СТРУКТУРНЫЕ И СЛОЖНОСТНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВЫЧИСЛИМОСТИ
(Вычислительные системы)
1999 год **Выпуск 165**

УДК 510.6

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ИЕРАРХИЙ ФЕЙНЕРА[1]

В.П.Власов[2]

Метод иерархий Фейнера с момента создания в 1967 году [3] привлекал особое внимание специалистов в тех случаях, когда требовалось построить модели — обычно это были булевы алгебры (БА) — с заранее заданными алгоритмическим и алгебраическими свойствами. Например, позитивная, но не конструктивизируемая БА, или конструктивная, но не сильно конструктивизируемая БА и т.д. [1, 4–7].

В этой статье мы сделаем следующий шаг — формализуем и схематизируем, насколько это возможно, конструкцию, изобретенную Фейнером и развитую в дальнейшем Гончаровым, так, чтобы во-первых все известные к настоящему моменту случаи использования и модификации этой конструкции описывались общей схемой.

Во–вторых, в связи с тем, что до сих пор все авторы применяли этот метод иерархий Фейнера только к конкретным проблемам, то не было более–менее общего описания, и мы постараемся восполнить этот пробел.

В–третьих, ясное описание ключевых моментов метода Фейнера позволит осуществлять дальнейшие применения этого метода к новым исследованиям в области алгоритмических проблем

---

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 99-01-00485 и грантом "Вычислимые классы конструктивизаций моделей" по программе "Университеты России" Министерства образования РФ.

[2]e-mail: vlasov@math.nsc.ru

булевых алгебр, и возможно, других алгебраических систем, таких, как например, абелевы группы.

Прежде чем мы сформулируем и докажем обобщающую теорему, сделаем некоторые подготовительные предположения и введем обозначения. Будем по возможности придерживаться обозначений и букв, уже введенных нами [5–7].

Пусть $K(x)$ — произвольная формула слабой теории второго порядка булевых алгебр такая, что для любой БА $\mathcal{B}$ верно

$$\forall a \in \mathcal{B}(\mathcal{B} \models K(a) \Leftrightarrow \mathcal{B}_a \models K(1)) \tag{1}$$

где $K(\mathcal{B}) \lhd \mathcal{B}$, $K(\mathcal{B}) \rightleftharpoons \{x \mid \mathcal{B} \models K(x)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что предикат $R(x)$, задаваемый одноименной формулой слабой теории второго порядка, в конструктивной БА $\langle \mathcal{B}, \nu\rangle$ лежит в Π_n или в Σ_n (или лежит в любом другом множестве какой-либо иерархии), если $\nu^{-1}R(\mathcal{B}) \in \Pi_n$ или $\nu^{-1}R(\mathcal{B}) \in \Sigma_n$ (или $\nu^{-1}R(\mathcal{B})$ лежит в соответствующем множестве выбранной иерархии).

Далее, обозначим

$$K_0(x) \ \rightleftharpoons \ x = 0; \quad K_1(x) \ \rightleftharpoons \ K(x); \tag{2}$$

$$\begin{aligned} K_n(x) \rightleftharpoons K_{n-1}(x) \vee \exists m \in \mathrm{N}\, \exists x_0 \ldots \exists x_m \Big(\big(x = \bigvee_{i=0}^{m} x_i\big) \ \& \\ \& \ \big(\mathop{\&}_{i \neq j} x_i \wedge x_j = 0\big) \ \& \ \big(\mathop{\&}_{i=0}^{m} \forall y \leq x_i \ (K_{n-1}(y) \vee \\ \vee K_{n-1}(\overline{y} \wedge x_i)) \ \& \ \neg K_{n-1}(x_i)\big)\Big), \end{aligned} \tag{3}$$

(не нарушая общности, мы могли бы определить $K_0(x)$ иначе, достаточно лишь, чтобы выполнялось требование $K_0(\mathcal{B}) \lhd \mathcal{B}$ & $K_0(\mathcal{B}) \subset K_1(\mathcal{B})$ — это замечание может потребоваться нам при использовании описываемой схемы для классификации в дальнейшем).

