МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ
(Вычислительные системы)
2001 год **Выпуск 167**

УДК 510

О ПРОСТЕЙШЕЙ МЕТАТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

А.С.Нудельман

В данной работе строится формальная метатеория множеств MTS_0, являющаяся упрощением ранее описанной автором в [1] метатеории множеств MTS. Доказательство непротиворечивости (более слабой) теории MTS^V относительно ZF и одной, достаточно правдоподобной гипотезы служит основанием для принятия гипотезы о непротиворечивости MTS_0. Здесь показывается, что аксиом (мета)теории MTS_0 достаточно для доказательства ZF–формул, выражающих существование иерархии измеримых кардиналов, которая аналогична иерархии недостижимых кардиналов, состоящей из гипернедостижимых кардиналов, кардиналов Мало, гипер–Мало кардиналов и т.д.

§1. Язык метатеории MTS_0 — язык ML

При определении языка теории MTS_0 будет использовано, как обычно, понятие стандартного натурального ряда N. Аналоги нижеприводимых определений или сами определения будут браться из [2].

Определим вначале предметный язык L. Множеством переменных языка L будет множество символов $\{v_i | i \in N\}$. Формулами языка L или, иначе, L–формулами будут определенные индукцией по N формулы сигнатуры $<\in, V>$ [2, с.111], содержащей двухместный предикатный символ $\in$ и константу V. Переменные языка L будут, как правило, обозначаться через x, y, z, t, f (возможно, с индексами).

Всякая L-формула сигнатуры $<\in>$ будет называться также $\in$-формулой. Через L_0 будет обозначаться семейство всех $\in$-формул точно с одной свободной переменной v_0.

Определим (мета)язык ML. Язык ML будет языком с двумя сортами переменных. Переменными первого сорта будут переменные языка L. Эти переменные будут называться предметными переменными или просто переменными. Множеством переменных второго сорта или, иначе, метапеременных будет множество символов $\{\vartheta_i | i \in N\}$. Метапеременные будут, как правило, обозначаться через Θ (возможно, с индексом).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество формул языка ML или, иначе, ML-формул определяется индукцией по N.

1. Если φ является формулой языка L, то φ является ML-формулой.

2. Если Θ — метапеременная, x — переменная, то выражения $\Theta(x)$ и $\Theta^V(x)$ являются ML-формулами.

3. Если φ, ψ — формулы языка ML, то $(\varphi \ \& \ \psi), (\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ и $\neg\varphi$ — формулы языка ML.

4. Если φ — формула языка ML, x — переменная, Θ — метапеременная, то $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$, $\forall\Theta\varphi$ и $\exists\Theta\varphi$ — формулы языка ML.

Если φ — формула языка ML, то через $X_\varphi(MX_\varphi)$ будет обозначаться множество свободных переменных (метапеременных) формулы φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для каждой формулы φ языка ML множества X_φ и MX_φ определяются следующим образом.

1. Если φ — формула языка L, то X_φ определено [2, с.113], а $MX_\varphi = \emptyset$.

2. Если $\varphi = \Theta(x)$ или $\varphi = \Theta^V(x)$, то $X_\varphi = \{x\}$ и $MX_\varphi = \{\Theta\}$.

3. Если $\varphi = \neg\psi$, то $X_\varphi = X_\psi$ и $MX_\varphi = MX_\psi$.

4. Если $\varphi = \varphi_1 \tau \varphi_2$, где $\tau \in \{\&, \vee, \to\}$, то $X_\varphi = X_{\varphi_1} \cup X_{\varphi_2}$ и $MX_\varphi = MX_{\varphi_1} \cup MX_{\varphi_2}$.

5. Если $\varphi = Qx\psi$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$, то $X_\varphi = X_\psi \setminus \{x\}$ и $MX_\varphi = MX_\psi$.

6. Если $\varphi = Q\Theta\psi$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$, то $X_\varphi = X_\psi$ и $MX_\varphi = MX_\psi \setminus \{\Theta\}$.

Пусть формула $\varphi \in L_0$ и $v_0, v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, $k \geq 0$, — список всех входящих в φ переменных. Пусть x — переменная, являющаяся символом v_n. Тогда через $K_x(\varphi)$ будет обозначаться либо формула φ, если $n = 0$, либо формула, получаемая из φ путем замены символа v_n в каждом его вхождении в φ на символ v_m, где $m = \max\{i_1, \ldots, i_k, n\} + 1$, если $n \neq 0$. Ясно, что для любых $\varphi \in L_0$ и переменной x имеет место:

а) формула $K_x(\varphi)$ конгруэнтна формуле φ [2, с.140] и

б) в формуле $K_x(\varphi)$ возможна замена свободной переменной v_0 на переменную x без коллизии переменных (как обычно, результат такой замены обозначается через $(K_x(\varphi))_x^{v_0}$).

Если формула φ не содержит символ V, то через $[\varphi]^V$ или φ^V будет обозначаться релятивизация формулы φ относительно V, при этом предполагается, что релятивизацией относительно V формулы вида $\Theta(x)$ будет формула $\Theta^V(x)$.

Пусть $D = < U^D, \in^D, V^D; L^D >$ — двухосновная модель, в которой U^D — семейство совокупностей, называемых классами, некоторые из них называются также множествами, $\in^D$ — отношение принадлежности на U^D, именуемое в языке ML сигнатурным символом $\in$, V^D — элемент семейства U^D, являющийся классом всех входящих в U^D множеств и именуемый в языке ML сигнатурным символом V, и $L^D \subseteq L_0$. Отображение $\gamma : X \to U^D$ будет называться интерпретацией переменных, если X — множество переменных языка ML. Отображение $\rho : MX \to L^D$ будет называться интерпретацией метапеременных, если MX — множество метапеременных языка ML.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для интерпретации переменных $\gamma : X \to$ $\to U^D$, интерпретации метапеременных $\rho : MX \to L^D$ и ML-формулы φ, для которой $X_\varphi \subseteq X$ и $MX_\varphi \subseteq MX$, определим отношение истинности $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ индукцией по длине φ.

1. Если φ является L-формулой, то $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ эквивалентно $< U^D, \in^D, V^D > \models \varphi[\gamma]$ [2,с. 114].

