СТРУКТУРНЫЕ И СЛОЖНОСТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1999 год Выпуск 165

УДК 510.5

ОБОБЩЕННЫЕ НУМЕРАЦИИ И ТЕОРЕМА ФРИДБЕРГА[1]

В.Г. Пузаренко

В монографии [1] Ю.Л.Ершовым введены понятия A–нумераций на KPU–моделях, а также приводятся базовые свойства, служащие неким обоснованием введенных понятий. В данной работе обсуждаются вопросы дистрибутивности полурешеток обобщенных нумераций и приводится пример наследственно конечных надстроек, в которых выполняется при естественных ограничениях теорема Фридберга, а степени формульных множеств имеют структуру степеней арифметических множеств. При рассмотрении наследственно конечных надстроек всегда будем предполагать конечность сигнатур. Терминология статьи согласована с терминологией, данной в работах [1,2].

§1. Об A–нумерациях и сводимостях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть **A** — KPU–модель. Частичное отображение $\nu : A \rightarrow S$ назовем **A**–*нумерацией множества* S, если $\delta\nu \in \Sigma(\mathbf{A})$, $\rho\nu = S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. **A**–нумерацию ν множества S будем называть *всюду определенной*, если $\delta\nu = A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть ν и μ — **A**–нумерации. Будем говорить, что ν *сводится к* μ (и обозначать как $\nu \leq \mu$), если

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП "Интеграция" (проект 274), при финансовой поддержке гранта РФФИ № 99-01-00600 и гранта "Университеты России" Министерства образования РФ № 3Н-334-99.

$\rho\nu \subseteq \rho\mu$ и существует бинарный Σ–предикат R такой, что $\delta R = \delta\nu$ и $\forall\langle b_0, b_1\rangle \in R(\nu b_0 = \mu b_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. **A**–нумерации ν и μ *эквивалентны* ($\nu \equiv \mu$), если $\nu \leq \mu$ и $\mu \leq \nu$.

Очевидно, отношение сводимости на множестве $N_{\mathbf{A}}(S)$ **A**–нумераций подмножеств множества S является предпорядком. Через $L_{\mathbf{A}}(S)$ обозначим множество $N_{\mathbf{A}}(S)/_{\equiv}$. На введенной структуре отношение сводимости индуцирует отношение частичного порядка (его будем обозначать так же, как и отношение сводимости: $\leq$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(S) \rightleftharpoons \langle L_{\mathbf{A}}(S), \leq\rangle$ – *дистрибутивная верхняя полурешетка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(S)$ является верхней полурешеткой, показано в монографии [1], причем верхней гранью $[\nu_0]$ и $[\nu_1]$ является $[\nu_0 \oplus \nu_1]$, где

$$\nu_0 \oplus \nu_1(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \nu_0(x_0), \text{ если } x = \langle x_0, 0\rangle, x_0 \in \delta\nu_0; \\ \nu_1(x_0), \text{ если } x = \langle x_0, 1\rangle, x_0 \in \delta\nu_1; \\ \text{не определено, в противном случае.} \end{cases}$$

Докажем, что $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}(S)$ дистрибутивна. Пусть $\nu_0, \nu_1, \nu \in N_{\mathbf{A}}(S)$ таковы, что $\nu \leq \nu_0 \oplus \nu_1$. Рассмотрим Σ–предикат R из определения 3 о сводимости. Тогда предикаты $R_0 \rightleftharpoons \{\langle a, b\rangle | \langle a, \langle b, 0\rangle\rangle \in R\}$ и $R_1 \rightleftharpoons \{\langle a, b\rangle | \langle a, \langle b, 1\rangle\rangle \in R\}$ осуществляют сводимости $\mu_0 \rightleftharpoons \nu|\,\delta R_0$ к ν_0 и $\mu_1 \rightleftharpoons \nu|\,\delta R_1$ к ν_1 соответственно. **A**–нумерация μ_i сводится к ν посредством предиката $\{\langle a, a\rangle | a \in \delta R_i\}$, $i = 0, 1$, а предикат $T \rightleftharpoons \{\langle a, \langle a, 0\rangle\rangle | a \in \delta R_0\} \cup \{\langle a, \langle a, 1\rangle\rangle | a \in \delta R_1\}$ сводит ν к $\mu_0 \oplus \mu_1$. ∎

Через $N'_{\mathbf{A}}(S)$ обозначим множество всюду определенных **A**-нумераций множества S, а через $L'_{\mathbf{A}}(S)$ — множество $N'_{\mathbf{A}}(S)/_{\equiv}$. Для данной структуры имеет место аналог предыдущего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $\mathbf{L}'_{\mathbf{A}}(S) \rightleftharpoons \langle L'_{\mathbf{A}}(S), \leq\rangle$ — *дистрибутивная верхняя полурешетка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Покажем сначала, что $\mathbf{L}'_{\mathbf{A}}(S)$ является верхней полурешеткой. Пусть $\nu_0, \nu_1 \in N'_{\mathbf{A}}(S)$. Зафиксируем некоторый элемент $s_0 \in S$. Тогда A–нумерация

$$\nu_0 \oplus' \nu_1(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \nu_0(x_0), \text{ если } x = \langle x_0, 0\rangle; \\ \nu_1(x_0), \text{ если } x = \langle x_0, 1\rangle; \\ s_0, \text{ если } x \notin A \oplus A \end{cases}$$

обладает следующими свойствами: $\nu_0 \leq \nu_0 \oplus' \nu_1$, $\nu_1 \leq \nu_0 \oplus' \nu_1$, $\nu_0 \leq \mu$, $\nu_1 \leq \mu \Rightarrow \nu_0 \oplus' \nu_1 \leq \mu$, т.е. $[\nu_0 \oplus' \nu_1]$ есть верхняя грань $[\nu_0]$ и $[\nu_1]$.

Покажем, что $\mathbf{L}'_{\mathbf{A}}(S)$ дистрибутивна. Пусть $\nu, \nu_0, \nu_1 \in N'_{\mathbf{A}}(S)$ таковы, что $\nu \leq \nu_0 \oplus' \nu_1$. Тогда существует бинарный Σ_A–предикат R из определения 3. Обозначим через $\Phi(x_0, x_1)$ Σ-формулу такую, что $R = \Phi^{\mathbf{A}}[x_0, x_1]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\rho R \subseteq A \oplus A$. Действительно, зафиксируем $a \in A$ такой, что $\nu_0(a) = s_0$. Тогда Σ–формула

$$(\exists x_2((x_1 = \langle x_2, 0\rangle) \vee (x_1 = \langle x_2, 1\rangle)) \wedge \Phi(x_0, x_1)) \vee \exists x_3 \forall x_2 \in TC(x_3)$$
$$((x_3 \neq \langle x_2, 0\rangle) \wedge (x_3 \neq \langle x_2, 1\rangle) \wedge \Phi(x_0, x_3) \wedge (x_1 = \langle a, 0\rangle))$$

обладает этим свойством.

По принципу Σ–рефлексии существует Δ_0–формула Φ' такая, что $\Phi(x_0, x_1) \equiv_{\mathrm{KPU}} \exists x_2 \Phi'(x_0, x_1, x_2)$. Покажем, что для A–нумераций

$$\mu_i(x) \rightleftharpoons \begin{cases} \nu_i(b), \text{ если } x = \langle a, b, c\rangle, \mathbf{A} \models \Phi'(a, \langle b, i\rangle, c); \\ s_0, \text{ в противном случае}; \end{cases}$$

выполняются условия из определения дистрибутивной полурешетки, а именно, $\mu_0 \oplus' \mu_1 \equiv \nu$ и $\mu_i \leq \nu_i$, $i = 0, 1$. Зафиксируем произвольные элементы b', c'_0, c'_1 такие, что $\nu(b') = \nu_0(c'_0) = \nu_1(c'_1) = s_0$. Тогда предикат

$$F \rightleftharpoons \{\langle a, b\rangle | \bigvee_{i=0}^{1} \exists u \exists c(\Phi'(a, \langle c, i\rangle, u) \wedge (b = \langle\langle a, c, u\rangle, i\rangle))\}$$

осуществляет сводимость ν к $\mu_0 \oplus' \mu_1$.

Также легко убедиться в том, что предикаты

$$R_i \rightleftharpoons \{\langle a, b\rangle | \exists u \exists c(((a = \langle u, b, c\rangle) \wedge \Phi'(u, \langle b, i\rangle, c)) \vee$$
$$\vee \exists d((a = \langle u, d, c\rangle) \wedge \neg\Phi'(u, \langle d, i\rangle, c) \wedge (b = c'_i))) \vee$$
$$\vee \forall u \in TC(a) \forall c \in TC(a) \forall d \in TC(a)((a \neq \langle u, d, c\rangle) \wedge (b = c'_i))\},$$

$$Q_i \rightleftharpoons \{\langle a,b\rangle | \exists u \exists c(((a=\langle b,u,c\rangle)\wedge \Phi'(b,\langle u,i\rangle,c))\vee$$
$$\vee \exists d((a=\langle u,c,d\rangle)\wedge \neg\Phi'(u,\langle c,i\rangle,d)\wedge(b=b')))\vee$$
$$\vee \forall u\in TC(a)\forall c\in TC(a)\forall d\in TC(a)((a\neq\langle u,d,c\rangle)\wedge(b=b'))\}$$

осуществляют сводимость μ_i к ν_i и ν соответственно, где $i=0,1$. ∎

Если рассматривать вместо всюду определенных A-нумераций множества S всюду определенные A-нумерации подмножеств множества S, то соответствующая верхняя полурешетка будет дистрибутивной в том и только в том случае, когда S одноэлементно.