Пусть выполнено:

$$\forall n \in \mathrm{N} \ \big(K_n(\mathcal{B}) \lhd \mathcal{B} \ \& \ K_n(\mathcal{B}) \subset K_{n+1}(\mathcal{B}) \ \& \ K_n(\mathcal{B}) \neq K_{n+1}(\mathcal{B})\big), \tag{4}$$

Пусть $W(x)$ — формула слабой теории второго порядка булевых алгебр такая, что для любого $n \in \mathbf{N}$ для любой БА $\mathcal{B}$ выполняется

$$\forall x\, (\neg W(x) \rightarrow \neg K_n(x)), \quad \text{и} \tag{5}$$

$$\forall a \in \mathcal{B}\, (\mathcal{B} \models W(a) \Leftrightarrow \mathcal{B}_a \models W(1)) \tag{6}$$

Определим теперь для $n \geq 1$:

$$\Psi_n(x) \rightleftharpoons \exists^{\infty} y\, (y \leq x \;\&\; K_n(x) \;\&\; \neg K_{n-1}(x));$$

$$\Phi_n(x) \rightleftharpoons \neg K_n(x) \;\&\; \forall y \leq x\, (W(y) \rightarrow K_n(y));$$

$$\Omega_n \rightleftharpoons \exists x\, (\Psi_n(x) \;\&\; \Phi_n(x)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Допустим теперь, что в некоторой конструктивной БА $\langle \mathcal{B}_0, \nu_0 \rangle$, используя, например, алгоритм Тарского–Куратовского, мы можем установить, что предикат $K(x)$ лежит в Σ_d, для некоторого $d \in \mathbf{N}$, и что $W(x)$ лежит в Σ_{n_1} или Π_{n_1} для некоторого $n_1 \in \mathbf{N}$. Тогда, для $n \geq n_2$, где n_2 такое, что $2n_2 + d - 2 > n_1$, K_n лежит в Σ_{2n+d-2}, Ψ_n и Φ_n — в Π_{2n+d-1}, и Ω_n — в Σ_{2n+d}.

Тогда, исходя из рассуждений, аналогичных предложениям 3 и 4 [7], мы получим

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}_0) = \{n \mid \mathcal{B}_0 \models \Omega_n(n) \;\&\; n \geq n_2\} \sim (d, 2).$$

Используя предложения 5,6 [7] и рассуждая аналогично доказательству предложения 7, мы можем получить следующее предложение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует такая общерекурсивная функция $r : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, что если для произвольной конструктивной БА $\mathcal{B}$ и для произвольного $m \geq 1$*

$$\mathcal{B} \models \Omega_{2m} \Leftrightarrow \exists i\, \forall k\, \neg \exists^{\infty} z_1 \ldots \exists^{\infty} z_{2m-1} \left(\exists^{\infty} z_{2m} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \exists^{\infty} z_{2m+t-1}\, Q z_{2m+t}\right) \Big(r(\langle i, k, z_1, \ldots, z_{2m+t} \rangle) = 1 \Big),$$

где

$$\begin{cases} Q = \forall, & \text{если } d = 2t; \\ Q = \exists^\infty, & \text{если } d = 2t+1; \end{cases}$$

то имеет место $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \not\to (d,2)$.

Сформулируем теперь теорему, обобщающую результаты, указанные во введении.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $K(x)$ *— произвольная формула слабой теории второго порядка БА, удовлетворяющая условиям 1–4 выше. И пусть для произвольных* $m, i, k, z_1, \ldots, z_{2m-1} \in \mathbf{N}$ *найдется конструктивная БА* $\mathcal{B}_{K^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})}$ *и порождающий её конструктивный линейный порядок* $K^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})$ *такие, что*

$$1)\quad \exists^\infty z_{2m} \ldots \exists^\infty z_{2m+t-1} Q z_{2m+t} (r(\langle i,k,z_1,\ldots,z_{2m+t}\rangle) = 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{B}_{K^?_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})}} \models (1)\ \&\ \neg K_1(1);$$

$$2)\ \neg\exists^\infty z_{2m} \ldots \exists^\infty z_{2m+t-1} Q z_{2m+t} (r(\langle i,k,z_1,\ldots,z_{2m+t}\rangle) = 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{B}_{K^?_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})}} \models K_1(1)\ \&\ \neg K_0(1);$$

