvee_{x \in H} \varphi(x) \in I_K$, $G \subseteq D$, G — конечно и $\bigvee_{y \in G} \varphi(y) \leq \bigvee_{x \in H} \varphi(x)$. Тогда $\bigvee_{y \in G^*} \varphi(y) \leq \bigvee_{x \in H^*} \varphi(x)$, где G^* и H^* — соответствующие канонические представления. Как было замечено выше, по–прежнему $H^* \subseteq K$. Для канонических представлений в таком случае получаем: $\forall y \in G^* \ \exists x \in H^* \ (y \preceq x)$. Следовательно, $G^* \subseteq K$, и значит $\bigvee_{y \in G} \varphi(y) = \bigvee_{y \in G^*} \varphi(y) \in I_K$. Таким образом, I_K - идеал в B. ■

Используя метод порождающих деревьев, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть K, L — рекурсивно-перечислимые множества такие, что выполняются условия:*

1) $D \rightleftharpoons K \cup L$ — *дерево*, $K \cap L = \emptyset$;

2) *множество K является идеальным в D.*

Тогда существуют конструктивизация ν I-алгебры $\mathcal{B}_{K,L} \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons (\mathcal{B}_D, I_K)$ и две частично-рекурсивные функции u и v такие, что

а) $\forall n(n \in D \Longrightarrow \nu(u(n)) = A_n)$,

б) $\forall n(\nu(n) = \bigvee\limits_{i \in \gamma(v(n))} A_i)$,

причем, если ν и μ — две конструктивизации с вышеперечисленными свойствами, то ν и μ рекурсивно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\mathcal{R}(D)$ — множество всех конечных подмножеств D. Поскольку D рекурсивно перечислимо, то и множество номеров элементов из $\mathcal{R}(D)$ в сильно вычислимой нумерации γ конечных наборов из $\mathbb{N}$ будет рекурсивно-перечислимым. Поскольку $\mathcal{R}(D)$ не пусто ($\emptyset \in \mathcal{R}(D)$ и $\emptyset$ получает некоторый γ-номер), то существует рекурсивная функция v, перечисляющая все номера элементов из $\mathcal{R}(D)$. Определим нумерацию $\nu_D(n) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i \in \gamma(v(n))} A_i$ всех элементов из $\mathcal{B}_D$.

Так как по любому конечному подмножеству $H \subseteq D$ конструкция построения для $\bigcup\limits_{i \in H} A_i$ канонического представления H^* по H в силу леммы 1.7.1 [4] эффективна, а канонические представления для объединения, пересечения и дополнения также могут быть найдены эффективно на базе конструкций леммы 1.7.4 [4], заключаем, что существуют рекурсивные функции $f_\vee, f_\wedge, f_C$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{N}$

$$\nu_D(f_\vee(x, y)) = \nu_D(x) \vee \nu_D(y),$$
$$\nu_D(f_\wedge(x, y)) = \nu_D(x) \wedge \nu_D(y),$$
$$\nu_D(f_C(x)) = C(\nu_D(x)),$$

а также множество $\eta_{\nu_D} \rightleftharpoons \{(x, y) \mid \nu_D(x) = \nu_D(y)\}$ рекурсивно.

Таким образом, $\langle \mathcal{B}_D, \nu_D \rangle$ — конструктивная булева алгебра в стандартной сигнатуре $\langle \vee, \wedge, C, 0, 1 \rangle$. Рассмотрим в алгебре

$\mathcal{B}_D$ подмножество $I_K \rightleftharpoons \{\nu_D(n) \mid \gamma(v(n)) \subseteq K\}$. Тогда, по предложению 1, I_K является идеалом в буленой алгебре $\mathcal{B}_D$. Покажем, что множество $\nu_D^{-1}(I_K)$ рекурсивно.