2. Если $\varphi = \Theta(x)$, то $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ эквивалентно $< U^D, \in^D, V^D > \models (K_x(\rho(\Theta)))_x^{v_0}[\gamma]$.

3. Если $\varphi = \Theta^V(x)$, то $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ эквивалентно $< U^D, \in^D, V^D > \models [(K_x(\rho(\Theta)))_x^{v_0}]^V[\gamma]$.

4. Если $\varphi = \neg\varphi_1$ или $\varphi = (\varphi_1 \tau \varphi_2)$, где $\tau \in \{\&, \vee, \rightarrow\}$, то отношение $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ определяется через отношения $D \models \varphi_1[\gamma; \rho]$ и $D \models \varphi_2[\gamma; \rho]$ традиционным способом [2, с. 115].

5. Если $\varphi = \forall x \psi$ ($\varphi = \exists x \psi$) то $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ тогда и только тогда, когда для всякой совокупности $c \in U^D$ (когда существует совокупность $c \in U^D$, для которой) имеет место $D \models \psi[\gamma_1 \cup \cup\{< x, c >\}; \rho]$, где $\gamma_1 = \gamma \upharpoonright (\mathrm{dom}\,\gamma \setminus \{x\})$.

6. Если $\varphi = \forall \Theta \psi$ ($\varphi = \exists \Theta \psi$), то $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ тогда и только тогда, когда для всякой формулы $\chi \in L^D$(когда существует формула $\chi \in L^D$, для которой) имеет место $D \models \psi[\gamma; \rho_1 \cup \cup\{< \Theta, \chi >\}]$, где $\rho_1 = \rho \upharpoonright (\mathrm{dom}\,\rho \setminus \{\Theta\})$.

Как обычно, если отношение $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ не зависит от выбора конкретных интерпретаций γ и ρ (при условии, конечно, $X_\varphi \subseteq \subseteq \mathrm{dom}\,\gamma$ и $MX_\varphi \subseteq \mathrm{dom}\,\rho$), то это отношение будет обозначаться просто $D \models \varphi$.

Будем называть термами (языка ML) переменные и константу V. Будем называть метатермами (языка ML) метапеременные и формулы из семейства L_0. Если φ — формула языка ML, p — переменная (метапеременная) и q — терм (метапеременная), то запись $(\varphi)^p_q$ будет обозначать результат подстановки символа q вместо всех свободных вхождений в φ символа p, при этом предполагается, что ни одно свободное вхождение в φ символа p не входит в подформулу (формулы φ) вида $\forall q \varphi_1$ или $\exists q \varphi_1$. Если φ — формула языка ML, Θ — метапеременная и метатерм $\chi \in L_0$, то запись $(\varphi)^\Theta_\chi$ будет обозначать результат "подстановки" формулы χ вместо всех свободных вхождений в φ метапеременной Θ, при этом предполагается, что "подстановка" заключается в следующем: если свободное вхождение в φ метапеременной Θ находится в подформуле вида $\Theta(x)$ (вида $\Theta^V(x)$), то эта подформула заменяется формулой $(K_x(\chi))^{v_0}_x$ (формулой $[(K_x(\chi))^{v_0}_x]^V$).

Определим метаисчисление предикатов МИП (это метаисчисление будет очевидным аналогом традиционного исчисления предикатов [2, с.152, 153]).

Аксиомы МИП получаются из следующих 14 схем заменой символов $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ конкретными формулами языка ML; x, y, z — переменными; p — переменными или метапеременными, а q — термами или метатермами.

1–10. Схемы исчисления высказываний (в них используются символы φ, φ_1 и φ_2),

11. $\forall p\varphi \to (\varphi)^p_q$,

12. $(\varphi)^p_q \to \exists p\varphi$,

13. $x = x$,

14. $x = y \to ((\varphi)^z_x \to (\varphi)^z_y)$,

где в схемах 11 и 12, если p — переменная, то q — терм, а если p — метапеременная, то q — метатерм.

Правила вывода МИП:

1. $\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$,

2. $\dfrac{\psi \to \varphi}{\psi \to \forall p\varphi}$,

3. $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists p\varphi \to \psi}$,

где φ, ψ — формулы языка ML и где в правилах 2 и 3 переменная или метапеременная p не входит свободно в ψ.

Выводом в МИП формулы φ из множества формул Φ является такая последовательность $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, n \in N$, формул языка ML, что $\varphi_n = \varphi$ и для каждого $i \leq n$ формула φ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

1) φ_i — аксиома МИП,

2) φ_i принадлежит Φ,

3) φ_i получается из некоторых $\varphi_j, j < i$, по одному из правил 1–3, причем при применении правил 2 и 3 переменная или метапеременная p не должна входит ни в одну формулу из Φ свободно.

Метаисчисление МИП является логической основой теории MTS_0.

§2. Аксиомы метатеории MTS_0

В дальнейшем, если φ — формула (языка ML), то запись $\varphi(x_1, \ldots, x_n; \Theta_1, \ldots, \Theta_m)$ будет обозначать формулу φ и тот факт, что $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X_\varphi$ и $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_m\} \subseteq MX_\varphi$. Если формула φ или, иначе, $\varphi(\ldots)$ не содержит символ V, то через $[\varphi]^V, \varphi^V$ или, иначе, через $[\varphi(\ldots)]^V$, $\varphi^V(\ldots)$ будет обозначаться релятивизация этой формулы относительно V. Кванторная приставка вида $\forall\Theta$ или $\exists\Theta$ будет называться метакванторной приставкой.

Аксиомами теории MTS_0 являются аксиомы A_1–A_7.

A_1. Аксиома экстенсиональности

$$\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

A_2. Аксиома фундирования

$$\forall x(\exists y(y \in x) \to \exists y \in x \forall z(z \in y \to z \notin x)).$$

A_3. Аксиома транзитивности класса V

$$\forall x(x \in V \to x \subseteq V).$$

A_4. Аксиома (схема) трансформации

$$\forall \Theta_1, \ldots, \Theta_m([\varphi]^V \to \varphi),$$

где φ — формула языка ML, которая не содержит символ V, не содержит метакванторных приставок и для которой $X_\varphi = \varnothing$ и $MX_\varphi = \{\Theta_1, \ldots, \Theta_m\}$, $m \geq 0$.