(*где* t, d, *квантор* Qz_{2m+t} *и рекурсивная функция* r *— из предложения 1). И пусть также найдется конструктивная БА* $\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{W}}} \models \neg W(1)$ *и порождающий её конструктивный линейный порядок* $\overline{\mathbf{W}}$, *где* $W(x)$ *удовлетворяет условиям 5 и 6, то тогда мы можем построить конструктивную БА* $\mathcal{B}^*$ *такую, что в любой её конструктивизации* $K(x) \in \Sigma_{d+1}$, *но* $\Omega_n \not\to (d,2)$ *и, следовательно (из замечания 1),* $K(x) \notin \Sigma_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим

$$\mathbf{L} \rightleftharpoons \sum_{m\in\mathbf{N}}^{rec} \sum_{i\in\mathbf{N}}^{rec} \sum_{k\in\mathbf{N}}^{rec} (K^?_{2m}(m,i,f(k)) \overset{rec}{+} \overline{\mathbf{W}});$$

$$K^?_{2m}(m,i,k) \rightleftharpoons \sum_{z_1\in\mathbf{N}}^{rec} K^?_{2m-1}(m,i,k,z_1);$$

$$K^?_{2m-1}(m,i,k,z_1) \rightleftharpoons \sum_{z_2\in\mathbf{N}}^{rec} K^?_{2m-2}(m,i,k,z_1,z_2);$$

$$\vdots$$

$$K^?_2(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-2}) \rightleftharpoons \sum_{z_{2m-1}\in\mathbf{N}}^{rec} K^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1}),$$

где рекурсивная функция $f(x)$ — функция "большого размаха" [2, с.245].

Свойства БА $\mathcal{B}_L$ будут описываться следующим образом:

ЛЕММА 1.

$$1)\ \forall z_1 \ldots \forall z_{2m-q}(A_q(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-q}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{B}_{K_q^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-q})} \models At^{K_q-1}(1));$$

следовательно на этой же БА $\models K_{q+1}\ \&\ \neg K_q(1));$

$$2)\ \forall z_1 \ldots \forall z_{2m-q}(\neg A_q(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-q}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathcal{B}_{K^?-q(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-q})} \models K_q(1)\ \&\ \models K_{q-1}(1));$$

для любого $1 \le q \le 2m$, *и где*

$$A_q(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-q}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall^\infty z_{2m+t-1} Q z_{2m+t} r(\langle i,k,z_1,\ldots,z_{2m+t}\rangle) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный набор $(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-q})$, где $1 \le q \le 2m$ и будем его обозначать в доказательстве как "$(\ldots)$", и как "$(\ldots$", если этот набор составляет начальную часть какого–либо иного набора.

Проведем доказательство индукцией по q. Для $q = 1$ свойство выполняется по условию теоремы. Сделаем индукционное допущение для $q-1$.

Докажем первое свойство. Путь выполнено $A_q(\ldots)$, но так как $A_q(\ldots) \Leftrightarrow \exists^\infty z_{2m-q+1}\, A_{q-1}(\ldots, z_{2m-(q-1)})$, тогда из индукционного допущения будем иметь: $\exists^\infty z_{2m-q+1}\, \mathcal{B}_{K_{q-1}^?(\ldots,z_{2m-(q-1)})} \models$ $\models K_q(1)\ \&\ \neg K_{q-1}(1)$, при этом, возможно, для некоторых z_{2m-q+1} выполнено

$$\mathcal{B}_{K_{q-1}^?(\ldots,z_{2m-(q-1)})} \models K_{q-1}(1)\ \&\ \neg K_{q-2}(1).$$

Следовательно, $K_q^?(\ldots) \cong \mathrm{At}^{K_q} \times \omega$, где At^{K_q} -- здесь обозначает подходящий линейный порядок, порождающий такую БА $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B} \models At^{K_q}(1)$. Следовательно,$\mathcal{B}_{K_q^?(\ldots)} \models At^{K_q}(1)$, а значит

$$\mathcal{B}_{K_q^?(\ldots)} \models K_{q+1}(1)\ \&\ \neg K_q(1).$$

Первое свойство доказано. Обратимся к доказательству второго свойства. Пусть для указанного выше набора не выполнено $A_q(\ldots)$, т.е. $\neg \exists^\infty z_{2m-q+1}\, A_{q-1}(\ldots, z_{2m-(q-1)})$