Поскольку K, L рекурсивно-перечислимы, то существуют $m, n \in \mathbb{N}$ такие, что $K = W_m$, $L = W_n$. Определим функцию

$$\rho(x) \rightleftharpoons \mu t(x \in W_m^t \text{ или } x \in W_n^t).$$

Так как $W_m \cap W_n = \emptyset$, $W_m \cup W_n = D$ и предикат $\{\langle x, m, t\rangle \mid x \in W_m^t\}$ рекурсивен, заключаем, что ρ — частично-рекурсивная функция и $dom(\rho) = D$. Положим

$$\mathcal{X}(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, \text{ если } x \in W_m^{\rho(x)}, \\ 0, \text{ если } x \notin W_m^{\rho(x)}, \\ \text{не определено, иначе} \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{X}$ — частично-рекурсивная функция, $dom(\mathcal{X}) = D$ и, очевидно, $(\mathcal{X}(x) = 1 \iff x \in K)$, т.е. $\mathcal{X} = \mathcal{X}_K \restriction D$, где $\mathcal{X}_K$ — характеристическая функция множества K.

Имеем: $x \in \nu_D^{-1}(I_K) \iff \nu_D(x) \in I_K \iff \gamma(v(x)) \subseteq K \iff \forall i \in \gamma(v(x))(i \in K) \iff \forall i \in \gamma(v(x))(\mathcal{X}(i) = 1)$.

Поэтому, в силу рекурсивности функции v, эффективности нахождения по γ-номеру множества всех его составляющих, а также поскольку $\mathcal{X}$ частично-рекурсивна и $rang(v) = \gamma^{-1}(\mathcal{R}(D))$, заключаем, что $\nu_D^{-1}(I_K)$ рекурсивно.

Следовательно, если обозначить $\mathcal{B}_{K,L} \rightleftharpoons (\mathcal{B}_D, I_K)$, то $\langle \mathcal{B}_{K,L}, \nu_D\rangle$ — конструктивная I-алгебра.

Можно определить частично-рекурсивную функцию u, $dom(u) = D$, такую, что $\forall n(n \in D \Longrightarrow \nu_D(u(n)) = A_n)$.

Пусть теперь ν и μ — две конструктивизации со свойствами "а" и "б". Определим функцию g следующим образом: для n мы берем множество с γ-номером $v(n)$, а по элементам $i \in \gamma(v(n))$ находим μ-номера элементов A_i с помощью функции u. Построив номер для объединения всех этих элементов, мы получим значение $g(n)$. Нетрудно видеть, что $\nu = \mu g$, т.е. ν и μ рекурсивно эквивалентны. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что в предложении 2, индексы рекурсивных функций $v, f_\vee, f_\wedge, f_C$, частично-рекурсивных функций $u, \mathcal{X}$, а также индексы характеристических функций множеств η_{ν_D} и $\nu_D^{-1}(I_K)$ равномерно эффективным образом зависят от р.п.индексов множеств K, L, т.е. от натуральных чисел m и n. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $(\mathcal{B}, I)$ — конструктивизируемая I-алгебра, ν — её конструктивизация. Тогда существуют рекурсивно-перечислимые множества K, L такие, что выполняются условия:*

1) $D \rightleftharpoons K \cup L$ - дерево, $K \cap L = \emptyset$,

2) множество K является идеальным в D,

и конструктивные I алгебры $\langle(\mathcal{B}, I), \nu\rangle$ и $\langle(\mathcal{B}_D, I_K), \nu_D\rangle$ рекурсивно изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве перечисления элементов из $\mathcal{B}$ последовательность $b_0 \rightleftharpoons \nu(0)$, $b_1 \rightleftharpoons \nu(1)$, $b_2 \rightleftharpoons \nu(2), \ldots$ и т.д. и по теореме 1.7.1 [4] построим перечислимое дерево D и частично-рекурсивную функцию f такие, что (D, φ) — порождающее дерево для $\mathcal{B}$, где $\varphi \rightleftharpoons \nu f$.

Определим множества K и L следующим образом:

$$K \rightleftharpoons \{n \in D | \nu f(n) \in I\}, \quad L \rightleftharpoons \{n \in D | \nu f(n) \notin I\}.$$

Поскольку f частично-рекурсивна, $dom(f) = D$, и множество $\nu^{-1}(I)$ рекурсивно, заключаем, что множества K, L рекурсивно-перечислимы. Кроме этого, ясно что $D = K \cup L$, $K \cap L = \emptyset$.