A_5. Аксиома (схема) почти неограниченного свертывания

$$\forall \Theta_1, \ldots, \Theta_m \forall y(y = \{x \in V | \varphi^V(x)\} \to$$
$$\to (y \in V \leftrightarrow \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y))),$$

где φ — формула языка ML, которая не содержит символ V, не содержит метакванторных приставок и для которой $X_\varphi = \{x\}$, $y \notin X_\varphi$ и $MX_\varphi = \{\Theta_1, \ldots, \Theta_m\}$, $m \geq 0$.

A_6. Аксиома (схема) выделения

$$\forall t_1, \ldots, t_n \forall \Theta_1, \ldots, \Theta_m \forall x \exists y(y = \{z \in x | \varphi(z, x)\}),$$

где φ — формула языка ML, для которой $X_\varphi = \{z, x, t_1, \ldots, t_n\}$, $n \geq 0$; $y \notin X_\varphi$ и $MX_\varphi = \{\Theta_1 \ldots, \Theta_m\}$, $m \geq 0$.

A_7. Аксиома интенсиональности

$$\forall y(y \subseteq V \to \exists \Theta(y = \{x \in V | \Theta^V(x)\})).$$

§3. О непротиворечивости метатеории MTS_0

Обозначим через TSV теорию в языке L, логической основой которой будет исчисление предикатов сигнатуры $<\in, V>$ и аксиомами которой будут A_1, A_2 (аксиомы теории MTS_0) и A_3^+, A_4^L, A_5^L :

A_3^+. $\forall x(x \in V \to x \subseteq V \,\&\, \forall y(y \subseteq x \to y \in V))$;

A_4^L. $\forall t_1, \ldots, t_n \in V([\varphi]^V \to \varphi)$,

где φ является $\in$-формулой, для которой $X_\varphi = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $n \geq 0$;

$$A_5^L.\ \forall t_1, \ldots, t_n \in V \forall y(y = \{x \in V | \varphi^V(x)\} \to \to (y \in V \leftrightarrow \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y))),$$

где φ является $\in$-формулой, для которой $X_\varphi = \{x, t_1, \ldots, t_n\}$, $n \geq 0$; и $y \notin X_\varphi$.

ЛЕММА 1. *Если ZF непротиворечива, то теория TSV непротиворечива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [3, с.242], что введенная Воотом теория множеств ZA такова, что 1) для всякой $\in$-формулы (т.е. ZF-формулы) φ имеет место $ZA \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда $ZF \vdash \varphi$, и 2) теория ZA равносильна теории $ZA + A_8$, где A_8 — аксиома (схема) Аккермана, имеющая вид:

$$A_8.\ \forall t_1, \ldots, t_n \in V(\forall x(\varphi(x) \to x \in V) \to \to \exists y \in V(y = \{x | \varphi(x)\})),$$

где φ является $\in$-формулой, для которой $X_\varphi = \{x, t_1, \ldots, t_n\}$, $n \geq 0$; и $y \notin X_\varphi$. Отсюда следует, что для доказательства леммы достаточно показать, что все аксиомы теории TSV доказуемы в $ZA + A_8$. Покажем это.

Аксиома A_1 является аксиомой теории ZA. Аксиома A_2 доказуема в ZA, поскольку релятивизация $[A_2]^V$ является аксиомой ZA и аксиомой ZA является аксиома (схема), выражающая принцип рефлексии:

A_9. $\forall t_1, \ldots, t_n \in V([\varphi]^V \leftrightarrow \varphi)$,

где φ является $\in$-формулой, для которой $X_\varphi = \{t_1, \ldots, t_n\}$, $n \geq 0$. Аксиома A_3^+ является аксиомой теории ZA. Аксиома A_4^L непосредственно следует из A_9.

Покажем, что $(ZA + A_8) \vdash A_5^L$. Пусть $t_1, \ldots, t_n \in V$ и $y = \{x \in V | \varphi^V(x)\}$, где φ является $\in$–формулой, для которой $X_\varphi = \{x, t_1, \ldots, t_n\}$ и $y \notin X_\varphi$. Ясно, что $\forall x \in V(\varphi^V(x) \leftrightarrow x \in y)$. Предположим, что $y \in V$. Тогда, ввиду аксиомы A_9, имеет место $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$. Обратно, предположим, что $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow x \in y)$. Тогда $\forall x(\varphi(x) \to x \in y)$ и, ввиду $y \subseteq V$, имеет место $\forall x(\varphi(x) \to$ $\to x \in V)$. По аксиоме A_8 существует y' такой, что $y' \in V$ и $y' = \{x | \varphi(x)\}$. Поскольку $y' \in V$, то ввиду аксиомы A_3^+, имеет место $y' \subseteq V$, и следовательно, $y' = \{x \in V | \varphi(x)\}$. По аксиоме A_9 выполняется $\forall x \in V(\varphi^V(x) \leftrightarrow \varphi(x))$. Следовательно, $y' =$ $= \{x \in V | \varphi^V(x)\} = y$ и $y \in V$.

Будем обозначать через $P(x)$ совокупность $\{z | z \subseteq x\}$. Через V_α, где α — ординал, будем обозначать совокупности, определяемые следующим образом: а) $V_0 = \emptyset$; б) $V_\alpha = P(V_\beta)$, если $\alpha = \beta + 1$, и в) $V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta < \alpha} V_\beta$, если α — предельный ординал.

Модель $M = < U^M, \in^M, \ldots >$ (многоточие означает возможное наличие в моделе M иных элементов) называется натуральной, если отношение $\in^M$ стандартно и $U^M = \cup\{V_\beta | \beta \in U^M\}$. Известно, что если ZF непротиворечива, то ZF имеет натуральную модель. В настоящее время (судя, например, по [3]) явно не отвергается, а возможно, считается достаточно правдоподобной гипотеза о том, что использованная в доказательстве леммы 1 теория $ZA + A_8$ имеет натуральную модель. Поскольку теория TSV не сильнее теории $ZA + A_8$, то представляется достаточно правдоподобной

ГИПОТЕЗА. *Теория TSV имеет натуральную модель.*

Обозначим через MTS^V теорию MTS_0, в которой аксиома A_7 заменена аксиомой

A_7^V. $\forall y(y \in V \to \exists \Theta(y = \{x \in V | \Theta^V(x)\}))$,

а аксиома A_3 — аксиомой A_3^+.