И тогда по индукционному предположению:

$$\neg \exists^\infty z_{2m-(q-1)}\, \mathcal{B}_{K^?_{q-1}(\ldots, z_{2m-(q-1)})} \models K_q(1) \;\&\; \neg K_{q-1}(1),$$

но соответственно, почти для всех $z_{2m-(q-1)} \in \mathbf{N}$

$$\mathcal{B}_{K^?_{q-1}(\ldots, z_{2m-(q-1)})} \models K_{q-1}(1) \;\&\; \neg K_{q-2}(1),$$

и, возможно, для нескольких $z_{2m-(q-1)} \in \mathbf{N}$

$$\mathcal{B}_{K^?_{q-1}(\ldots, z_{2m-(q-1)})} \models K_q(1) \;\&\; \neg K_{q-1}(1).$$

Таким образом, порядок $K^?_q(\ldots)$ в этом случае имеет вид: $K^?_q(\ldots) \cong \mathbf{At}^{K_q} \times \mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — подходящий конечный линейный порядок, содержащий по крайней мере один элемент. (Если вообще не существует $z_{2m-(q-1)} \in \mathbf{N}$, что $\mathcal{B}_{K^?_{q-1}(\ldots, z_{2m-(q-1)})} \models$ $\models K_q(1) \;\&\; \neg K_{q-1}(1)$, то мы будем иметь в точности $\mathbf{k} \cong \mathbf{1}$). Следовательно, $\mathcal{B}_{K^?_q(\ldots)} \models K_q(1) \;\&\; \neg K_{q-1}(1)$, что и требовалось.

ЛЕММА 2.

$\forall m \geq 1 \big(\mathcal{B}_{\mathbf{L}} \models \Omega_{2m} \Leftrightarrow \exists i \forall k \neg \exists^\infty z_1 \ldots$

$\ldots \exists^\infty z_{2m+t-1}\, Q z_{2m+3}\; (r(\langle i, k, z_1, \ldots, z_{2m+t}\rangle) = 1)\big)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

($\Rightarrow$) Зафиксируем произвольное $m \leq 1$. Пусть $\mathcal{B}_{\mathbf{L}} \models \Omega_{2m}$. Допустим противное:

$$\forall i\, \exists k_0\, \exists^\infty z_1 \ldots \exists^\infty z_{2m+t-1}\, Q z_{2m+3}\; (r(\langle i, k, z_1, \ldots, z_{2m+t}\rangle) = 1).$$

Тогда из первого свойства леммы 1

$$\forall i\, \exists k_0 \;\left(\mathcal{B}_{K^?_{2m}(m,i,k_0)} \models K_{2m+1}(1) \;\&\; \neg K_{2m}(1)\right), \tag{7}$$

а так как для произвольного k из того, что $f(k) = f(k_0)$ следует, что $K^?_{2m}(m, i, f(k)) \cong K^?_{2m}(m, i, f(k_0))$, и так как f — функция "большого размаха", то таким образом

$$\forall i\ \exists^\infty k\ \left(\mathcal{B}_{K^?_{2m}(m,i,k)} \models K_{2m+1}(1)\ \&\ \neg K_{2m}(1)\right). \qquad (8)$$

С другой стороны, так как $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models \Omega_{2m}$, то существует элемент $b = [\gamma_1, \gamma_2) \cup \ldots \cup [\gamma_n, \gamma_{n+1}) \in \mathcal{B}_{\mathrm{L}}$ такой, что $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models \Psi_{2m}(b)\ \&$ $\&\ \Phi_{2m}(b)$.