Очевидно, в силу определения множеств K и L, идеал I алгебры $\mathcal{B}$ совпадает с множеством

$$\Big\{ \bigvee_{i \in H} \nu f(i) | H \text{ — конечно}, H \subseteq K \Big\}.$$

Покажем, что K идеально в D. Действительно, если $n \neq 0$, $n \in K$, $S(n) \in K$, то $\varphi(n) \vee \varphi(S(n)) \in I$, но $\varphi(n) \vee \varphi(S(n)) = \varphi(H(n))$. Следовательно, $H(n) \in K$. Если же $n \in D$, $m \in K$, и $n \preceq m$, то $\varphi(n) \leq \varphi(m) \in I$. Следовательно, $\varphi(n) \in I$. Откуда заключаем, что $n \in K$. Таким образом, K — идеальное в D.

Воспользовавшись функциями u и v для ν_D, построим рекурсивную функцию g и изоморфизм $\psi(\bigcup_{i \in H} A_i) \rightleftharpoons \bigvee_{i \in H} \nu f(i)$ булевой алгебры $\mathcal{B}_D$ на булеву алгебру $\mathcal{B}$ так, что $\psi \nu_D = \nu g$.

Покажем, что ψ сохраняет идеал:

$$\psi(I_K) = \{\psi(\bigcup_{i\in H} A_i) | H \text{ — конечно }, H \subseteq K\} =$$
$$= \{\bigvee_{i\in H} \nu f(i) | H \text{ - конечно }, H \subseteq K\} = I.$$

Таким образом, ψ — рекурсивный изоморфизм (B_D, I_K) на (B, I). Предложение доказано. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что поскольку в предложении 3 отображение ν является конструктивизацией (B, I), то множества $\eta_\nu \rightleftharpoons \{(x,y)|\nu(x) = \nu(y)\}$, $\nu^{-1}(I)$ рекурсивны и существуют рекурсивные функции $f_\vee, f_\wedge, f_C$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{N}$

$$\nu(f_\vee(x,y)) = \nu(x) \vee \nu(y),$$
$$\nu(f_\wedge(x,y)) = \nu(x) \wedge \nu(y),$$
$$\nu(f_C(x)) = C(\nu(x)).$$

Нетрудно проследить за всеми рассуждениями в доказательстве предложения 3 и убедиться в том, что р.п.индексы построенных рекурсивно-перечислимых множеств K, L, D, а также индекс рекурсивной функции g, определяющей рекурсивный изоморфизм ψ, равномерно эффективным образом зависят от следующих натуральных чисел:

а) индексов рекурсивных функций $f_\vee, f_\wedge, f_C$,

б) индексов характеристических функций рекурсивных множеств η_ν и $\nu^{-1}(I)$. □

ЛЕММА 1. *Пусть D — дерево, K, $L \subseteq D$, $D = K \cup L$, $K \cap L = \emptyset$. Подмножество K является идеальным в D тогда и только тогда, когда для любой тройки вершин $n, L(n), R(n) \in D$ выполняется условие:*

$$(n \in K \iff (L(n) \in K \;\&\; R(n) \in K)). \quad (*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество K идеально в D, то очевидно для любых $n, L(n), R(n) \in D$ выполняется условие $(*)$.

Пусть теперь для любых $n, L(n), R(n) \in D$ выполнено условие $(*)$, докажем что K — идеальное в D.

Если $n \neq 0$, $n \in K$, $S(n) \in K$, то, поскольку для тройки вершин $H(n), n, S(n) \in D$ выполнено условие $(*)$, заключаем, что $H(n) \in K$. Что и требовалось.

Пусть теперь $m \in D$, $n \in K$, $m \preceq n$. Индукцией по разности высот $h(m) - h(n)$ в дереве D докажем, что $m \in K$.

Если $h(m) - h(n) = 0$, то очевидно $m = n \in K$.