ЛЕММА 2. *Если ZF непротиворечива и верна гипотеза, то теория MTS^V непротиворечива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = < U^B, \in^B, V^B >$ — натуральная модель для теории TSV. Пусть R — семейство символов $\{r_s\}_{s \in V^B}$.

Определим (предметный) язык L^R : множеством переменных языка L^R является множество символов $\{v_i | i \in N\}$; формулами языка L^R являются определенные индукцией по N формулы сигнатуры $\Sigma^R =<\in, V, \{r_s\}_{s \in V^B}>$, в которой всякий символ $r_s \in R$ является одноместным предикатным символом. Через L_0^R будем обозначать семейство всех не содержащих символ V формул языка L^R точно с одной свободной переменной v_0.

Определим (мета)язык ML^R и метаисчисление предикатов МИП^R : определения языка ML^R и метаисчисления МИП^R совпадают с определениями соответственно языка ML и метаисчисления МИП после замены в них языка L языком L^R, семейства L_0 — семейством L_0^R, языка ML —языком ML^R и метаисчисления МИП — метаисчислением МИП^R.

Определим теорию MT^R следующим образом: MT^R есть теория в языке ML^R, логической основой которой является метаисчисление МИП^R и аксиомами которой являются: 1) A_1, A_2, A_3^+, A_7^V (аксиомы теории MTS^V) и 2) аксиомы (схемы) A_4^R, A_5^R и A_6^R, формулировки которых получаются соответственно из формулировок схем A_4, A_5 и A_6 путем замены в них фразы "языка ML" фразой "языка ML^R". Докажем непротиворечивость теории MT^R.

Пусть $B^R =< U^B, \in^B, V^B, \{r_s^B\}_{s \in V^B} >$ — модель, в которой для всякого $s \in V^B$ элемент модели r_s^B является свойством ($r_s^B \subseteq U^B$), именуемым сигнатурным символом r_s, для которого имеет место $r_s^B = s$. Пусть $MB^R =< U^B, \in^B, V^B, \{r_s^B\}_{s \in V^B};$ $L_0^R >$ — двухосновная модель. Ясно, что модель MB^R натуральна (так как B — натуральная модель). Определим нижеследующими пунктами 1–6, отношение истинности $MB^R \models \varphi[\gamma; \rho]$, где φ — формула языка $ML^R, \gamma : X \to U^B$ — интерпретация переменных ($X_\varphi \subseteq X$) и $\rho : MX \to L_0^R$ — интерпретация метапеременных ($MX_\varphi \subseteq MX$), следующим образом: 1) если φ является формулой языка L^R, то $MB^R \models \varphi[\gamma; \rho]$ эквивалентно $B^R \models \varphi[\gamma]$, при этом подразумевается, что если $\varphi = r_s(x)$, то $B^R \models \varphi[\gamma]$ тогда и только тогда, когда $\gamma(x) \in^B s$, 2)–6) содержание этих пунктов аналогично содержанию п.п. 2–6 определения отношения $D \models \varphi[\gamma; \rho]$ для ML-формулы φ (если $\rho(\Theta) = r_s(v_0)$, то $K_x(\rho(\Theta)) = \rho(\Theta)$). Ясно, что для доказательства непротиворечивости теории MT^R достаточно показать, что MB^R — модель для MT^R. Покажем это.

Пусть φ — аксиома $A_1(A_2, A_3^+)$. Поскольку φ является аксиомой теории TSV и B — модель для TSV, то $B \models \varphi$ и, следовательно, $B^R \models \varphi$. Значит, $MB^R \models \varphi$.

Пусть φ — аксиома из схемы $A_4^R(A_5^R)$, имеющая вид $\forall\Theta_1, \ldots, \Theta_m F(\psi)$, где ψ — формула языка ML^R, которая не содержит символ V, не содержит метакванторных приставок и для которой $MX_\psi = \{\Theta_1, \ldots, \Theta_m\}$ и $X_\psi = \emptyset$ ($X_\psi = \{x\}$ и $y \notin X_\psi$). Выберем некоторую интерпретацию метапеременных $\rho : MX_\psi \to L_0^R$ (если $m = 0$, то $\rho = \emptyset$). Пусть формула $\psi_1 = (\ldots(\psi)^{\Theta_1}_{\rho(\Theta_1)}\ldots)^{\Theta_m}_{\rho(\Theta_m)}$. Ясно, что ψ_1 — формула языка L^R.

Пусть $r_{s_1}, \ldots, r_{s_n}, n \geq 0$, — перечень всех входящих в ψ_1 сигнатурных символов из $\{r_s\}_{s \in V^B}$. Выберем n попарно различных переменных $t_1, \ldots, t_n$, не входящих в формулу $F(\psi_1)$. Пусть формула ψ_2 является результатом замены в формуле ψ_1 всякой подформулы вида $r_{s_i}(z), i = 1, \ldots, n$, формулой $z \in t_i$. Ясно, что ψ_2 есть $\in$-формула, для которой $X_{\psi_2} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ ($X_{\psi_2} = \{x, t_1, \ldots, t_n\}$ и $y \notin X_{\psi_2}$). Поскольку формула $\forall t_1, \ldots, t_n \in VF(\psi_2)$ является аксиомой теории TSV и для $i = 1, \ldots, n$ имеет место $s_i \in V^B$ (значит, $s_i \in^B V^B$), то $B \models F(\psi_2)[\gamma_\rho]$, где интерпретация $\gamma_\rho : \{t_1, \ldots, t_n\} \to U^B$ такова, что $\gamma_\rho(t_i) = s_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $B^R \models F(\psi_2)[\gamma_\rho]$. Поскольку для всякого сигнатурного символа r_s выполняется $B^R \models \forall x(r_s(x) \leftrightarrow x \in t)[\{< t, s >\}]$ и имеет место $s \in V^B$, то $B^R \models F(\psi_1)$. Поскольку интерпретация ρ может быть выбрана произвольно, то $MB^R \models \varphi$.