По определению предикатов Ψ_{2m} и Φ_{2m} и из рассуждений предложения 1 [7], элемент b не содержит элементов из $K_{2m+1} \setminus K_{2m}(\mathcal{B}_{\mathrm{L}})$, но содержит бесконечное число попарно не пересекающихся элементов из $K_{2m} \setminus K_{2m-1}$. Очевидно, что хотя бы для одного из интервалов $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ это утверждение также верно. Тогда он содержит бесконечно много интервалов $[\alpha, \beta) \subset [\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ таких, что они попарно не пересекаются и $\mathcal{B}_{[\alpha,\beta)} \models K_{2m}(1)\ \&\ \neg K_{2m-1}(1)$. А это возможно, только если $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ содержит интервал вида

$$\sum_{k\in\omega,\, k\geq k_0} (K^?_{2m}(m, i_0, k) + \overline{\mathbf{W}}), \quad \text{для некоторых } i_0, k_0. \qquad (9)$$

В самом деле, интервал $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ не может содержать интервалы вида

$$\sum_{k\in\omega,\, k\geq k_1} (K^?_{2m}(m_1, i_1, k) + \overline{\mathbf{W}}), \qquad (10)$$

для $m_1 > m$, так как тогда в $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ будут элементы из K_{2m+1}.

И не может состоять только из подинтервалов вида (10) при $m_1 < m$, так как тогда интервал $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$ не будет реализовывать $\Phi_{2m}(x)$. Соответственно, из тех же соображений, интервал не может включать в себя подинтервалы вида $K^?_s$ для $s > 2m$, и состоять только из подинтервалов вида $K^?_s$ для $s \leq 2m$. Таким образом, остается только указанная возможность (9).

Но так как верно (8), то каждый интервал указанного вида будет содержать интервал $[\delta, \varepsilon)$ такой, что $\mathcal{B}_{[\delta,\varepsilon)} \models K_{2m+1}(1)\ \&$ $\&\ \neg K_{2m}(1)$. Поэтому всегда найдется элемент в $[\gamma_{j_0}, \gamma_{j_0+1})$, а следовательно и в b, лежащий в $K_{2m+1}(\mathcal{B}_{\mathrm{L}}) \setminus K_{2m}(\mathcal{B}_{\mathrm{L}})$, получили противоречие.

($\Leftarrow$) Если верно

$$\exists i\ \forall k\ \neg\, \exists^\infty z_1 \ldots \exists^\infty z_{2m+t-1}\, Q z_{2m+t}\ \ (r(\langle i, k, z_1, \ldots, z_{2m+t}\rangle) = 1),$$

то по второму свойству леммы 1 и по построению, будет выполнятся

$$\exists i_0\ \forall k\ \left(\mathcal{B}_{K^?_{2m}(m,i_0,k)} \models K_{2m}(1)\ \&\ \neg K_{2m-1}(1)\right). \qquad (11)$$

Положим $b \rightleftharpoons \sum_{k\in\omega}(K^?_{2m}(m,i_0,k)+\omega)$, тогда для всех интервалов $[\alpha,\beta) \subset b$ для которых $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models W([\alpha,\beta))$ будем иметь $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \not\models K_{2m+1}([\alpha,\beta))\ \&\ \neg K_{2m}([\alpha,\beta))$.

Таким образом, b не содержит под собой элементы из $K_{2m+1}\setminus K_{2m}$. Но и $b \notin K_{2m}$, так как $\exists x < b\, \neg W(x)$ (так как b содержит под собой линейные порядки $\overline{\mathbf{W}}$). Следовательно, $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models \Phi_{2m}(b)$. Также верно и $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models \Psi_{2m}(b)$, так как если

$$\exists i_0\ \forall k\ \left(\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models K_{2m}(c(m,i_0,k))\ \&\ \neg K_{2m-1}(c(m,i_0,k))\right),$$

где $c(m,i_0,k) \rightleftharpoons K^?_{2m}(m,i_0,k)$, то

$$\exists i_0\ \exists^\infty k\ \left(\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models K_{2m}(c(m,i_0,k))\ \&\ \neg K_{2m-1}(c(m,i_0,k))\right),$$

т.е. $\exists^\infty x \in \mathcal{B}_{\mathrm{L}}\ (\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models K_{2m}(x)\ \&\ \neg K_{2m-1}(x))$, и так как $\forall m,i,k_1,k_2\ (\ k_1 \neq k_2 \Rightarrow K^?_{2m}(m,i,k_1) \cap K^?_{2m}(m,i,k_2) = \emptyset\ )$, то, таким образом, выполняется $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models \Phi_{2m}(b)$ и, следовательно, $\mathcal{B}_{\mathrm{L}} \models \Omega_{2m}$, что доказывает нашу лемму, и фактически завершает доказательство теоремы.