Пусть $h(m) - h(n) > 0$. Следовательно, $H(m) \preceq n$. По индукции $H(m) \in K$. Кроме этого, тройка $H(m), m, S(m) \in D$ удовлетворяет условию $(*)$. Следовательно, $m \in K$. Что и требовалось. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существуют рекурсивные функции α, β, δ такие, что рекурсивно-перечислимые множества $K \rightleftharpoons W_{\alpha(n)}, L \rightleftharpoons W_{\beta(n)}, D \rightleftharpoons W_{\delta(n)}$, где $n \in \mathbf{N}$, обладают следующими свойствами:*

1) *D - дерево, $D = K \cup L$, $K \cap L = \emptyset$,*

2) *множество K является идеальным в D.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c : \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$ — канторовская нумерация пар натуральных чисел, n — произвольное натуральное число и $n = c(n_0, n_1)$. Рассмотрим для каждого $k \in \{0, 1\}$ рекурсивно-перечислимое множество W_{n_k} и его стандартную аппроксимацию конечными множествами

$$\emptyset = W^0_{n_k} \subseteq W^1_{n_k} \subseteq \dots \subseteq W^t_{n_k} \subseteq \dots, \quad W_{n_k} = \bigcup_{t \in \omega} W^t_{n_k},$$

причем по n_k и t можно эффективно вычислить количество элементов в множестве $W^t_{n_k}$, а также указать все эти элементы.

Будем по шагам строить конечные множества D^t, K^t, L^t, где $t \in \omega$.

<u>Шаг 0.</u> Полагаем $D^0 = K^0 = L^0 = \emptyset$.

<u>Шаг $t+1$.</u> Пусть D^t, K^t, L^t уже построены, $D^t = K^t \cup L^t$, $K^t \cap L^t = \emptyset$.

Обозначим $X^{t+1} \rightleftharpoons W^{t+1}_{n_0} \cup W^{t+1}_{n_1}, Z^{t+1} \rightleftharpoons X^{t+1} \setminus D^t$. Для каждого $z \in Z^{t+1}$ определим $\tau(z) \rightleftharpoons min\{k \mid z \in W^{t+1}_{n_k}, k \in \{0, 1\}\}$. Проверяем существует ли пара элементов $x, y \in Z^{t+1}$, для которых выполнено одно из двух следующих условий:

а) $x = y = 0$.

б) $y > x > 0$, $y = S(x)$ и существует концевая вершина a в дереве D^t такая, что $L(a) = x$, $R(a) = y$ и выполняется условие: $(a \in K^t \Longleftrightarrow (\tau(x) = 0 \mathbin{\&} \tau(y) = 0))$.

Если таких x и y не существует, то полагаем $K^{t+1} \rightleftharpoons K^t$, $L^{t+1} \rightleftharpoons L^t$, $D^{t+1} \rightleftharpoons D^t$.

Если существуют x, y, удовлетворяющие условию "а", то $s \rightleftharpoons \tau(x) = \tau(y)$. В этом случае полагаем:

$$K^{t+1} \rightleftharpoons \begin{cases} \{0\}, \text{ если } s = 0, \\ \emptyset, \text{ если } s = 1, \end{cases}$$

$$L^{t+1} \rightleftharpoons \begin{cases} \emptyset, \text{ если } s = 0, \\ \{0\}, \text{ если } s = 1, \end{cases}$$

$$D^{t+1} \rightleftharpoons \{0\}.$$

Если же $0 \notin Z^{t+1}$, и существуют x, y, удовлетворяющие условию "б", то выберем среди всех таких пар пару (x, y) с наименьшим значением x. Пусть $s_1 \rightleftharpoons \tau(x)$, $s_2 \rightleftharpoons \tau(y)$. Полагаем:

$$K^{t+1} \rightleftharpoons \begin{cases} K^t \cup \{x, y\}, \text{ если } s_1 = 0,\ s_2 = 0, \\ K^t \cup \{x\}, \text{ если } s_1 = 0,\ s_2 = 1, \\ K^t, \text{ если } s_1 = 1,\ s_2 = 1, \end{cases}$$

$$L^{t+1} \rightleftharpoons \begin{cases} L^t, \text{ если } s_1 = 0,\ s_2 = 0, \\ L^t \cup \{y\}, \text{ если } s_1 = 0,\ s_2 = 1, \\ L^t \cup \{x, y\}, \text{ если } s_1 = 1,\ s_2 = 1, \end{cases}$$

$$D^{t+1} \rightleftharpoons D^t \cup \{x, y\}.$$

После чего переходим к следующему шагу.

Положим $K \rightleftharpoons \bigcup\limits_{t \in \omega} K^t$, $L \rightleftharpoons \bigcup\limits_{t \in \omega} L^t$, $D \rightleftharpoons \bigcup\limits_{t \in \omega} D^t$.