Пусть φ — аксиома из схемы A_6^R, имеющая вид $\forall t_1, \ldots, t_n \forall\Theta_1, \ldots, \Theta_m \forall x \exists y\ (y = \{z \in x | \psi\})$. Выберем некоторую интерпретацию переменных $\gamma : X_\psi \setminus \{z, x\} \to U^B$, некоторую интерпретацию метапеременных $\rho : MX_\psi \to L_0^R$ и некоторую совокупность $a \in U^B$. Определим семейство совокупностей S следующим образом: $b \in S$ тогда и только тогда, когда $b \in U^B$ и $MB^R \models \psi_1[\gamma \cup \{< x, a >, < z, b >\}; \rho]$, где формула $\psi_1 = z \in x \;\&\; \psi$. Ясно, что $S \subseteq U^B$. Ясно также, что для любой совокупности

$c \in S$ имеет место $c \in^B a$, поскольку выполняется $MB^R \models$ $\models z \in x[\gamma \cup \{<x,a>, <z,c>\}; \rho]$. Следовательно, ввиду натуральности модели MB^R, имеет место $S \in U^B$. Последнее влечет $MB^R \models \exists y(y = \{z \in x | \psi\})[\gamma \cup \{<x,a>\}; \rho]$. Поскольку совокупность a и интерпретации γ и ρ могут быть выбраны произвольно, то $MB^R \models \varphi$.

Ясно, что $MB^R \models A_7^V$, поскольку для всякой совокупности $s \in V^B$ имеет место $MB^R \models (y = \{x \in V | [r_s(x)]^V\})[\{<y,s>\}; \emptyset]$ и формула $r_s(v_0) \in L_0^R$. Таким образом, MB^R — модель для теории MT^R и, следовательно, теория MT^R непротиворечива.

Поскольку MT^R непротиворечива, то в метаисчислении МИП^R из множества формул $\{A_1, A_2, A_3^+, A_4^R, A_5^R, A_6^R, A_7^V\}$ не выводимо противоречие. Поскольку всякая ML–формула является формулой языка ML^R, то всякая аксиома из схем A_4, A_5 и A_6 является аксиомой из схем A_4^R, A_5^R и A_6^R соответственно. Следовательно, в МИП^R не выводимо противоречие из аксиом теории MTS^V. Ясно, что всякий вывод в метаисчислении МИП является выводом в МИП^R. Следовательно, теория MTS^V непротиворечива.

Заметим, что в MTS^V доказуемы все аксиомы ZF.

Предположим, что ZF непротиворечива и верна гипотеза, и пусть $B =< U^B, \in^B, V^B >$ — натуральная (канторовская) модель для теории TSV. Обозначим через MT теорию MTS^V без аксиомы A_7^V. В силу леммы 2, теория MT непротиворечива.

Канторовская двухосновная модель $MB =< U^B, \in^B, V^B; L_0 >$ является моделью для теории MT. Действительно: если φ — аксиома $A_1(A_2, A_3^+)$, то $MB \models \varphi$, поскольку φ — аксиома теории TSV; если φ — аксиома из схемы $A_4(A_5)$, имеющая вид $\forall \Theta_1, \ldots, \Theta_m \psi$, то $MB \models \varphi$, поскольку для любой интерпретации метапеременных $\rho : \{\Theta_1, \ldots, \Theta_m\} \to L_0$ формула $(\ldots(\psi)^{\Theta_1}_{\rho(\Theta_1)} \ldots)^{\Theta_m}_{\rho(\Theta_m)}$ является аксиомой теории TSV; если φ — аксиома из схемы A_6, то $MB \models \varphi$, поскольку модель B натуральна.

Моделью для теории MT является, также, альтернативная модель $MA =< U^A, \in^A, V^A; L_0 >$, где MA — модель для MTS^V.

Обозначим через t^+ класс (канторовский) $\{x \subseteq V^B | MB \models \models \exists \Theta(x = \{z \in V | \Theta^V(z)\})\}$, а через t^- — класс $P(V^B) \setminus t^+$. Элементы класса t^+ будем называть интенсиональными, а элементы класса t^- — неинтенсиональными. Ясно, что каждый из классов t^-, $t^- \cap V^B$ и $t^- \setminus V^B$ не является пустым, а каждый из классов t^+, $t^+ \cap V^B$ и $t^+ \setminus V^B$ не является конечным.

Отметим четыре обстоятельства.

1. Имеет место следующий факт: в теории MT не доказуемо предложение $\exists y \in V\ \forall \Theta(y \neq \{x \in V | \Theta^V(x)\})$. Действительно, отрицание такого факта влечет отрицание леммы 2.

2. Факт, указанный в п.1, означает, что в аксиомах теории MT не содержится никакой информации о том, что класс неинтенсиональных канторовских множеств $t^- \cap V^B$ не пуст.

3. Представляется достаточно правдоподобным, что в аксиомах теории MT не содержится никакой информации также и о том, что класс неинтенсиональных канторовских классов $t^- \setminus V^B$ не пуст.

4. Очевидно, что в аксиоме A_7^V не содержится никакой информации о том, что канторовский класс $t^- \setminus V^B$ не пуст.

Если иметь ввиду вышеприведенные обстоятельства, то представляется достаточно правдоподобным утверждение: в теории $MT + A_7^V$ не доказуемо предложение $\exists y(y \subseteq V\ \&\ y \notin V\ \&\ \&\ \forall \Theta(y \neq \{x \in V | \Theta^V(x)\}))$, т.е. представляется достаточно правдоподобной непротиворечивость MTS_0.

Далее будет предполагаться, что теория MTS_0 непротиворечива.

Пусть $M =< U^M, \in^M, V^M; L_0 >$ — модель для теории MTS_0. Ясно, ввиду аксиомы A_7, что класс V^M с отношением "принадлежности" $\in^M \cap (V^M \times V^M)$ не будет классом естественных (канторовских) множеств K, изучаемым классической теорией множеств ZF. Поэтому доказательство в MTS_0 формулы $[\exists x \varphi(x)]^V$, где $\varphi(x)$ есть, например, $\in$-формула (т.е. ZF-формула), выражающая свойство "быть измеримым кардиналом", не будет означать существование в классе K измеримого кардинала. Однако теорию MTS_0 можно использовать в качестве инструмента для порождения новых, присоединяемых к ZF, аксиом. Действительно, определим теорию ZFM следующим образом: ZFM

есть теория в ZF-языке, логической основой которой является исчисление предикатов сигнатуры $<\in>$ и аксиомами которой являются аксиомы ZF и ZF-формулы, входящие в семейство $\{\varphi | ZF \nvdash \varphi, MTS_0 \vdash [\varphi]^V\}$. Поскольку MTS_0 непротиворечива и в MTS_0 доказуемы все релятивизованные относительно V аксиомы ZF (§ 4), то теория ZFM будет непротиворечивой. Вполне естественно предположить, что теорией ZFM будет изучаться класс канторовских множеств K. Ясно, ввиду содержания § 4, что изучение класса K средствами теории ZFM будет более полным, чем изучение этого класса средствами теории ZF.