Докажем теперь следствие теоремы. Отметим, что при $d = 1$ возможно доказать более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $K(x)$ — произвольная формула слабой теории второго порядка БА, удовлетворяющая формулам (условиям) (1)–(4), выше. Тогда найдется конструктивная БА $\mathcal{B}^*$ такая, что в любой её конструктивизации предикат $K(x)$ не разрешим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Если для любой БА, для любой её конструктивизации предикат K не разрешим, то берем произвольную конструктивную БА.

2. Пусть для некоторой конструктивной БА $\langle\mathcal{B},\nu\rangle$ предикат K разрешим. Тогда, в соответствии с оценками по Фейнеру (см.

замечание 1), будем иметь $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \sim (0,2)$. И найдется рекурсивный линейный порядок $\mathbf{K}$, с минимальным и максимальным элементами, такой, что $\mathcal{B}_{\mathbf{K}} \models K(1)$. В самом деле, пусть $a \in K(\mathcal{B})$ — некоторый ненулевой элемент, рассмотрим тогда $\mathbf{K}$ как линейный базис, порождающий $[a]_{\mathcal{B}}$.

3. Определим $W(x) \rightleftharpoons As^{K}(x)$ и определим рекурсивный порядок $\overline{\mathbf{W}} \rightleftharpoons 1 + \mathbf{K} \times \eta + 1$, легко заметить, что $\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{W}}} \models \neg W(1)$, и что $W(x)$ удовлетворяет условия 5 и 6.

Зафиксируем произвольный набор $(m, i, k, z_1, \ldots, z_{2m-1}) \in \in \mathrm{N}^{2m-1+3}$ и будем обозначать его в дальнейшем сокращенно: $(\ldots)$.

Положим $\omega_{(\ldots)} \rightleftharpoons \langle \mathrm{N}/\mu_{(\ldots)}, \leq_{(\ldots)} \rangle$, где $x \leq_{(\ldots)} y \rightleftharpoons \rightleftharpoons (x \leq y) \vee \exists n \leq y\ r(\langle \ldots, n \rangle) \neq 1$ и $\mu_{(\ldots)} \rightleftharpoons \{(x,y) \mid x \leq_{(\ldots)} y\ \& \ \& \ y \leq_{(\ldots)} x\}$.

Видим, что мы определили рекурсивный линейный порядок. Теперь положим:

$$K^{?}_{(\ldots)} \rightleftharpoons \sum_{x \in \omega_{(\ldots)}}^{\mathrm{rec}} \mathbf{K}.$$

Из свойств представленных выше линейных порядков легко следует:

1) $(\exists z_{2m}\, r(\langle \ldots, z_{2m} \rangle) \neq 1) \Rightarrow \mathcal{B}_{K^{?}_{(\ldots)}} \models K_1(1) \,\&\, \neg K_0(1)$;

2) $(\forall z_{2m}\, r(\langle \ldots, z_{2m} \rangle) = 1) \Rightarrow \mathcal{B}_{K^{?}_{(\ldots)}} \models K_2(1) \,\&\, \neg K_1(1)$;

3) $\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{W}}} \models \neg W(1)$;

Таким образом, мы попадаем в условия предыдущей теоремы, и дальнейшее доказательство является ее простым следствием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует конструктивная БА с неразрешимым идеалом Ершова-Тарского в любой конструктивизации.*

В самом деле, пусть $K(x) \rightleftharpoons I_1(x)$; $W(x) \rightleftharpoons As_1(x)$, т.е. $W(x) \rightleftharpoons As^{I_1}(x)$.

Очевидно, $\forall n \in \mathrm{N}\ \forall x \in \mathcal{B}\ (\neg As_1(x) \to \neg K(x))$.

Далее, видим, что начиная с $n \geq 3$, K_n представима в Σ_{2n-2}-форме, Ψ_n и Φ_n – Π_{2n-1}-форме, Ω_n — Σ_{2n}-форме, и соответственно, $\mathcal{N} \sim (0,2)$.

Положим, наконец, $\mathbf{K} \rightleftharpoons 2+\eta+1$, $\quad \overline{\mathbf{W}} \rightleftharpoons 1+(2+\eta+1)\times\eta+1$.

Легко проверить, что теперь мы полностью находимся в условиях предыдущей теоремы и можем воспользоваться ею для завершения доказательства этого предложения.