Сначала введем понятия, касающиеся общей теории $m\Sigma$-степеней в произвольной KPU-модели A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\emptyset \neq B, C \subset A$. Будем говорить, что B *$m\Sigma$-сводится* к C ($B \leq_{m\Sigma} C$), если существует Σ-предикат $R \subseteq A^2$ такой, что $\delta R = A$ и для любой пары $\langle a_0,a_1\rangle \in R((a_0\in B)\Leftrightarrow(a_1\in C))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В качестве предиката $m\Sigma$-сводимости R можно рассматривать предикат с прежним условием на пары такой, что δR — Δ-предикат, содержащий B.

Непосредственно из определения следует, что $B\leq_{m\Sigma} C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \chi_B \leq \chi_C$, где

$$\chi_C(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если } x\in C; \\ 0, & \text{если } x\in A\setminus C \end{cases} \quad —$$

характеристическая функция множества C в KPU-модели A.

Рассмотрение только собственных подмножеств в определении $m\Sigma$-сводимости играет существенную роль при доказательстве предложения 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $B, C \subseteq A$. Будем говорить, что B *$T\Sigma$-сводится* к C ($B\leq_{T\Sigma} C$), если существуют двуместные Σ-операторы F_0 и F_1 такие, что $\langle C, A\setminus C\rangle \in \delta_c F_i$, $i=0,1$, $B=F_0(C,A\setminus C)$, $A\setminus B = F_1(C, A\setminus C)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $B, C \subseteq A$. Будем говорить, что B является *Σ^C-предикатом* ($B\in\Sigma^C(\mathbf{A})$), если существует двуместный Σ-оператор F такой, что $\langle C, A\setminus C\rangle \in \delta_c F$, $B = F(C, A\setminus C)$.

Естественным образом определяются понятия $m\Sigma$-($T\Sigma$-)эквивалентности, $m\Sigma$ ($T\Sigma$-)степени и порядка $\leq$ на $m\Sigma$-($T\Sigma$-) степенях, индуцированного предпорядком $\leq_{m\Sigma}$ ($\leq_{T\Sigma}$). В определениях, приведенных ниже, $r \in \{m\Sigma, T\Sigma\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $B, C \subseteq A$. Будем говорить, что B r-эквивалентно C ($B \equiv_r C$), если $B \leq_r C$ и $C \leq_r B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $B \subseteq A$. r-степенью множества назовем $\mathbf{b} = d_r(B) \rightleftharpoons \{B' \subseteq A | B' \equiv_r B\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $B, C \subseteq A$. Тогда

$$d_r(C) \leq d_r(B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (C \leq_r B).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Множество $m\Sigma$-степеней $\mathbf{L}_m(\mathbf{A}) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \langle L_m(\mathbf{A}), \leq \rangle$ произвольной* KPU-*модели* $\mathbf{A}$ *образует дистрибутивную верхнюю полурешетку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение является следствием предыдущего предложения и соотношения $\mathbf{L}_m(\mathbf{A}) \simeq$ $\simeq \mathbf{L}'_{\mathbf{A}}(\{0,1\})$. ■

В дальнейшем будем использовать обозначения $\mathbf{L}_m(\mathcal{M})$ и $L_T(\mathcal{M})$ для верхних полурешеток $L_m(\mathbf{HF}(\mathcal{M}))$ $m\Sigma$-степеней и $L_T(\mathbf{HF}(\mathcal{M}))$ $T\Sigma$-степеней соответственно наследственно конечной надстройки $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$.

ЛЕММА 1. *Пусть γ^* — Σ определимая биекция между* $\mathbf{HF}(\emptyset)$ *и* $\mathbf{N}$, *а* $A, B \subseteq \mathrm{HF}(\emptyset)$. *Тогда выполняются следующие условия:*

а) $((A \leq_{T\Sigma} B) \Leftrightarrow (\gamma^*(A) \leq_T \gamma^*(B)))$;

б) $\gamma^*(A) \equiv_{m\Sigma} A$;

в) $((A \leq_{m\Sigma} B) \Leftrightarrow (\gamma^*(A) \leq_m \gamma^*(B)))$.

Приведем без доказательства результаты автора, посвященные данной тематике [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Теорию T назовем *регулярной*, если она разрешима и модельно полна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Теорию T назовем *простой*, если она регулярна, полна, ω-категорична и имеет разрешимое множество полных формул.

ЛЕММА 2 [2]. *Пусть $\mathcal{M}$ — модель простой теории T и Q — произвольное формульное подмножество* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$. *Тогда*

$Q \equiv_{m\Sigma} Q_0$ *для некоторого подмножества* $Q_0 \subseteq \mathrm{HF}(\emptyset)$ ($\subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M})$) *того же класса в иерархии, что и множество* Q.

ЛЕММА 3 [2] *Пусть* $\mathcal{M}$ — *модель простой теории и* $A, B \subseteq \subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M})$ *такие, что* $A \in \Sigma^B(\mathrm{HF}(\mathrm{M}))$, $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{HF}(\emptyset)$. *Тогда существует подмножество* $A_0 \subseteq \mathrm{HF}(\emptyset)$, $A_0 \equiv_{m\Sigma} A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $\mathbf{A}$ KPU модель и $\mathfrak{b} \in L_m(\mathbf{A})$ ($\mathfrak{b} \in L_T(\mathbf{A})$). Будем говорить, что $\mathfrak{b}$ — *перечислимая (определимая)* $m\Sigma$-($T\Sigma$-)степень, если существует Σ_A-подмножество (формульное подмножество) $B \in \mathfrak{b}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [2] (об идеале). *Пусть* $\mathcal{M}$ — *модель простой теории и* $\mathcal{HF}_{\emptyset}^{T\Sigma}(\mathcal{HF}_{\emptyset}^{m\Sigma})$ — *множество всех* $T\Sigma$-($m\Sigma$-)*степеней, содержащих подмножества* $\mathrm{HF}(\emptyset)$ ($\subseteq \mathrm{HF}(M)$). *Тогда* $\mathcal{HF}_{\emptyset}^{T\Sigma}(\mathcal{HF}_{\emptyset}^{m\Sigma})$ *является идеалом полурешетки* $T\Sigma$-($m\Sigma$-)*степеней допустимого множества* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Пусть* $\mathcal{M}$ — *модель простой теории. Тогда выполняются следующие условия:*

а) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ *(посредством отождествления натуральных чисел с ординалами надстройки) индуцирует изоморфизм между полурешетками* L_m^0 (L_T^0) *рекурсивно перечислимых* m-(T-)*степеней и* $L_m^0(\mathcal{M})$ ($L_T^0(\mathcal{M})$) *перечислимых* $m\Sigma$-($T\Sigma$-)*степеней допустимого множества* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$;

б) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ *индуцирует изоморфизм между полурешетками* L_m^l (L_T^l) *арифметических* m-(T-)*степеней и* $L_m^l(\mathcal{M})(L_T^l(\mathcal{M}))$ *определимых* $m\Sigma$-($T\Sigma$-)*степеней допустимого множества* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$;

в) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ *индуцирует изоморфизм множества* m-(T-)*степеней на идеал* $\mathcal{HF}_{\emptyset}^{m\Sigma}(\mathcal{HF}_{\emptyset}^{T\Sigma})$ *множества* $m\Sigma$-($T\Sigma$-)*степеней наследственно конечной надстройки* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$.

§2. О вычислимых A-нумерациях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть $S \subseteq \Sigma(\mathbf{A})$. $\mathbf{A}$-нумерацию ν множества S назовем *вычислимой*, если предикат $\{\langle a, b\rangle | b \in \in \nu(a), a \in \delta\nu\}$ Σ-определим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Семейство $S \subseteq \Sigma(\mathbb{A})$ назовем *вычислимым*, если S обладает вычислимой $\mathbb{A}$-нумерацией.

Из существования универсального Σ-предиката в KPU-моделях с определенными ограничениями следует вычислимость семейства всех Σ-подмножеств. Так же, как и в обычной теории нумерации, вычислимые нумерации семейства S образуют идеал верхней полурешетки всех нумераций подсемейств семейства S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть ν — $\mathbb{A}$-нумерация. Множество $\eta_\nu \rightleftharpoons \{\langle a, b\rangle \in (\delta\nu)^2 | \nu(a) = \nu(b)\}$ назовем нумерационной эквивалентностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. $\mathbb{A}$-нумерацию ν назовем разрешимой, если $\eta_\nu \cap (\delta\nu)^2$ и $(\delta\nu)^2 \setminus \eta_\nu$ — Σ-предикаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. $\mathbb{A}$-нумерацию ν множества S назовем однозначной, если $|\nu^{-1}(s)| = 1$ для любого $s \in S$.