§ 4. Теория MTS_0 и измеримые кардиналы

Прежде всего отметим, что если ZF-формула (т.е. $\in$-формула) φ формально выражает некоторое ZF-понятие, имеющее установившееся название в естественном языке, то это название будет использоваться и для указания MTS_0-понятия, формально выражаемого $\in$-формулой φ, хотя, ввиду аксиомы A_7, содержательные смыслы этих понятий будут, как правило, различны.

Далее через $\mathrm{ord}(x)$ будет обозначаться $\in$-формула, выражающая свойство классов "быть ординалом". Буквами α, β, γ (возможно, с индексами) будут обозначаться ординалы. Бесконечные кардиналы будут обозначаться, также, и через ω_α, при этом будет предполагаться, что ω_0 — минимальный бесконечный кардинал ($\omega_0 = \omega$) и ω_α, $\alpha > 0$, — минимальный из кардиналов, превышающий все ω_β, $\beta < \alpha$.

Первые три теоремы даны без доказательств, поскольку очевидные аналоги этих доказательств приведены в [1].

ТЕОРЕМА 1. *Для всякой $\in$-формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$, $n \geq 0$, $X_\varphi = \{t_1, \dots, t_n\}$, имеет место*

$$\forall t_1, \dots, t_n \in V(\varphi^V(t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \varphi(t_1, \dots, t_n)).$$

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место*

$$\forall x, y(x \subseteq y \,\&\, y \in V \to x \in V).$$

ТЕОРЕМА 3. *Для всякой $\in$-формулы φ, если $ZF \vdash \varphi$, то $MTS_0 \vdash \varphi$ и $MTS_0 \vdash [\varphi]^V$.*

Обозначим через Ω класс $\{x \in V | \mathrm{ord}(x)\}$.

ТЕОРЕМА 4. *Класс Ω является кардиналом и $\Omega = \omega_\Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, ввиду теоремы 2, что Ω — ординал.

Из доказуемого в ZF факта $\forall\alpha\exists\beta(\beta = \alpha + 1)$ и теоремы 3 следует $[\forall\alpha\exists\beta(\beta = \alpha + 1)]^V$, т.е. $\forall\alpha(\alpha \in \Omega \to \alpha + 1 \in \Omega)$[1]. Следовательно, Ω — предельный ординал и, по определению последовательности кардиналов ω_α, имеет место $\omega_\Omega = \mathrm{Sup}\{\omega_\alpha | \alpha < \Omega\}$. Из доказуемых в ZF фактов $\forall\alpha\exists\beta(\beta = \omega_\alpha)$, $\forall\alpha(\alpha < \omega_{\alpha+1})$ и теоремы 3 следует $\forall\alpha \in \Omega(\omega_\alpha \in \Omega)$ и $\forall\alpha \in \Omega(\alpha < \omega_{\alpha+1})$. Значит, класс $\{\omega_\alpha | \alpha < \Omega\}$ неограничен в Ω. Следовательно, $\Omega = \mathrm{Sup}\{\omega_\alpha | \alpha < \Omega\} = \omega_\Omega$.

Обозначим через G класс

$$\{x \subseteq \Omega | \exists\Theta(x = \{z \in V | \Theta^V(z)\} \ \&\ \Theta(\Omega))\}.$$

Существование класса G обусловливается теоремой 3, аксиомами A_6, A_7 и фактом $\Omega \subseteq V$. Заметим, что если $x = \{z \in V | \varphi_1^V(z)\} = \{z \in V | \varphi_2^V(z)\}$, где φ_1, φ_2 — какие-либо $\in$-формулы, то $x \in G$ влечет $\varphi_1(\Omega)$ & $\varphi_2(\Omega)$, а $x \notin G$ влечет $\neg\varphi_1(\Omega)$ & $\neg\varphi_2(\Omega)$ (что обусловлено теоремой 1).

ТЕОРЕМА 5. *Класс G является неглавным Ω-полным ультрафильтром над Ω.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Основные идеи доказательства взяты из [4] и [1].) Покажем, что G — неглавный ультрафильтр над Ω. Пусть $t_1, t_2 \subseteq \Omega$ и, по аксиоме A_7, имеет место $t_1 = \{x \in V | \Theta_1^V(x)\}$ и $t_2 = \{x \in V | \Theta_2^V(x)\}$, где Θ_1 и Θ_2 — некоторые $\in$-формулы.

1. Пусть $t_1 = \emptyset$. Предположим $t_1 \in G$. Тогда $\Theta_1(\Omega)$ и, следовательно, $\exists x\, \Theta_1(x)$. Отсюда, по теореме 1, следует $\exists x \in V\Theta_1^V(x)$, что влечет $t_1 \neq \emptyset$. Значит, $t_1 \notin G$.

---

[1]Более строго, конечно, $\forall\alpha(\alpha \in \Omega \to \alpha +^V 1^V \in \Omega)$, где $+^V$ и 1^V — операция и константа, вводимые посредством формул φ_+^V и φ_1^V, если операция $+$ и константа 1 вводятся посредством $\in$-формул φ_+ и φ_1 соответственно. Но, ввиду аксиомы A_5 и теоремы 1, операция $+^V$ совпадает с операцией $+$, ограниченной классом V а $1^V = 1$. В дальнейшем подобный логический переход будет опускаться.

2. Пусть $t_1, t_2 \in G$. Тогда $t_1 \cap t_2 = \{x \in V | \Theta_1^V(x) \ \& \ \Theta_2^V(x)\}$. Поскольку $\Theta_1(\Omega)$ и $\Theta_2(\Omega)$, то $\Theta_1(\Omega) \ \& \ \Theta_2(\Omega)$. Следовательно, $t_1 \cap t_2 \in G$.