Рассмотрим теперь образцы применения базовой конструкции Фейнера в соответствии с приведенной выше схемой.

ПРИМЕР 1.

Теорема [1,2]. *Для любого $k \in \mathbf{N}$ существует k-атомная, но не $(k+1)$-атомная БА, которая конструктивизируема, но не сильно конструктивизируема.*

Этот результат получен С.С. Гончаровым и может быть найден в [1,2]. Его характерные особенности: неразрешимость множества атомов и фиксированная атомность, но для нас представляет интерес простейший случай при $k = 0$. Итак, в наших обозначениях, конструкция Гончарова описывается следующим образом:

$$K(x) \rightleftharpoons F(x); \quad W(x) \rightleftharpoons As(x);$$

$$K^?(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1}) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \langle\{z_{2m} \in \mathbf{N}\}/\mu_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})}, \leq_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})}\rangle,$$

где

$$x \leq_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} y \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons x \leq y \vee \forall n\,(y \leq n < x \to r(\langle i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1},n\rangle) \neq 1);$$

$$\mu_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} \rightleftharpoons \{\langle x,y\rangle \mid x \leq_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} y \;\&$$
$$\& \; y \leq_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} x\};$$

$$\overline{\mathbf{W}} \rightleftharpoons 1+\eta;$$

опровергается оценка $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \sim (1,2)$, и следовательно, опровергается возможность представления $F(x)$ в Σ_1-форме. Следовательно, невозможна рекурсивность $At(\mathcal{B})$.

ПРИМЕР 2.

Теорема [4]. *Для любого $k \in \mathbf{N}$ существует k-атомная, но не $(k+1)$-атомная конструктивная БА, у которой идеал Фреше не рекурсивен ни в какой конструктивизации.*

Этот результат, полученный Дж. Реммелом, [4] является развитием конструкции С.С. Гончарова, повторяя основные шаги основной его идеи. И в наших обозначениях будет описываться следующим образом:

$$K(x) \rightleftharpoons F(x); \quad W(x) \rightleftharpoons As(x);$$

$$K^?(m, i, k, z_1, \ldots, z_{2m-1}) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \langle \{z_{2m} \in \mathbf{N}\}/\mu_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})}, \leq_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} \rangle,$$

где

$$x \leq_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} y \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons x \leq y \vee \exists n \leq y\, (r(\langle i, k, z_1, \ldots, z_{2m-1}, n \rangle) \neq 1);$$

$$\mu_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} \rightleftharpoons \{\langle x, y \rangle \mid x \leq_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} y \;\&$$

$$\& \; y \leq_{(m,i,k,z_1,\ldots,z_{2m-1})} x\};$$

$$\overline{\mathbf{W}} \rightleftharpoons 1 + \eta;$$

опровергается оценка $\mathcal{N}(B) \sim (0, 2)$, и таким образом, опровергается возможность рекурсивности $F(B)$ в любой конструктивизации.

Еще два примера могут быть найдены в работах автора [5–7]. Собственно, конструкции, описанные в этих работах и послужили прототипами данной описательной схемы.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры. — Новосибирск: Наука Сиб. отд-ние, 1988.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. — Новосибирск: Научная книга, 1996.

3. FEINER L. Hierarches of boolean algebras// J. Symb. logic. -1970. - Vol.35, № 3. - P.365–373.

4. REMMEL J.B. Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras// J. Symb. logic. - 1981. - Vol.46,№ 3. - P.572-594.

5. ВЛАСОВ В.Н. О контрпримерах булевых алгебр элементарной характеристики (1,0,1) с различными алгоритмическими характеристиками //Обобщенная вычислимость и определимость. — Новосибирск, 1998. — Вып. 161: Вычислительные системы. — С. 106–128.

6. ВЛАСОВ В.Н. Конструктивизируемость булевых алгебр элементарной характеристики (1,0,1). - Новосибирск,1998. (Препринт/ НГУ НИИ МИОО; № 37).

7. ВЛАСОВ В.Н. Конструктивизируемость булевых алгебр элементарной характеристики (1,0,1) //Алгебра и логика. — 1998. Т. 37, № 5. — С. 499–521.

Поступила в редакцию
30 декабря 1999 года