Известно, что в теории нумераций любая разрешимая нумерация бесконечного множества эквивалентна некоторой однозначной. В общем случае для допустимых множеств это утверждение не имеет места. Таким образом, более естественным является изучение разрешимых $\mathbb{A}$-нумераций, нежели однозначных. Напомним теорему Фридберга [3, с. 148].

ТЕОРЕМА 2. *Существует однозначная вычислимая нумерация семейства всех рекурсивно перечислимых множеств.*

Ниже доказывается аналог этой теоремы для наследственно конечных надстроек над моделями специального класса.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathcal{M} \models T$ — модель простой теории T конечной сигнатуры. Тогда существует разрешимая вычислимая* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$*-нумерация семейства* $\Sigma(\mathbf{HF}(\mathcal{M}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде, чем перейти непосредственно к доказательству, приведем несколько результатов автора, используемых в доказательстве.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [2]. *Для модели $\mathcal{M}$ конечной сигнатуры σ следующие условия эквивалентны:*

а) *модель $\mathcal{M}$ локально конструктивизируема;*

б) *произвольное чистое $\Sigma_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$-подмножество является Σ-подмножеством* $\mathbf{HF}(\emptyset)$.

Пусть T_ω — Δ-предикат, для которого выполняется соотношение:

$$(a, \delta^{-1}\epsilon(æ), g) \in T_\omega \Leftrightarrow (a = t_{æ}^{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}(g_1, \ldots, g_{n_{æ}})),$$

где δ и ϵ являются определимыми нумерациями термов $t_{æ}$ и $\mathbf{HF}(\omega)$ соответственно (при этом, нумерация термов является однозначной и отождествляется с нумерацией некоторого подмножества $HF(\omega)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть f и g — две конечные функции, определенные на начальных сегментах натуральных чисел. Определим операцию *конкатенации* $\mathrm{concat}(f, g)$ следующим образом:

$$\mathrm{concat}(f,g)(n) \rightleftharpoons \begin{cases} f(n), & \text{если } n \in \delta f; \\ g(k), & \text{если } n = \delta f + k, k \in \delta g; \\ \text{не определена}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используя метод Σ-рекурсии, легко установить, что эта операция Σ-определима. Будем использовать следующие обозначения:

- если $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1} \in \mathbf{M}$, то $\widehat{s} \rightleftharpoons \{\langle i, s_i\rangle | i < m\}$;

- если g — конечная функция с областью определения δg, не содержащей 0, то $\tau(g) \rightleftharpoons \{\langle i-1, g(i)\rangle | i \in \delta g\}$ (нетрудно убедиться в том, что операция τ Σ-определима).

ТЕОРЕМА 4 [2]. *Пусть* $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$ *— наследственно конечная надстройка произвольной модели* $\mathcal{M} = \langle M, \sigma\rangle$. *Тогда подмножество* $A \subseteq \mathbf{HF}(\mathbf{M})$ *определимо некоторой* Σ*-формулой* $\Phi(x_0, u_0, \ldots, u_{m-1})$ *с параметрами* $s_0, \ldots, s_{m-1} \in M$ *в том и только в том случае, когда существует вычислимая последовательность* A_n^Φ *гёделевых номеров* $\exists$*-формул сигнатуры* σ *такая, что* $A = \{a | \exists n \exists g (T_\omega(a, n, g) \wedge \exists m((m \in A_n^\Phi) \wedge \wedge (\mathcal{M} \models \varphi_m[\gamma_{\mathrm{concat}(\tau(g), \widehat{s})}])))\}$. *При этом существует эффективная процедура перехода от* Σ*-формулы (вычислимой последовательности) к некоторой вычислимой последовательности (*Σ*-формуле).*

Теорема 5 является своеобразной характеризацией простых теорий в терминах наследственно конечных надстроек над моделями таких теорий.

ТЕОРЕМА 5 [2]. *Пусть T — полная ω-категоричная теория. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *теория T — разрешима и для произвольной модели $\mathcal{M} \models T$, произвольного вычислительного семейства всех типов $\{p_n | n \in \omega\}$ теории T предикат*

$$\{\langle n, a\rangle | a \in M^k \text{ реализует тип } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

$\Sigma_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$*-определим;*

2) *для некоторой модели $\mathcal{M} \models T$ и некоторого вычислимого семейства всех типов $\{p_n | n \in \omega\}$ теории T предикат*

$$\{\langle n, a\rangle | a \in M^k \text{ реализует тип } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

$\Sigma_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$*-определим;*

3) *теория T разрешима и для произвольного вычислимого семейства всех типов $\{p_n | n \in \omega\}$ теории T и произвольной модели $\mathcal{M} \models T$ предикат*

$$\eta_{\mathcal{M}} \rightleftharpoons \{\langle n, m, x\rangle | \exists a \in M^n æ((x = t_{æ}(a)) \wedge \wedge(\mathcal{M} \models p_n(a))) \text{ для } æ = \epsilon^{-1}\delta(m)\}$$

$\Sigma_{\mathbf{HF}(\mathcal{M})}$*-определим;*

4) *существует обогащение σ' сигнатуры σ конечным числом констант $c_0, \ldots, c_{n-1}$ и полная формула $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$ такие, что $T'(\rightleftharpoons Th(T \cup \{\varphi_0(c_0, \ldots, c_{n-1})\}))$ — простая теория.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На самом деле, предикат $\eta_{\mathcal{M}}$ из последней теоремы определяет "кодировку" типов, реализующихся в наследственно конечной надстройке $\mathbf{HF}(\mathcal{M})$, элементами некоторого двуместного Δ-предиката на $\mathbf{N}$. К тому же, используя соотношение

$$\langle n, m, a\rangle \notin \eta_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \forall g \in (n_{æ} + 1) \times sp(a) \neg T_{\omega}(a, m, g) \vee$$
$$\vee \exists g(T_{\omega}(a, m, g) \wedge \forall \pi \in S_m \exists \varphi_0 \in CornFor_{\sigma'}((T' \models (\varphi \leftrightarrow^{lnot} \varphi_0)) \wedge$$
$$\wedge(\mathcal{M}' \models \varphi_0^{\pi}[\gamma_{tau(g)}]))),$$

где $æ = \epsilon^{-1}\delta(m)$, $\mathcal{M}' \models T'$ — обогащение модели $\mathcal{M}$, заключаем, что $\eta_{\mathcal{M}}$ является Δ-предикатом.

Согласно предложению 4, для построения такой $\mathbf{A}$-нумерации достаточно построить разрешимую вычислимую $\mathbf{A}$-нумерацию семейства S Σ подмножеств, имеющих в качестве элементов только элементы с непустыми носителями ($sp(a) \neq \varnothing$). Действительно, пусть ν_0 — нумерация Фридберга и ν_1 — разрешимая вычислимая $\mathbf{A}$-нумерация семейства S. Тогда $\mathbf{A}$-нумерация $\nu(\langle n, x\rangle) \rightleftharpoons \gamma(\nu_0(n)) \cup \nu_1(x)$ искомая, где γ — Σ-определимая биекция между $\mathbf{N}$ и $\mathbf{HF}(\varnothing)$.

Зафиксируем некоторые гёделевы нумерации формул $\{\Phi_n | n \in R_0\}$ и $\{\varphi_n | n \in R_1\}$ сигнатур σ и σ^* для некоторых рекурсивных множеств R_0 и R_1 таких, что $R_0 \supseteq R_1$ и $\Phi_n = \varphi_n$, если $n \in R_0$. Введем в рассмотрение однозначное вычислимое семейство всех типов $\{p_n | n \in \omega \setminus \{0\}\}$ теории T, для которого выполнено следующее соотношение: $n \leq m \to FV(p_n) \subseteq FV(p_m)$. В соответствии с теоремами 5 и 4, определим вычислимую последовательность $A_{\langle n,k\rangle,m}$ по Σ-формуле

$$
\begin{aligned}
&(Tr_{\Sigma}(n, concat(\langle 0, a\rangle, \widehat{s})) \wedge (\langle \widehat{s}(0), \ldots, \widehat{s}(\delta\widehat{s} - 1)\rangle \\
&\qquad \text{реализует в } \mathcal{M} \text{ тип } p_k) \wedge (sp(a) \neq \varnothing)) \vee \\
&\vee((k = 0) \wedge Tr_{\Sigma}(n, \langle 0, a\rangle) \wedge Tr_{\Sigma}(n, \langle o, a\rangle) \wedge (sp(a) \neq \varnothing)). \qquad (1)
\end{aligned}
$$

В нашей конструкции будут участвовать только такие пары $\langle n, k\rangle$, для которых выполнены следующие условия:

1) p_k содержит наименьший с точностью до перестановки переменных номер полной $\exists$-формулы или $k = 0$ (что соответствует тому, что формула Φ_n без параметров);

2) последовательность $A_{\langle n,k\rangle,m}$ определяет непустое Σ-подмножество.