Легко видеть, что для любого t D^t — дерево, $D^t = K^t \cup L^t$ и $K^t \cap L^t = \emptyset$. Отсюда следует, что D — дерево, $D = K \cup L$ и $K \cap L = \emptyset$.

По построению для любой тройки элементов $x, L(x), R(x) \in D$ выполняется условие $(*)$. Отсюда по лемме 1 заключаем, что K — идеальное в D.

Поскольку $D^0 \subseteq D^1 \subseteq \ldots \subseteq D^t \subseteq \ldots$ — строго вычислимая монотонная последовательность конечных множеств, заключаем, что D рекурсивно перечислимо. По тем же причинам перечислимы множества K и L.

Наконец, заметим, что инструкции для перечисления D, K, L равномерно эффективным образом зависят от исходных множеств W_{n_0}, W_{n_1}, т.е. от натурального числа $n = c(n_0, n_1)$.

Поэтому существуют рекурсивные функции α, β, δ такие, что для данного $n \in \mathbf{N}$ $K = W_{\alpha(n)}$, $L = W_{\beta(n)}$, $D = W_{\delta(n)}$. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть $n = c(n_0, n_1)$ и рекурсивно-перечислимые множества $\overline{K} \rightleftharpoons W_{n_0}$, $\overline{L} \rightleftharpoons W_{n_1}$ обладают свойствами:*

1) $\overline{D} \rightleftharpoons \overline{K} \cup \overline{L}$ — *дерево,* $\overline{K} \cap \overline{L} = \emptyset$,

2) *множество* $\overline{K}$ *является идеальным в* $\overline{D}$.

Тогда $\overline{K} = W_{\alpha(n)}$, $\overline{L} = W_{\beta(n)}$, $\overline{D} = W_{\delta(n)}$, *где* α, β, δ — *рекурсивные функции, определенные в предложении 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = W_{\alpha(n)}$, $L = W_{\beta(n)}$, $D = W_{\delta(n)}$. Так же как и в конструкции предложения 4 обозначим через K^t, L^t, D^t конечные подмножества, построенные к концу шага t.

Пусть $z \in K$. Следовательно, существует шаг $t+1$ такой, что $z \in K^{t+1} \setminus K^t$. Следовательно, в силу конструкции $0 = \tau(z) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \min\{l | z \in W_{n_l}^{t+1}, l \in \{0,1\}\}$. Следовательно, $z \in W_{n_0} = \overline{K}$. Таким образом, доказано $K \subseteq \overline{K}$. Аналогично доказывается, что $L \subseteq \overline{L}$.

Заметим, что из доказанного, в силу свойства 1, следует, что если $z \in D^t = K^t \cup L^t$, и $z \in \overline{K}$ или $z \in \overline{L}$, то $z \in K^t$ или $z \in L^t$ соответственно.

Пусть теперь $z \in \overline{K}$. Индукцией по высоте $h(z)$ в дереве $\overline{D}$ докажем, что $z \in K$.

1^0. Если $h(z) = 0$, то $z = 0$. Следовательно, существует t такой, что $z \in W_{n_0}^{t+1} \setminus W_{n_0}^t$. Рассмотрим шаг $t+1$. На этом шаге вершина $z = 0 \in X^{t+1} \rightleftharpoons W_{n_0}^{t+1} \cup W_{n_1}^{t+1}$ и $0 \notin D^t$, так как $D^t \subseteq X^t$. Поэтому $0 \in Z^{t+1} = X^{t+1} \setminus D^t$ и $\tau(0) \rightleftharpoons min\{l | z \in$ $\in W_{n_l}^{t+1}$, $l \in \{0,1\}\} = 0$, в силу свойства 1. Следовательно, согласно конструкции на шаге $t+1$, $z = 0$ попадёт в K^{t+1}. Следовательно, $z \in K$.

2^0. Пусть $h(z) > 0$, следовательно $z > 0$. Так как $z \in \overline{D}$, то существует $a \in \overline{D}$ такое, что $H(z) = a$, $x \rightleftharpoons L(a)$, $y \rightleftharpoons R(a)$, $0 < x < y$. Можно считать $z = x$, $S(z) = y$ (случай $z = y$,

$S(z) = x$ рассматривается аналогично). Пусть $y \in W_{n_m}$, $a \in W_{n_s}$.