3. Пусть $t_1 \in G$ и $t_1 \subseteq t_2$. Тогда $\forall x \in V(\Theta_1^V(x) \to \Theta_2^V(x))$. Отсюда, по теореме 1, следует $\forall x(\Theta_1(x) \to \Theta_2(x))$. Поскольку $\Theta_1(\Omega)$, то $\Theta_2(\Omega)$. Значит, $t_2 \in G$.

4. Пусть $t_1 \in G$ $(t_1 \notin G)$ и $t_2 = \Omega \setminus t_1$. Тогда $\forall x \in V$ $(\mathrm{ord}^V(x) \to (\Theta_1^V(x) \leftrightarrow \neg\Theta_2^V(x)))$. Отсюда, по теореме 1, следует $\forall x(\mathrm{ord}(x) \to (\Theta_1(x) \leftrightarrow \neg\Theta_2(x)))$, что влечет $\mathrm{ord}(\Omega) \to$ $\to (\Theta_1(\Omega) \leftrightarrow \neg\Theta_2(\Omega))$. Поскольку $\mathrm{ord}(\Omega)$ и $\Theta_1(\Omega)(\neg\Theta_1(\Omega))$, то $\neg\Theta_2(\Omega)(\Theta_2(\Omega))$. Значит, $t_2 \notin G$ $(t_2 \in G)$.

5. Пусть $t_1 = \{\alpha\}$, $\alpha \in \Omega$. Тогда $\forall x \in V(\Theta_1^V(x) \to x = \alpha)$. Поскольку $\alpha \in V$, то, ввиду теоремы 1, имеет место $\forall x(\Theta_1(x) \to$ $\to x = \alpha)$ и, значит, $\Theta_1(\Omega) \to \Omega = \alpha$. Поскольку $\Omega \neq \alpha$, то $\neg\Theta_1(\Omega)$ и, следовательно, $t_1 \notin G$.

Покажем Ω-полноту ультрафильтра G. Пусть $\beta \in \Omega$, $\{t_\alpha | \alpha \in \beta\} \subseteq G$ и $t = \cap\{t_\alpha | \alpha \in \beta\}$. Пусть $y = \{< \alpha, x > | \alpha \in \beta \ \&$ $\& \ x \in t_\alpha\}$. Поскольку $y \subseteq V$, то, по аксиоме A_7, имеет место $y = \{x \in V | \Theta_y^V(x)\}$ для некоторой $\in$-формулы $\Theta_y(v_0)$. Ясно, что для всякого $\alpha \in \beta$ выполняется $t_\alpha = \{x \in V | \exists z \in V(\Theta_y^V(z) \ \&$ $\& \ z =< \alpha, x >)\}$. Поскольку в $\in$-формуле $z =< \alpha, x >$ классы $z, \alpha, x \in V$, то, по теореме 1, имеет место $z =< \alpha, x > \leftrightarrow$ $\leftrightarrow [z =< \alpha, x >]^V$. Следовательно, для всякого $\alpha \in \beta$ выполняется $t_\alpha = \{x \in V | \exists z \in V(\Theta_y^V(z) \ \& \ [z =< \alpha, x >]^V)\}$. Поскольку $t_\alpha \in G$ для всякого $\alpha \in \beta$, то $\forall \alpha \in \beta \exists z(\Theta_y(z) \ \& \ z =< \alpha, \Omega >)$.

Ясно, что $t = \{x \in V | \forall \alpha \in \beta(x \in t_\alpha)\}$ и, следовательно, $t = \{x \in V | \forall \alpha \in \beta \ \exists z \in V(\Theta_y^V(z) \ \& \ [z =< \alpha, x >]^V)\}$. Пусть $\beta = \{x \in V | \Theta_\beta^V(x)\}$, где $\Theta_\beta(v_0)$ — некоторая $\in$-формула, существующая по аксиоме A_7, поскольку $\beta \subseteq V$. Тогда

$$t = \{x \in V | \forall \alpha \in V(\Theta_\beta^V(\alpha) \to \exists z \in V(\Theta_y^V(z) \ \& \ [z =< \alpha, x >]^V))\}.$$

Ясно, что для доказательства Ω-полноты достаточно, ввиду $t \subseteq \Omega$, доказать, что имеет место $\forall \alpha(\Theta_\beta(\alpha) \to \exists z(\Theta_y(z) \ \&$ $\& \ z =< \alpha, \Omega >))$. Но это уже доказано ранее, поскольку, на основании аксиомы A_5 и факта $\beta \in V$, выполняется $\forall \alpha(\Theta_\beta(\alpha) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \Theta_\beta^V(\alpha))$, т.е. $\forall \alpha(\Theta_\beta(\alpha) \leftrightarrow \alpha \in \beta)$.

Далее через $Ms(\alpha)$ будет обозначаться $\in$–формула, выражающая свойство ординалов "быть измеримым кардиналом". Отображение $f : \alpha \to \alpha$ будет называться нормальной функцией, если $\forall\beta_1, \beta_2 \in \alpha(\beta_1 < \beta_2 \to f(\beta_1) < f(\beta_2))$ и для всякого предельного $\beta \in \alpha$ имеет место $f(\beta) = \mathrm{Sup}\{f(\gamma)|\gamma < \beta\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\in$–формул $\mathfrak{I}$ определяется индукцией по N :

1) $Ms(\alpha) \in \mathfrak{I}$;

2) если $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}$, то $H\varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}$, где через $H\varphi(\alpha)$ (читается "гипер-$\varphi(\alpha)$") обозначена $\in$–формула, выражающая свойство ординалов "$\varphi(\alpha)$ и существует неглавный α–полный ультрафильтр D над α такой, что $\{\beta \in \alpha|\varphi(\beta)\} \in D$";

3) если $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}$, то $S\varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}$, где через $S\varphi(\alpha)$ (читается "супер-$\varphi(\alpha)$") обозначена $\in$–формула, выражающая свойство ординалов "$\varphi(\alpha)$ и для всякой нормальной функции $f : \alpha \to \alpha$ существует ординал $\beta \in \alpha$ такой, что $\varphi(f(\beta))$".

ТЕОРЕМА 6. *Для всякой $\in$–формулы $\varphi(\alpha)$, если $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}$, то $MTS_0 \vdash \varphi(\Omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по длине формулы $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}$.

1. Случай $\varphi(\alpha) = Ms(\alpha)$. Из теорем 4 и 5 следует $Ms(\Omega)$.