Эти два условия перечислимы, поэтому множество пар $\langle n, k\rangle$ с такими свойствами перечислимо, что позволяет в дальнейшем предполагать выполнимость условий 1 и 2 (видно, что сужение предиката, определяемое формулой (1), на множество пар, удовлетворяющих указанным условиям, является универсальным предикатом). Пусть $f(\langle n, k\rangle, m, i)$ — перечисление элементов $A_{\langle n,k\rangle,m}$ и $M : For_\sigma \to For_\sigma$ — оператор, который каждой формуле φ ставит в соответствие $\exists$-формулу с наименьшим номером, T-эквивалентную φ (нетрудно убедиться в том, что этому оператору соответствует частичная вычислимая функция). Операция $(\varphi, \pi) \mapsto \varphi^\pi$, которая паре, состоящей из формулы и перестановки, ставит в соответствие формулу, у которой переменные переставлены в соответствии с перестановкой, также вычислима. Обозначим через S_m множество всех перестановок, оставляющих на месте $\delta(m)$. Эта последовательность сильно вычислима. По перечислению f построим вспомогательное перечисление g другой последовательности, определяющей то же множество, следующим образом:

$$\varphi_{g(\langle n,k\rangle,m,0)} = M\Big(\bigvee_{\pi\in S_m}\varphi^{\pi}_{f(\langle n,k\rangle,m,0)}\Big),$$
$$\varphi_{g(\langle n,k\rangle,m,i+1)} = M\Big(\varphi_{g(\langle n,k\rangle,m,i)}\vee\bigvee_{\pi\in S_m}\varphi^{\pi}_{f(\langle n,k\rangle,m,i)}\Big).$$

Данное перечисление обладает следующими свойствами:

а) последовательности $A_{\langle n_1,k_1\rangle,m}$ и $A_{\langle n_2,k_2\rangle,m}$ с параметрами $\langle a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\rangle$ и $\langle a'_0,a'_1,\dots,a'_{n'-1}\rangle$, реализующими в $\mathcal{M}$ типы p_{k_1} и p_{k_2} соответственно определяют одно и то же множество тогда и только тогда, когда для типа p_k, реализующегося в $\mathcal{M}$ на кортеже $\langle a_0,a_1,\dots,a_{n-1},a'_0,\dots,a'_{n-1}\rangle$ выполнено соотношение

$$p_k(c_0,\dots,c_{n'+n-1})\vdash\big(\varphi_{\lim\limits_{\overrightarrow{i}} g(\langle n_1,k_1\rangle,m,i)}\big)^{x_i,\, i\geq|æ(m)|}_{c_{i-|æ(m)|}}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\big(\varphi_{\lim\limits_{\overrightarrow{i}} g(\langle n_2,k_2\rangle,m,i)}\big)^{x_i,\, i\geq|æ(m)|}_{c_{i+n-|æ(m)|}}$$

для любого m;

б) $T\vdash\varphi_{g(\langle n,k\rangle,m,i)}\to\varphi_{g(\langle n,k\rangle,m,i+1)}$;

в) последовательности $A_{\langle n,k\rangle,m}$ и $\{g(\langle n,k\rangle,m,i)|i\in\omega\}$, рассматриваемые с одними и теми же параметрами, определяют одно и то же множество.

(Здесь и в дальнейшем запись $|æ(m)|$ будет означать мощность носителя $sp(\delta(m))$). Те же рассуждения приводят нас к следующей лемме.

ЛЕММА 4. *Для любой вычислимой последовательности $B_{\langle n,k\rangle,m}$, определяющей некоторое вычислимое семейство Σ-подмножеств с условиями 1 и 2 на пары вида $\langle n,k\rangle$, существует перечисление (возможно, другой) вычислимой последовательности $B'_{\langle n,k\rangle,m}$, обладающее свойствами* "а"–"в".

Сконструируем последовательность $g^t_{\langle n,k\rangle}(m,i)$ конечных функций со следующими свойствами:

г) $\emptyset \neq g^0_{\langle n,k\rangle} \subseteq g^1_{\langle n,k\rangle} \subseteq \ldots \subseteq \cup g^t_{\langle n,k\rangle} = g_{\langle n,k\rangle}$, где $\lim\limits_{\vec{i}} g_{\langle n,k\rangle}(m,i) = \lim\limits_{\vec{i}} g(\langle n,k\rangle, m, i)$, если $\varphi_{\lim\limits_{\vec{i}} g(\langle n,k\rangle,m,i)}$ не тождественно ложна;

д) последовательности

$$B^t_{\langle n,k\rangle,m} \rightleftharpoons \rho(\lambda i. g^t_{\langle n,k\rangle}(m,i)) \cup \cup\{\exists x_0 \urcorner (x_0 = x_0)\}$$

и

$$G^t_{\langle n,k\rangle,m} (\rightleftharpoons \{g^t_{\langle n,k\rangle}(m,i_0) | i_0 = \\ = \max\{i | g^t_{\langle n,k\rangle}(m,i)\downarrow\}\}) \cup \{\exists x_0 \urcorner (x_0 = x_0)\}$$

с одними и теми же параметрами, реализующими тип p_k, определяют одно и то же множество.

В построении будем отождествлять пары вида $\langle n,k\rangle$ с некоторым фиксированным перечислением (которое существует в силу перечислимости множества пар, удовлетворяющих условиям 1 и 2. Полагаем g^{-1}_l пустыми для всех l. Предположим, что для всех $s' \leq s$ функции $g^{r(s')}_{l(s')}$ заданы. Берем произвольное $s = c(l,t) \geq 0$. Будем различать несколько случаев.

Случай 1. Если $t = 0$, то перечисляем график Γ_g функции g_l до тех пор, пока не появится четверка вида $\langle l,m,i,d\rangle$ для некоторого номера d $\exists$-формулы, не являющейся ложной в T. Полагаем $\Gamma_{g^0_l} = \{\langle m,0,d\rangle\}$. Остальные функции не изменяем.

Случай 2. Если $t > 0$, то делаем s шагов в вычислениях функции $g(l,m,i)$ для всех $c(m,i) \leq s$ (будем использовать обозначение $g_s(l,m,i)$). Положим

$$g^t_l(m,i) = \begin{cases} g^{t-1}_l(m,i), \text{ если } g^{t-1}_l(m,i)\downarrow; \\ g(l,m,j), \text{ если } j = \max\{i_0 | g_s(l,m,i_0)\downarrow, \\ \qquad T \not\vdash \varphi_{i_0} \to \exists x_0 \urcorner (x_0 = x_0), (i=0) \vee \\ \qquad \vee T \not\vdash \varphi_{i_0} \to \varphi_{g^{t-1}_l(m,i-1)}\}; \\ \qquad i = \max\{i_0 | g^{t-1}_l(m,i_0)\downarrow\} + 1 (\max\emptyset = -1); \\ \text{не определена, в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функции g_l^t удовлетворяют свойствам "г" и "д". Таким образом, имеет место следующая

ЛЕММА 5. *Если $g(l,m,i)$ — перечисление вычислимой последовательности $A_{l,m}$, определяющей некоторое семейство непустых Σ-подмножеств, имеющих в качестве элементов только элементы с непустыми носителями, удовлетворяющее свойствам "а"–"в", то существует сильно вычислимая последовательность $g_l^t(m,i)$ конечных функций, удовлетворяющая свойствам "г" и "д".*

Через Sp_k будем обозначать множество всех перестановок π, для которых $T \vdash \varphi_{k_t}^{\pi} \leftrightarrow \varphi_{k_t}$, где $\varphi_{k_t}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \in p_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ — полная формула теории T(очевидно, это множество образует подгруппу группы $S(n)$). Такие перестановки будем называть *перестановками, сохраняющими k-й тип параметров*. Будем говорить, что последовательность $D_{s,m}$ ($D_{s,m}^t$) *получена* из последовательности $C_{s,m}$ ($C_{s,m}^t$) *с помощью перестановки* π, если $D_{s,m} = \{j | \varphi_j = M(\varphi_{j_0}^{\pi'}), j_0 \in C_{s,m}\}$ ($D_{s,m}^t = \{j | \varphi_j = = M(\varphi_{j_0}^{\pi'}), j_0 \in C_{s,m}^t\}$) для $\pi' = \mathrm{concat}(\varepsilon_{|\text{æ}(m)|}, \pi)$, где e_X — тождественная на X функция. В этом случае, будем использовать запись: $D_{s,m} = (C_{s,m})^{\pi}$ ($D_{s,m}^t = (C_{s,m}^t)^{\pi}$). Удобным будет принять следующее соглашение: если последовательность $C_{s,m}$ ($C_{s,m}^t$) не имеет параметров, то $D_{s,m}$ ($D_{s,m}^t$) получена с помощью перестановки π только в том случае, когда $\pi = \emptyset$ (а также $S_{p_0} = \emptyset$) и $C_{s,m} = D_{s,m}$ ($C_{s,m}^t = D_{s,m}^t$).