Пусть далее $b_1, \ldots, b_p$ – все вершины из $\overline{K} \cup \overline{L} = \overline{D}$ такие, что $h(b_i) \leq h(x) - 1$ для всех $i \leq p$. В частности, $a \in \{b_1, \ldots, b_p\}$. По предположению индукции $b_1, \ldots, b_p \in K \cup L = D$. Найдем наименьший шаг t_0 такой, что $b_1, \ldots, b_p \in D^{t_0}, x \in W_{n_o}^{t_0+1}$, $y \in W_{n_m}^{t_0+1}$.

Если a не является концевой вершиной дерева D^{t_0}, то $x, y \in$ $\in D^{t_0}$. Следовательно, как было замечено выше, $x \in K^{t_0}$, и значит $x \in K$.

Если же a — концевая вершина D^{t_0}, то рассмотрим $a_1 < \ldots < a_q = a$ — все концевые вершины дерева D^{t_0} такие, что $a_i \leq a$, $h(a_i) = h(x) - 1$, $R(a_i) \in \overline{D}$, $L(a_i) \in \overline{D}$ для всех $i \leq q$. В частности, $a \in \{a_1, \ldots, a_q\}$. Далее применим индукцию по значению числа q.

1^{00}. Если $q = 1$, то, в силу выбора t_0, a является наименьшей концевой вершиной D^{t_0} такой, что $h(a) \leq h(x) - 1$, $R(a) \in$ $\in \overline{D}$, $L(a) \in \overline{D}$. Рассмотрим шаг $t_0 + 1$. На этом шаге вершины $x, y \in X^{t_0+1} \setminus D^{t_0}$, $L(a) = x$, $R(a) = y$, $\tau(x) = 0$, $\tau(y) =$ $= m$, а также в силу условия 2 и леммы 1 выполняется: $\big(a \in K^{t_0} \iff (\tau(x) = 0 \ \& \ \tau(y) = 0)\big)$. Причем, как мы заметили, a будет наименьшей такой вершиной. Следовательно, согласно конструкции на шаге $t_0 + 1$, $x \in K^{t_0+1}$, и значит $x \in K$.

2^{00}. Пусть $q > 1$. По второму предположению индукции $R(a_i)$, $L(a_i) \in K \cup L = D$ для всех $i \leq q - 1$. Найдем наименьший шаг $t_1 \geq t_0$ такой, что $L(a_i), R(a_i) \in D^{t_1}$ для всех $i \leq q - 1$ и $x \in W_{n_o}^{t_1+1}$, $y \in W_{n_m}^{t_1+1}$.

Если a не является концевой вершиной D^{t_1}, то $x, y \in D^{t_1}$. Следовательно, как было замечено выше, $x \in K^{t_1}$, и значит $x \in K$.

Если же a – концевая вершина D^{t_1}, то, в силу выбора t_0 и t_1, a является наименьшей концевой вершиной D^{t_1} такой, что $h(a) \leq h(x) - 1$, $R(a) \in \overline{D}$, $L(a) \in \overline{D}$. Рассмотрим шаг $t_1 + 1$. На этом шаге вершины $x, y \in X^{t_1+1} \setminus D^{t_1}$, $L(a) = x$, $R(a) = y$, $\tau(x) = 0$, $\tau(y) = m$, а также в силу условия 2 и леммы 1 выполняется: $\big(a \in K^{t_1} \iff (\tau(x) = 0 \ \& \ \tau(y) = 0)\big)$. Причем, как мы заметили, a будет наименьшей такой вершиной. Следовательно, согласно конструкции на шаге $t_1 + 1$, $x \in K^{t_1+1}$, и значит $x \in K$.