2. Случай $\varphi(\alpha) = H\psi(\alpha)$ и $\psi(\Omega)$. Пусть $t = \{\beta \in \Omega|\psi(\beta)\}$, т.е. $t = \{z \in V|\mathrm{ord}(z)\ \&\ \psi(z)\}$. Тогда, ввиду теоремы 1, имеет место $t = \{z \in V|[\mathrm{ord}(z)\ \&\ \psi(z)]^V\}$. Поскольку $t \subseteq \Omega$ и $\mathrm{ord}(\Omega)\ \&\ \psi(\Omega)$, то $t \in G$. Следовательно, ввиду теоремы 5, имеет место $\varphi(\Omega)$.

3. Случай $\varphi(\alpha) = S\psi(\alpha)$ и $\psi(\Omega)$. Пусть функция $f : \Omega \to \Omega$ нормальна. Поскольку $f \subseteq V$, то, по аксиоме A_7, имеет место $f = \{x \in V|\Theta_f^V(x)\}$, где $\Theta_f(v_0)$ — некоторая $\in$–формула. Ясно, что $\forall\alpha \in V\exists!x, \beta \in V(\Theta_f^V(x)\ \&\ x = <\alpha, \beta>\ \ \&\ (\forall\gamma \in V(\gamma \in \alpha \to$ $\to \gamma + 1 \in \alpha) \to \beta = \mathrm{Sup}\{\gamma \in V|\exists y, \alpha_1 \in V(\Theta_f^V(y)\ \&\ \alpha_1 \in \alpha\ \&$ $\&\ y = <\alpha_1, \gamma>)\}))$. Поскольку $\alpha, x, \beta, \gamma, y, \alpha_1 \in V$, то, по теореме 1, имеет место $x = <\alpha, \beta> \leftrightarrow [x = <\alpha, \beta>]^V$, $\gamma + 1 \in \alpha \leftrightarrow$ $\leftrightarrow [\gamma + 1 \in \alpha]^V$ и $\beta = \mathrm{Sup}\{\dots\} \leftrightarrow [\beta = \mathrm{Sup}\{\dots\}]^V$. Следовательно, после соответствующих замен подформул и ввиду теоремы 1, имеет место $\forall\alpha\exists!x, \beta(\Theta_f(x)\ \&\ x = <\alpha, \beta>\ \ \&$ $\&\ (\forall\gamma(\gamma \in \alpha \to \gamma{+}1 \in \alpha) \to \beta = \mathrm{Sup}\ \{\gamma|\ \exists y, \alpha_1(\Theta_f(y)\ \&\ \alpha_1 < \alpha\ \&$ $\&\ y = <\alpha_1, \gamma>)\}))$.

Пусть $\alpha = \Omega$, $\Theta_f(t)$ и $t =< \Omega, \beta >$. Поскольку Ω — предельный ординал, то $\beta = \mathrm{Sup}\{\gamma | \exists y, \alpha_1 (\Theta_f(y)$ & $\alpha_1 < \Omega$ & $y = =< \alpha_1, \gamma >)\}$. Ясно, что если $\alpha_1 < \Omega$, то $f(\alpha_1) < \Omega$ и, по теореме 1, имеет место $\Theta_f(< \alpha_1, f(\alpha_1) >) \leftrightarrow [\Theta_f(< \alpha_1, f(\alpha_1) >)]^V \leftrightarrow \leftrightarrow \Theta_f^V(< \alpha_1, f(\alpha_1) >)$. Поскольку, к тому же, $\forall \alpha \exists ! x, \beta(\Theta_f(x)$ & & $x =< \alpha, \beta >)$, то $\beta = \mathrm{Sup}\{\gamma | \exists \alpha_1 < \Omega(\gamma = f(\alpha_1))\} = = \mathrm{Sup}\{f(\alpha_1) | \alpha_1 < \Omega\}$. Поскольку $\forall \gamma < \Omega(\gamma \le f(\gamma) < \Omega)$, то $\beta = \Omega$.

Таким образом, имеет место $\Theta_f(t)$ & $t =< \Omega, \Omega >$ и, по индуктивному предположению, $\psi(\Omega)$. Следовательно, $\exists \alpha, t(\Theta_f(t)$ & & $t =< \alpha, \alpha >$ & $\psi(\alpha))$ и, ввиду теоремы 1, $\exists \alpha, t \in V(\Theta_f^V(t)$ & & $[t =< \alpha, \alpha >]^V$ & $\psi^V(\alpha))$, т.е. $\exists \alpha \in \Omega \psi^V(f(\alpha))$. Поскольку $f(\alpha) \in V$, то, по теореме 1, $\psi^V(f(\alpha)) \leftrightarrow \psi(f(\alpha))$. Следовательно, $\exists \alpha \in \Omega\ \psi(f(\alpha))$. Следовательно, имеет место $\varphi(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 7. *Для всякой $\in$-формулы $\varphi(\alpha)$, если $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}$, то $MTS_0 \vdash \exists \alpha \varphi(\alpha)$ и $MTS_0 \vdash [\exists \alpha \varphi(\alpha)]^V$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}$. Поскольку, ввиду теоремы 6, имеет место $\varphi(\Omega)$, то $\exists \alpha \varphi(\alpha)$. Отсюда, по теореме 1, следует $[\exists \alpha \varphi(\alpha)]^V$.

Заключение

Традиционно считается, что теория ZF непротиворечива и описывает канторовский "мир" множеств K. Если априори не ограничивать обширность этого "мира" и принять гипотезу о непротиворечивости теории MTS_0 (§ 3), то вполне естественно считать, что теория $ZF_{\mathfrak{I}} = ZF + \{\exists \alpha \varphi(\alpha) | \varphi(\alpha) \in \mathfrak{I}\}$ описывает канторовский "мир" множеств K более полно, чем это делает ZF.

Литература

1. НУДЕЛЬМАН А.С. О метатеории множеств //Алгебра и логика. — 1991. — Т. 30, 6. — С. 671–692.

2. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика. — М.: Наука, 1979.

3. REINHARDT W. Ackermann's set theory equels ZF //Ann. Math.Logic. — 1970. — Vol.2, 2. — P. 189–249.

4. REINHARDT W. Set existence principles of Shoenfield, Ackermann and Powell //Fund. Math. — 1974. — Vol. 84, 1. — P. 5–34.

Поступила в редакцию
17 марта 1999 года