Для произвольной последовательности $C_{(n,k),m}$ ($C_{(n,k),m}^t$) обозначим через $S_k(C_{(n,k),m})(S_k(C_{(n,k),m}^t))$ наибольшую подгруппу S группы Sp_k, для которой выполнено $(C_{(n,k),m})^{\pi} = = C_{(n,k),m}$ ($(C_{(n,k),m}^t)^{\pi} = C_{(n,k),m}^t$) для всех $\pi \in S$, m (очевидно, что множество S с таким свойством действительно является подгруппой). Данная подгруппа обладает следующими свойствами.

ЛЕММА 6.

i) *Пусть $S \leq Sp_k$ — произвольная подгруппа группы Sp_k. Тогда существует вычислимая последовательность $C_{(n,k),m}(C_{(n,k),m}^t)$ такая, что $S_k(C_{(n,k),m}) = S$ ($S_k(C_{(n,k),m}^t) = S$);*

ii) $Subgr(S_{p_k}) = \{S' | S' \leq S_{p_k}\}$ — *сильно вычислимая последовательность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

i) Рассмотрим множество $a = \{\hat{s} \circ \pi | \pi \in S\}$ для параметров $s_0, s_1, \ldots, s_{l-1}$, реализующих тип p_k в модели $\mathcal{M}$. Тогда вычислимая последовательность, определяющая множество, состоящее из единственного элемента a, удовлетворяет условию.

ii) Напомним, что операция степени $\mathcal{P}(x)$ Σ-определима в наследственно конечной надстройке. Тогда $S' \leq S_{p_k} \Leftrightarrow (S' \in \in Subgr(S_{p_k}) = \{S \in \mathcal{P}(S_{p_k}) | (S \neq \emptyset) \wedge \forall \pi_0 \in S \forall \pi_1 \in \in S((\pi_0 \circ \pi_1 \in S) \wedge ((\pi_0)^{-1} \in S))\})$, что и требовалось доказать. ■

Приведем следующий несложный теоретико-модельный результат.

ЛЕММА 7. *Пусть $\mathcal{A} \models T$ — модель полной ω-категоричной теории T и φ_l, φ_m — полные формулы теории T. Тогда для несущественных обогащений $(\mathcal{A}, b_0, \ldots, b_{n-1}) \models T \cup \{\varphi_l(c_0, \ldots, c_{n-1})\}$ $(c_i \notin \sigma(T)$, $i = 0, \ldots, n-1)$, $(\mathcal{A}, d_0, \ldots, d_{k-1}) \models T \cup \{\varphi_m(c'_0, \ldots \ldots, c'_{k-1})\}$, $(c'_i \notin \sigma(T)$, $i = 0, \ldots, k-1)$ следующие условия эквивалентны:*

i) *любое множество, определимое в $(\mathcal{A}, b_0, \ldots, b_{n-1})$, определимо и в $(\mathcal{A}, d_0, \ldots, d_{k-1})$;*

ii) *существуют частичные функции $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$, определимые в $\mathcal{A}$, для которых $b_i = f_i(d_0, \ldots, d_{k-1})$, $i = 0, \ldots, n-1$.*

Для каждого конечного множества $B \subseteq |\mathcal{A}|$ определим множество $B' \rightleftharpoons \{b | \langle \mathcal{A}, a \rangle_{a \in B} \models \exists! x_0 \varphi(x_0) \wedge \varphi(b), \varphi \in L(c_a, a \in B)\}$, где $L(c_a, a \in B)$ — расширение языка модели $\mathcal{A}$ константами для элементов множества B. В этом случае, множество B' назовем *замыканием* множества B. Согласно теореме Рыль–Нардзевского и предыдущей лемме, выполнена следующая

ЛЕММА 8. *Пусть $\mathcal{A} \models T$ — модель полной ω-категоричной теории T. Тогда для любого конечного множества $B \subseteq |\mathcal{A}|$ выполнены следующие условия:*

i) *B' конечно;*

ii) $(B')' = B'$;

iii) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow B'_1 \subseteq B'_2$.

Множество B назовем *замкнутым*, если $B = B'$.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть C — конечное множество. Тип $p_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ назовем *типом множества* C, если $\bigwedge\limits_{i<j<n} \neg(x_i = x_j) \in p_k$ и тип p_k содержит полную $\exists$-формулу $\varphi_l(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ с наименьшим номером, для которой $\mathcal{M} \models \varphi_l(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})[\gamma]$ при некотором взаимно однозначном означивании $\gamma : \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \to\to C$. Тип p_k назовем *замкнутым*, если p_k является типом замкнутого множества. По типу p_k произвольного множества B можно эффективно найти тип $p_{k'}$ замыкания B' множества B. Следующее утверждение позволяет свести все дальнейшие рассуждения к рассмотрению только замкнутых типов.

ЛЕММА 9. *Пусть B_0 и B_1 — замкнутые множества. Тогда выполнены следующие условия:*

а) семейства множеств, определимых в $\langle \mathcal{M}, c\rangle_{c\in B_0}$ и $\langle \mathcal{M}, d\rangle_{d\in B_1}$, совпадают в том и только в том случае, когда $B_0 = B_1$;

б) семейство множеств, определимых в $\langle \mathcal{M}, c\rangle_{c\in B_0}$, является подсемейством семейства множеств, определимых в $\langle \mathcal{M}, d\rangle_{d\in B_1}$, в том и только в том случае, когда $B_0 \subseteq B_1$.

Обозначим через Z_k семейство множеств, состоящих из всех конечных функций z с областью определения $\delta z \subseteq \mathbf{N}$ и областью значений $\rho z \subseteq Subgr(S_{p_k})$, для которых выполнено следующее соотношение: $\forall\langle m, S\rangle \in z \forall\langle m', S'\rangle \in z(((S = S') \to (m = m')) \wedge ((S \nleq S') \wedge (S' \nleq S) \vee (S = S')))$. Из определения Z_k видно, что $\{\langle z, k\rangle | z \in Z_k\}$ является Δ-предикатом.

Определим семейство W_k множеств всех разнозначных конечных функций w с областью определения $\delta w \subseteq \mathbf{N}$ и областью значений $\rho w \subseteq \mathcal{P}(A_k)$, удовлетворяющей условию $\bigcup \rho w = A_k$, где A_k — множество всех типов $q(x_0, x_1, \ldots, x_{m+n-1})$, $n \leq m$, расширяющих тип $p_k(x_0, \ldots, x_{m-1})$, для которых $q'(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \rightleftharpoons \rightleftharpoons \{(\exists \bar{y} \varphi(\bar{y}, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}))^{x_j, j \geq m}_{x_{j-m}} | \varphi \in q\}$ — замкнутый тип с номером, меньшим k, или $q' = T$. Аналогично, $\{\langle w, k\rangle | w \in W_k\}$ Δ-определим.

Будем использовать обозначение H_k для семейства множеств, содержащих все конечные функции h с областью определения

$\delta h \subseteq \mathbf{N}$ и областью значений $\rho h \subseteq \mathcal{P}(D_k)$ для $D_k = \{q(x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_{2n-1}) | p_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \cup p_k(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})^{x_i, i<n}_{x_{i+n}} \subseteq$ $\subseteq q, (((\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \quad a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1}\rangle$ реализует $q) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\} \neq \{a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1}\})))\}$, для которых выполнено условие $((m_1 \neq m_2) \to (h(m_1) \cap h(m_2) = \emptyset))$. Так же, как и предыдущие семейства, данное семейство Δ-определимо, т.е. $\{\langle h, k\rangle | h \in H_k\}$ Δ-определим.