Таким образом, доказано $\overline{K} \subseteq K$. Аналогично доказывается, что $\overline{L} \subseteq L$. Следовательно, $K = \overline{K}$, $L = \overline{L}$, $D = \overline{D}$. Предложение доказано. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть n — произвольное натуральное число. Рассмотрим множества $K \rightleftharpoons W_{\alpha(n)}, L \rightleftharpoons W_{\beta(n)}, D \rightleftharpoons W_{\delta(n)}$, где α, β, δ — рекурсивные функции, определенные в предложении 4. По предложению 4, D — дерево, K — идеальное в D подмножество, $K \cup L = D$, $K \cap L = \emptyset$. Далее по предложению 2 существует конструктивизация ν_D для I-алгебры $\mathcal{B}_{K,L} = (\mathcal{B}_D, I_K)$. Обозначим: $\mathcal{A}_n \rightleftharpoons (\mathcal{B}_D, I_K) = (\mathcal{B}_{W_{\delta(n)}}, I_{W_{\alpha(n)}})$, $\nu_n \rightleftharpoons \nu_D = \nu_{W_{\delta(n)}}$. Таким образом, определена последовательность $\langle \mathcal{A}_0, \nu_0 \rangle$, $\langle \mathcal{A}_1, \nu_1 \rangle$, ... , $\langle \mathcal{A}_n, \nu_n \rangle$, ... конструктивных I-алгебр.

ТЕОРЕМА. *Последовательность* $\{\langle \mathcal{A}_n, \nu_n \rangle | n \in \mathbb{N}\}$ *является универсальной в классе конструктивных I-алгебр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2 и замечанию 1 индексы рекурсивных функций $f_{\vee}^n, f_{\wedge}^n, f_C^n$, представляющих операции в I-алгебре $\langle \mathcal{A}_n, \nu_n \rangle$, а также индексы характеристических функций рекурсивных множеств $\eta\nu_n = \{(x, y) | \nu_n(x) = \nu_n(y)\}$ и $\nu_n^{-1}(I^{\mathcal{A}_n})$, равномерно эффективным образом вычисляются по р.п.индексам множеств $W_{\alpha(n)}$ и $W_{\beta(n)}$, т.е. по индексам $\alpha(n)$ и $\beta(n)$, которые в свою очередь эффективно вычисляются по номеру n. Следовательно, $\langle \mathcal{A}_n, \nu_n \rangle$ — вычислима.

Пусть $\langle (C_n, J_n), \mu_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, — вычислимая последовательность конструктивных I-алгебр. Для любого $n \in \mathbb{N}$, в силу предложения 3, замечания 2, и в силу вычислимости последовательности $\langle (C_n, J_n), \mu_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, существуют рекурсивные функции h_1, h_2, h_3, g такие, что $\varphi_{g(n)}$ определяет рекурсивный изоморфизм $\langle \mathcal{B}_{K,L}, \nu_D \rangle$ на $\langle (C_n, J_n), \mu_n \rangle$, где $K \rightleftharpoons W_{h_1(n)}$, $L \rightleftharpoons W_{h_2(n)}$, $D \rightleftharpoons W_{h_3(n)}$.

Далее, если положить $f(n) \rightleftharpoons c(h_1(n), h_2(n))$, то по предложению 5 $K = W_{\alpha(f(n))}, L = W_{\beta(f(n))}, D = W_{\delta(f(n))}$. Следовательно, имеет место

$$\langle \mathcal{B}_{K,L}, \nu_D \rangle = \langle (\mathcal{B}_D, I_K), \nu_D \rangle =$$
$$= \langle (\mathcal{B}_{W_{\delta(f(n))}}, I_{W_{\alpha(f(n))}}), \nu_{W_{\delta(f(n))}} \rangle = \langle \mathcal{A}_{f(n)}, \nu_{f(n)} \rangle.$$

Таким образом, $\langle (C_n, J_n), \mu_n \rangle$ эффективно сводится к $\langle A_n, \nu_n \rangle$ посредством рекурсивных функций f и g. Теорема доказана. ■

Литература

1. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. — М.: Наука, 1977.

3. ГОНЧАРОВ Д.Е., ЕРШОВ Ю.Л. Конструктивные модели. - Новосибирск: Научная кн., 1999.

4. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. — Новосибирск: Научная кн., 1996.

5. ПЕРЕТЯТЬКИН М.Г. Сильно конструктивные модели и нумерации булевой алгебры рекурсивных множеств //Алгебра и логика — 1971. — Т.10, № 5. — С. 535–557.

Поступила в редакцию
9 ноября 1999 года