ЛЕММА 10. *Существует вычислимая последовательность $B_{\langle n',k\rangle,m}$, определяющая семейство всех непустых Σ-подмножеств, состоящих из элементов с непустыми носителями, для которой выполнены следующие условия:*

i) *существует вычислимая функция $f_\eta(\langle n', k\rangle) = S_k(B_{\langle n',k\rangle,m})$;*

ii) *для каждого Σ-подмножества A существует единственное k такое, что некоторая последовательность $B_{\langle n'_0,k\rangle,m}$ с фиксированным набором параметров $A_0 = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, реализующим тип p_k, определяет Σ-подмножество A;*

iii) *существует вычислимая функция $g_\eta(\langle n', k\rangle)$, для которой $q \in g_\eta(\langle n', k\rangle)$ в том и только в том случае, когда $q' = p_k$ и $B_{\langle n',k\rangle,m}$, рассматриваемая с параметрами $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ и $\langle a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1}\rangle$ такими, что $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\} \neq \{a'_0, a'_1, \ldots$ $\ldots, a'_{n-1}\}$ и $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n-1}\rangle$ реализует тип q, определяет одно и то же множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g^t_{\langle n,k\rangle}(m, i)$ — семейство конечных функций, удовлетворяющее условию леммы 5, построенное по перечислению некоторой вычислимой последовательности, определяющей предикат, универсальный для всех непустых Σ-подмножеств, состоящих из элементов с непустыми носителями, а k пробегает только номера замкнутых типов. Опишем конструкцию построения вспомогательной функции $\mu_{\langle n,k\rangle}(z, w, h, m, i)$, для которой будут выполнены следующие условия:

1) для любых n, k, $z \in Z_k$, $w \in W_k$ и $h \in H_k$ выполнимость условия $\forall m_0 \in \delta z(\rho(\lambda i.\mu_{\langle n,k\rangle}(z, w, h, m_0, i)) \neq \emptyset)$ влечет за собой следующие соотношения:

$$S_k(\rho(\lambda i.\mu_{\langle n,k\rangle}(z, w, h, m, i)) \cup \{\exists x_0 \neg(x_0 = x_0)\}) = \cap \rho z,$$
$$\forall m_0 \in \delta z\, S_k(\rho(\lambda i.\mu_{\langle n,k\rangle}(z, w, h, m_0, i))) = z(m_0);$$

2) для каждой пары $\langle n,k\rangle$ (k — номер замкнутого типа) существуют $z_0 \in Z_k$, $h_0 \in H_k$ и $w_0 \in W_k$ такие, что вычислимые последовательности $\rho\lambda i.f(\langle n,k\rangle,m,i)$ и $\{\exists x_0\urcorner(x_0 = x_0)\} \cup \cup\rho(\lambda i.\mu_{\langle n,k\rangle}(z_0,w_0,h_0,m,i))$, рассматриваемые с одними и теми же параметрами, реализующими тип k, определяют одно и то же множество, если данное множество не определимо формулой без параметров или с параметрами, реализующими замкнутый тип с номером, меньшим k;

3) для любых $n,k,z \in Z_k$, $w \in W_k$, $h \in H_k$, $m_0 \in \delta w$ и $i < \omega$ формула $\varphi_{\mu_{\langle n,k\rangle}(z,w,h,m_0,i)}(x_0,\ldots,x_{|\text{æ}(m_0)|-1},\bar{c})$ не эквивалентна относительно $q(c,\bar{c}')$ формуле $\varphi_{\mu_{\langle n,k\rangle}(z,w,h,m_0,i)}(x_0,\ldots$ $\ldots,x_{|\text{æ}(m_0)|-1},\bar{c}')$, совместной с типом $q'(\bar{c}')$ для $q \in h(m_0)$ (тип q' определен выше (см. определение W_k на с. 167); если $h(m_0)$ не определено, полагаем $h(m_0) = \varnothing$);

4) для любых $n,k,z \in Z_k$, $w \in W_k$, $h \in H_k$, $m_0 \in \delta w$ и $i < \omega$ формула $\varphi_{\mu_{\langle n,k\rangle}(z,w,h,m_0,i)}(x_0,\ldots,x_{|\text{æ}(m_0)|-1},\bar{c})$ не эквивалентна относительно $q(\bar{c},\bar{c}')$ никакой формуле, совместной с типом $q'(\bar{c}')$ для $q \in w(m_0)$ (тип q' определен выше (см. определение W_k); если $w(m_0)$ не определено, полагаем $w(m_0) = \varnothing$);

5) для любых $n,k,z \in Z_k$, $w \in W_k$, $h \in H_k$ и $r \in \in D_k \setminus (\cup\rho h)$ последовательность $\lambda i.\mu_{\langle n,k\rangle}(z,w,h,m,i)$, рассматриваемая с параметрами $\langle a_0,a_1,\ldots,a_{n_k-1}\rangle$ и $\langle a'_0,a'_1,\ldots,a'_{n_k-1}\rangle$ такими, что $\langle a_0,a_1,\ldots,a_{n_k-1},a'_0,a'_1,\ldots,a'_{n_k-1}\rangle$ реализует тип r, определяет одно и то же множество.

Будем строить конечные функции $\mu^t_{\langle n,k\rangle,z,w,h}(m,i)$ так, что $\mu^0_{\langle n,k\rangle,z,w,h} \subseteq \mu^1_{\langle n,k\rangle,z,w,h} \subseteq \mu^2_{\langle n,k\rangle,z,w,h} \subseteq \cdots \subseteq \cup\mu^t_{\langle n,k\rangle,z,w,h} = = \lambda m,i.\mu_{\langle n,k\rangle}(z,w,h,m,i)$. В построении под кортежем $\langle\langle n,k\rangle,z,w,h\rangle$ будем подразумевать номер в некотором фиксированном перечислении без повторений.

На каждом шаге вида $c(t,l)$ мы будем добавлять элементы только в график функции μ_l. Полагаем $\mu^{-1}_{\langle n,k\rangle,z,w,h} = \varnothing$ для всех $\langle\langle n,k\rangle,z,w,h\rangle$. Предположим, что функции $\mu^{t'}_{\langle n',k'\rangle,z',w'}$ заданы для $c(t',\langle\langle n',k'\rangle,z',w',h'\rangle) < c(t,\langle\langle n,k\rangle,z,w,h\rangle)$. Перейдем к определению $\mu^t_{\langle n,k\rangle,z,w,h}$. Возьмем наименьшую тройку

$\langle m_1, i_1, g_1\rangle \in \Gamma_{g_{(n,k)}}$, которую не рассматривали на предыдущих шагах, на которых строилась функция $\lambda m, i.\mu_{(n,k)}(z, w, h, m, i))$. Будем различать несколько случаев.

Случай 1. $\lambda i.\mu^{t-1}_{(n,k),s,w,h}(m_1, i)) = \emptyset$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий:

А) $m_1 \in \delta z$ и $z(m_1) \neq \{\pi \in S_{p_k} | T \vdash \varphi^{\pi'}_{g_1} \leftrightarrow \varphi_{g_1}, \pi' = \mathrm{concat}(e_{|æ(m_1)|}, \pi)\}$;

Б) $m_1 \notin \delta z$ и $\cap \rho z \not\subseteq \{\pi \in S_{p_k} | T \vdash \varphi^{\pi'}_{g_1} \leftrightarrow \varphi_{g_1}, \pi' = \mathrm{concat}(e_{|æ(m_1)|}, \pi)\}$;

В) существует формула, принадлежащая типу $q'(c'_0, c'_1, \ldots, c'_{n_2-1})$, эквивалентная в теории $q(c_0, c_1, \ldots, c_{n_1-1}, c'_0, c'_1, \ldots, c'_{n_2-1})$ формуле $\varphi_{g_1}(x_0, x_1, \ldots, x_{|æ(m_1)|-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{n_1-1})$ для $q \in w(m_1)$;

Г) $m_1 \in \delta h$ и существует тип $q \in h(m_1)$, для которого

$$q(c_0, c_1, \ldots, c_{n_k-1}, c'_0, c'_1, \ldots, c'_{n_k-1}) \vdash \varphi_{g_1}(x_0, x_1, \ldots, x_{|æ(m_1)|-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{n_k-1}) \leftrightarrow \varphi_{g_1}(x_0, x_1, \ldots, x_{|æ(m_1)|-1}, c'_0, c'_1, \ldots, c'_{n_k-1});$$

Д) существует тип $q \in D_k \setminus (\cup \rho h)$, для которого

$$q(c_0, c_1, \ldots, c_{n_k-1}, c'_0, c'_1, \ldots, c'_{n_k-1}) \nvdash \varphi_{g_1}(x_0, x_1, \ldots, x_{|æ(m_1)|-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{n_k-1}) \leftrightarrow \varphi_{g_1}(x_0, x_1, \ldots, x_{|æ(m_1)|-1}, c'_0, c'_1, \ldots, c'_{n_k-1});$$

В этом случае ничего не делаем, т.е. для всех l полагаем $\mu^t_l = \mu^{t-1}_l$.

Случай 2. $\lambda i.\mu^{t-1}_{(n,k),s,w,h}(m_1, i)) \neq \emptyset$ и выполнено хотя бы одно из условий А–Д случая 1. Тогда положим $\mu^t_{(n,k),s,w}(m, i_0) \rightleftharpoons \mu^{t-1}_{(n,k),s,w}(m, i_0 - 1)$ и

$$\Gamma_{\mu^t_{(n,k),s,w}} \rightleftharpoons \Gamma_{\mu^{t-1}_{(n,k),s,w}} \cup \{\langle m, i_0, \mu^t_{(n,k),s,w}(m, i_0)\rangle\}$$

для $i_0 = 1 + \max\{i | \mu^{t-1}_{(n,k),s,w}(m, i)\downarrow\}$.

Случай 3. Ни случай 1, ни случай 2 не имеют места. Полагаем $\mu^t_{(n,k),s,w,h}(m, i_0) = g_1$ и

$$\Gamma_{\mu^t_{\langle n,k\rangle,s,w,h}} \rightleftharpoons \Gamma_{\mu^{t-1}_{\langle n,k\rangle,s,w,h}} \cup \{\langle m, i_0, g_1\rangle\}$$

для $i_0 = 1 + \max\{i|\mu^{t-1}_{\langle n,k\rangle,s,w,h}(m,i)\downarrow\}$.

Таким образом, процесс построения семейства функций $\mu_{\langle n,k\rangle}$ описан. Из построения видно, что эта функция действительно обладает свойствами 1–5. Теперь заметим, что условие

$$A(z,w,h,n,k) = \forall m_0 \in \delta z \cup \delta w \cup \delta h(\rho(\lambda i.\mu_{\langle n,k\rangle}(z,w,h,m_0,i)) \neq \emptyset)$$

перечислимо. Заключаем отсюда, что вычислимая последовательность $\{B_{\langle\langle n,s,w,h\rangle,k\rangle,m}(= \lambda i.\mu_{\langle n,k\rangle}(z,w,h,m,i))|A(z,w,h,n,k)\}$ удовлетворяет условию леммы с функциями $f_\eta(\langle\langle n,z,w,h\rangle,k\rangle) = \cap\rho z$ и $g_\eta(\langle\langle n,z,w,h\rangle,k\rangle) = D_k \setminus (\cup\rho h)$. ■

ЛЕММА 11. *Существует сильно вычислимая последовательность* $\lambda m,i.v^t_{\langle\langle n,s,w,h\rangle,k\rangle}(m,i)$ *конечных функций, для которой выполнены следующие условия:*

а) $\emptyset \neq v^0_{\langle\langle n,s,w,h\rangle,k\rangle} \subseteq v^1_{\langle\langle n,s,w,h\rangle,k\rangle} \subseteq \dots \subseteq \cup v^t_{\langle\langle n,s,w,h\rangle,k\rangle} = v_{\langle\langle n,s,w,h\rangle,k\rangle}$, *где* $\lim\limits_{\overrightarrow{i}} v_{\langle\langle n,s,w,h\rangle,k\rangle}(m,i) = \lim\limits_{\overrightarrow{i}} \mu_{\langle n,k\rangle,s,w,h}(m,i)$,

где μ *– функция из доказательства предыдущей леммы 10;*

б) *для любого* $t \geq 0$ *последовательности* $B^t_{\langle n',k\rangle,m} \rightleftharpoons (\lambda i.v^t_{\langle n',k\rangle}(m,i)) \cup \{\exists x_0{}^\neg(x_0 = x_0)\}$ *и* $G^t_{\langle n',k\rangle,m}(\rightleftharpoons \{v^t_{\langle n',k\rangle}(m,i_0)|i_0 = \max\{i|v^t_{\langle n',k\rangle}(m,i)\downarrow\}\}) \cup \{\exists x_0{}^\neg(x_0 = x_0)\}$ *с одними и теми же параметрами, реализующими тип* p_k, *определяют одно и то же множество, причем для последовательности* $B^t_{\langle n',k\rangle,m}$ *существует пара вида* $\langle n'',k\rangle$ *такая, что последовательность* $B_{\langle n'',k\rangle,m}$ *из леммы 10 определяет то же множество, что и* $B^t_{\langle n',k\rangle,m}$;

в) *для любых* $m_0 \in \delta w \cup \delta z \cup \delta h$ $(\lambda i.v^0_{\langle\langle n,s,w,h\rangle,k\rangle}(m_0,i) \neq \emptyset)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство леммы 5 с естественной модификацией на шагах $c(0,l)$. ■

Перейдем к построению искомой вычислимой последовательности. Мы будем использовать в доказательстве конструкцию теоремы 3 [3, гл.IV,§ 7] с некоторой модификацией. Для кодирования будем применять пары вида $\langle n, k\rangle$, где k — номер замкнутого типа или $k = 0$.

В данной конструкции в качестве "приближений" последовательности $B_{l,m}$ из леммы 10 будет использоваться определенное в предыдущей лемме семейство $G^t_{l,m}$. На каждом шаге мы будем строить функции $h(\langle n, k\rangle, m, i)$, $f_\eta(\langle n, k\rangle)$ и $g_\eta(\langle n, k\rangle)$ так, что $H_{\langle n,k\rangle,m} = \rho(\lambda i.h(\langle n, k\rangle, m, i)) \cup \{\exists x_0 \neg(x_0 = x_0)\}$ — вычислимая последовательность, определяющая предикат R, универсальный для семейства $S\backslash\{\emptyset$, а $\gamma(f_\eta(\langle n, k\rangle)) = S_k(H_{\langle n,k\rangle,m})$; функция же $g_\eta((\langle n, k\rangle)$ для последовательности $H_{\langle n,k\rangle,m}$ имеет тот же смысл, что и функция $g(\langle n', k\rangle)$ для функции $B_{\langle n',k\rangle,m}$ из леммы 10. Также будет строиться вспомогательная функция $f(l, t)$. Данная функция имеет тот же смысл в нашей конструкции, что и соответствующая функция в доказательстве теоремы 3 [3, с.148]. Если $f(l, t)$ определено и $f(l, t) = x(= \langle n_0, k_0\rangle)$, то будем говорить, что пара x · *последователь* числа l в момент t. Если $x = f(l, t-1)$, а $f(l, t)$ не определено, то будем говорить, что x *освобождается* от l в момент t. Соотношение $\langle n_0, k_0\rangle = x = f(l, t)$ содержательно означает, что в момент t мы "хотим" далее так строить функцию $h(x, m, i)$, чтобы последовательности $H_{x,m}$ и $B_{l,m}$ определяли одно и то же множество. Только "некоторые" препятствия могут нас заставить в дальнейшем отказаться от этого намерения и в некоторый момент освободить x от l. Пары, не являющиеся в момент t последователями, будем называть *свободными* в момент t. Наконец, будем говорить, что в момент t *обозревается* номер $l_t = \mathrm{l}(t)$, где $\mathrm{l}(t)$ — левая обратная к стандартной канторовской нумерации пар. Из свойств этой функции следует, что каждый номер $l = l_t$ обозревается в бесконечное число моментов t.

Процесс построения функций h^t, f^t_η, g^t_η и f таков, что эти функции будут удовлетворять следующим требованиям.

1) В каждый момент t произвольная пара x может быть последователем не более одного числа l. Если пара x в момент t освобождается, то в момент t и во все следующие моменты x остается свободным.

2) Для каждой пары x имеем $h^0_x \subseteq h^1_x \subseteq h^2_x \subseteq \ldots$, где $h^t_x \rightleftharpoons \lambda m, i.h^t(x, m, i)$ — конечная функция, построенная на шаге t.

Если ранее момента t пара x была свободна все время, то $h_x^{t-1} = \emptyset$.

3) Если для некоторых x, t $x = f(l_t, t)$, то для любого m выполнено $\rho(\lambda i.h_x^{t-1}(m,i)) \subseteq \rho(\lambda i.v_{l_t}^t(m,i))$.

4) В каждый момент t из $h_x^t \neq \emptyset$, $x \neq y$ следует, что каковы бы ни были наборы параметров соответствующих типов, вычислимые последовательности $\rho h_{x,m}^t \cup \{\exists x_0 \neg(x_0 = x_0)\}$ и $\rho h_{y,m}^t \cup \{\exists x_0 \neg(x_0 = x_0)\}$ определяют различные подмножества.

5) $\emptyset = g_\eta^{-1} \subseteq g_\eta^0 \subseteq g_\eta^1 \subseteq \ldots \subseteq \cup g_\eta^t = g_\eta$. Кроме того, вычислимая последовательность $H_{x,m}^t(x = \langle n', k\rangle)$, рассматриваемая с параметрами $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n_k} - 1\rangle$ и $\langle a_0', a_1', \ldots, a'_{n_k} - 1\rangle$, реализующими тип p_k, для которых $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n_k - 1}, a_0', a_1', \ldots, a'_{n_k} - 1\rangle$ реализует тип $p_{k'}$ для $k' \in \gamma(g_\eta^t(x))$, определяют одно и то же множество.

6) Если $l = \langle n, k\rangle$, то последователем l может быть только пара вида $\langle n', k\rangle$ для некоторого n'.

7) $\emptyset = f_\eta^{-1} \subseteq f_\eta^0 \subseteq f_\eta^1 \subseteq \ldots \subseteq \cup f_\eta^t = f_\eta$. К тому же, для вычислимой последовательности $H_{x,m}^t = \{h_x^t(m, i_0) | i_0 = \max\{i | h_x^t(m,i) \downarrow\}\} \cup \{\exists x_0 \neg(x_0 = x_0)\}$ выполнено следующее: $H_{x,m}^t = (H_{x,m}^t)^\pi$ для $\pi \in \gamma(f_\eta^t(x))$.

По определению полагаем функции h_x^{-1}, f_η^{-1} пустыми, а значения $f(l, -1)$ неопределенными, $l \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}^2$.

Берем произвольное $t \geq 0$ и предполагаем, что h_x^u, f_η^u и $f(l, u)$ для всех $u < t$ и всех l, x определены и удовлетворяют требованиям 1–6. Перейдем к определению h_x^t, $f(l,t)$ и f_η^t. Будем различать несколько случаев.

Случай 1. $f(l_t, t-1) = y (= \langle n_0, k_0\rangle)$ и для некоторого $l < l_t$ $(r(l) = r(l_t) = k_0)$ и некоторых наборов параметров последовательности $G_{l,m}^t$ и $G_{l_t,m}^t$, $m < c(n_0, k_0)$, определяют одно и то же множество. Это условие эффективно проверяется (см. лемму 4). Освобождаем y, полагая $f(l_t, t)$ неопределенным, и полагаем $f(l', t) = f(l', t-1)$, $l' \neq l_t$, $h_x^t = h_{x-1}^t$, $f_\eta^t = f_\eta^{t-1}$.

Случай 2. Случай 1 места не имеет и существует пара $x = \langle n_0, k_0\rangle$, для которой последовательности $G^t_{l_t,m}$ и $H^{t-1}_{x,m}$ для некоторых наборов параметров определяют одно и то же множество. К тому же, выполняется одно из следующих условий:

а) $x = f(l, t-1)$ и $l \le l_t$;

б) x в момент $t-1$ свободна и $c(n_0, k_0) \le l_t$;

в) x в момент $t-1$ свободна и ранее момента t пара x *смещена* числом l_t (операция смещения определена ниже (см. случай 3В)). В этом случае ничего не меняем, т.е. полагаем $h^t_x = h^{t-1}_x$, $f^t_\eta = f^{t-1}_\eta$ и $f(l,t) = f(l, t-1)$ для всех x и l.

Случай 3. Ни случай 1, ни случай 2 места не имеют. Тогда выполняем последовательно следующие операции.

А) Если $f(l_t, t-1)$ определено, то полагаем $f(l_t, t) = y = f(l_t, t-1)$. Если же $f(l_t, t-1)$ не определено, то через y обозначим наименьшую из пар вида $\langle n', r(l_t)\rangle$, которая не являлась ни разу последователем до момента t, и полагаем $f(l_t, t) = y$, $f^t_\eta(y) = \gamma^{-1}(f_\eta(l_t))$ $g^t_\eta(y) = \gamma^{-1}(g_\eta(l_t))$.

Б) Полагаем

$$h^t_y(m,i) = \begin{cases} h^{t-1}_y(m,i), \text{ если } h^{t-1}_y(m,i)\downarrow; \\ j, \text{ если } j \in G^t_{l_t,m}, i = \max\{i_0 | h^{t-1}_y(m,i_0)\downarrow\} + 1 \\ \qquad (\max\varnothing = -1). \end{cases}$$

В силу свойств 2 и 3, или $h^{t-1}_y = \varnothing$, или $\rho(\lambda i.h^{t-1}_x(m,i)) \subseteq \rho(\lambda i.v^t_{l_t}(m,i))$. Поэтому после выполнения операции Б и силу свойств функции $v^t_{l_t}$ и определения множества $G^t_{l_t,m}$ последовательности $\rho(\lambda i.h^t_x(m,i)) \cup \{\exists x_0\urcorner(x_0 = x_0)\}$ и $\rho(\lambda i.v^t_{l_t}(m,i)) \cup \{\exists x_0\urcorner(x_0 = x_0)\}$, рассматриваемые с одними и теми же параметрами, определяют одно и то же множество.

В) Если существует пара $x_0 = \langle n_0, k_0\rangle$, для которой последовательности $G^t_{l_t,m}$ и $H^{t-1}_{x_0,m}$ для некоторых наборов параметров определяют одно и то же множество, то возьмем функцию $p(m)$ с наименьшим γ-номером, удовлетворяющую следующим свойствам:

i) $p(m) \in H^{t-1}_{x_0,m}$, если $H^{t-1}_{x_0,m} \ne \varnothing$, и $\varphi_{p(m)} = M(\exists x_0(x_0 = x_0))$, в противном случае;

ii) множество, определяемое последовательностью $\{p(m)\} \cup \cup\{\exists x_0{}^\neg(x_0 = x_0)\}$, содержит только элементы с непустыми носителями и отлично от множеств, определяемых последовательностями $H^t_{y,m} \cup \{\exists x_0{}^\neg(x_0 = x_0)\}$, $H^{t-1}_{x,m} \cup \{\exists x_0{}^\neg(x_0 = x_0)\}$ для всех $x \neq y$.

Определим функцию $h^t_{x_0}$ следующим образом:

$$h^t_{x_0}(m,i) \rightleftharpoons \begin{cases} h^{t-1}_{x_0}(m,i), \text{ если } h^{t-1}_{x_0}(m,i)\downarrow; \\ p(m), \text{ если } i = \max\{i_0 | h^{t-1}_{x_0}(m,i_0)\downarrow\} (\max\varnothing = -1). \end{cases}$$

Согласно свойству 4, пара x_0 с таким свойством единственна.

Выполняя операцию В, мы говорим, что *смещаем* пару x числом l_t в момент t.

Г) Если пара x, смещаемая числом l_t, в момент $t-1$ не свободна, то освобождаем x.

Полагаем $h^{t-1}_s = h^t_s$, $f^t_\eta(z)$, $f(l,t) = f(l,t-1)$ для всех z, l, которые не упоминаются в А–Д.

Из конструкции видно, что функции h^t_x, $f(l,t)$, $f^t_\eta(x)$ удовлетворяют требованиям 1–7. Эти функции обладают также следующими свойствами 8–11. Доказательства этих свойств в точности повторяют доказательства соответствующих свойств теоремы 3 [3, 148].

8) Каждая пара x может смещаться лишь конечное число раз.

9) Если $|\delta(\lambda m, i.h(x,m,i))| = \infty$, то пара x, начиная с некоторого момента t, постоянно является последователем некоторого l и $\lim\limits_{\overrightarrow{i}} h(x,m,i) = \lim\limits_{\overrightarrow{i}} \mu_l(m,i)$.

10) Если $x \neq y$, то каковы бы ни были наборы параметров, последовательности $H_{x,m} \cup \{\exists x_0{}^\neg(x_0 = x_0)\}$ и $H_{y,m} \cup \cup\{\exists x_0{}^\neg(x_0 = x_0)\}$ с этими параметрами определяют различные множества.

11) Для каждого l найдется пара x такая, что $B_{l,m}$ и $H_{x,m} \cup \cup\{\exists x_0{}^\neg(x_0 = x_0)\}$ для некоторых наборов параметров определяют одно и то же множество с теми же параметрами.

Пусть $H'_{x,m} \rightleftharpoons \rho(\lambda i.h(x,m,i)) \cup \{\exists x_0\urcorner(x_0 = x_0)\}$. Тогда

$$\Phi(\langle n,k\rangle, a, x_0) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \exists m \exists g \exists \hat{s}(T_\omega(x_0, m, g) \wedge (a = \{\pi \circ \hat{s} | \pi \in \gamma(f_\eta(\langle n,k\rangle))\})\wedge$$
$$\wedge \exists n_0((n_0 \in H'_{\langle n,k\rangle,m}) \wedge Tr_{\mathfrak{D}}(n_0, concat(g, \hat{s}))) \wedge (\text{тип } p_k$$
$$\text{реализуется в модели } \mathcal{M} \text{ на кортеже } \langle \hat{s}(0), \hat{s}(1), \ldots, \hat{s}(\delta\hat{s} - 1)\rangle$$

определяет разрешимую вычислимую $HF(M)$-нумерацию ν_1 множества $S \setminus \{\emptyset\}$, где

$$\eta_{\nu_1} = \{\langle\langle\langle n,0\rangle,\emptyset\rangle,\langle\langle n,0\rangle,\emptyset\rangle\rangle | \exists m(\rho(\lambda i.h(\langle n,0\rangle,m,i)) \neq \emptyset)\} \cup$$
$$\cup \{\langle\langle\langle n,k\rangle,a\rangle,\langle\langle n,k\rangle,b\rangle\rangle | \exists m(\rho(\lambda i.h(\langle n,0\rangle,m,i)) \neq \emptyset);$$
$$\text{существуют } s_i \in sp(a), s'_i \in sp(b), i < n_k, \text{ такие, что кортеж}$$
$$\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n_k - 1}, s'_0, s'_1, \ldots, s'_{n_k - 1}\rangle$$
$$\text{реализует тип } q \in \gamma(g_\eta(\langle n,k\rangle)) \text{ или } a = b\},$$

а следовательно, существует разрешимая вычислимая $HF(M)$-нумерация семейства $\Sigma(HF(M))$. ■

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Определимость и вычислимость. — Новосибирск, 1996. — 300 с.

2. PUZARENKO V.G. On computability over models of decidable theories// Алгебра и теория моделей, 2. — Новосибирск, 1999. — С. 94–103.

3. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М., 1986. — 368 с.

Поступила в редакцию
30 ноября 1999 года