**МОДЕЛИ КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ**
**(Вычислительные системы)**
2001 год Выпуск 168

УДК 517.12

# О ЛОГИКАХ СЕГЕРБЕРГА[1]

**С.П. Одинцов**

## Введение

Данная статья продолжает исследования паранепротиворечивых расширений минимальной логики **Lj**, начатые в работах автора [3–5]. В статье [3] было установлено, что класс **Jhn** всех нетривиальных расширений логики **Lj** разбивается на три попарно непересекающихся подкласса: класс **Int** промежуточных логик, удовлетворяющих закону *ex contradictione quodlibet*; класс **Neg**, состоящий из негативных логик, включающих формулу $\bot$ (или, что эквивалентно, $\neg p$); а также класс **Par** собственно паранепротиворечивых расширений **Lj**. Класс **Par** включает все логики не принадлежащие первым двум классам. В негативных логиках отрицание вырождено в том смысле, что каждая формула, начинающая с отрицания, доказуема в каждой негативной логике, поэтому третий из перечисленных классов логик включает все нетривиальные случаи паранепротиворечивых отрицаний. Логика классической опровержимости **Le** является наибольшей логикой этого класса (см., например,[1]).

Выше упомянутое разбиение класса **Jhn** мотивирует попытку описать класс **Par** в терминах хорошо изученных классов

[1]Данная статья является переводом работы автора "Rapresentation of j–algebras and Segerberg's logic", принятой к печати в журнал "Logique et Analyse".

промежуточных и негативных логик. Заметим, что класс негативных логик дефиницильно эквивалентен классу позитивных логик. До известной степени эта попытка была реализована в [4]. Для произвольной логики $\mathbf{L} \in \mathbf{Par}$ были определены ее интуиционистские и негативные напарники, $\mathbf{L}_{\mathrm{int}} \in \mathbf{Int}$ и $\mathbf{L}_{\mathrm{neg}} \in \mathbf{Neg}$. Кроме того, в [4] было установлено, что для любых логик $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ и $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$ класс $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$ всех логик, имеющих $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ в качестве своих интуинционистского и негативного напарников, образует интервал в решетке логик $\mathbf{Jhn}$. Более того, интервалы вида $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$ попарно не пересекаются для различных пар логик $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$. Следующий факт не был явно отмечен в [4], однако не составляет труда установить, что отображение $\mathbf{L} \mapsto (\mathbf{L}_{\mathrm{int}}, \mathbf{L}_{\mathrm{neg}})$ является решеточным гомоморфизмом решетки $\mathbf{Par}$ на прямое произведение решеток $\mathbf{Int}$ и $\mathbf{Neg}$. Таким образом, изучение структуры класса $\mathbf{Par}$ сводится к изучению интервалов вида $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$, где $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ и $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$. Заметим, что класс $\mathbf{Par}$ имеет, в некотором смысле, трехмерную структуру. Точнее говоря, существуют три многообразия параметров, определяющих положение логики в классе $\mathbf{Par}$. Мы можем рассматривать логики $\mathbf{L}_{\mathrm{int}}$ и $\mathbf{L}_{\mathrm{neg}}$ как первую и вторую координаты логики $\mathbf{L} \in \mathbf{Par}$. Третья координата логики $\mathbf{L}$ — это её положение внутри интервала $Spec(\mathbf{L}_{\mathrm{int}}, \mathbf{L}_{\mathrm{neg}})$. Пока неясно, какими параметрами характеризуется эта третья координата. В данной статье мы рассмотрим представление $j$-алгебр (см. также [5]), которое проливает свет на эту проблему. Чтобы продемонстрировать эффективность предложенной семантики паранепротиворечивых расширений $\mathbf{Lj}$, мы используем её для характеризации логик, рассматривавшихся ранее К.Сегербергом [8]. Оказывается, что некоторые из аксиом Сегерберга имеют смешанный характер, а именно, они накладывают ограничение на негативный напарник логики $\mathbf{L}$, удовлетворяющей такой аксиоме, и одновременно на положение логики $\mathbf{L}$ внутри интервала $Spec(\mathbf{L}_{\mathrm{int}}, \mathbf{L}_{\mathrm{neg}})$. Будет показано, как отделить одно ограничение от другого и получена полная картина соотношений между аксиомами Сегерберга.

## 1. Предварительные замечания

Мы будем рассматривать логики в пропозициональном языке $\{\wedge, \vee, \supset, \bot\}$, считая отрицание сокращением $\neg\varphi \rightleftharpoons \varphi \supset \bot$. Как обычно, *логика* — это множество формул, замкнутое относительно правил подстановки и *modus ponens*.

Введем ряд обозначений для пропозиционных логик:

- **Lj** — минимальная логики или логика Иогансон;
- **Le** — логика классической опровержимости Карри;
- **Li** — интуиционистская логика;
- **Lk** — классическая логика;
- **Ln** — негативная логика;
- **Lmn** — максимальная негативная логика;
- $\mathcal{F}$ — тривиальная логика, т.е. множество всех формул.

Напомним соотношения между выше перечисленными логиками. Интуиционистская и негативная логики могут быть аксиоматизированы относительно **Lj** следующим образом:

$$\mathbf{Li} = \mathbf{Lj} + \{\bot \supset p\}, \quad \mathbf{Ln} = \mathbf{Lj} + \{\bot\}.$$

Логики **Lj**, **Li**, **Ln** имеют общий позитивный фрагмент равный позитивной логике. Логики **Le**, **Lk**, **Lmn** также имеют тот же самый позитивный фрагмент, классическую позитивную логику, и могут быть соответственно аксиоматизированы относительно логик **Lj**, **Li** и **Ln** добавлением одной из следующих аксиом

**P.** $((p \supset q) \supset p) \supset p$ (закон Пирса);

**E.** $p \vee (p \supset q)$ (обобщенный закон исключенного третьего)

Как было упомянуто во введении, класс **Jhn** нетривиальных расширений минимальной логики равен дизъюнктному объединению трех подклассов,

$$\mathbf{Jhn} = \mathbf{Int} \cup \mathbf{Neg} \cup \mathbf{Par}.$$

Оказывается, что логики каждого из этих подклассов образуют интервал в **Jhn**, рассматриваемом как решетка логик, а шесть определенных выше логик являются граничными точками этих интервалов.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1** [3]. *Для каждой логики* $\mathbf{L} \in \mathbf{Par}$ *верны следующие эквивалентности:*

1) $\mathbf{L} \in \mathbf{Int} \iff \mathbf{Li} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{Lk}$;

2) $\mathbf{L} \in \mathbf{Neg} \iff \mathbf{Ln} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{Lmn}$;

3) $\mathbf{L} \in \mathbf{Par} \iff \mathbf{Lj} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{Le}$.

Далее будут приведены некоторые определения и факты, касающиеся алгебраической семантики пропозициональных логик. Более детальная информация может быть найдена в [6,7].

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра сигнатуры $\{\vee, \wedge, \supset, \bot, 1\}$ с дополнительной константой 1 для единственного выделенного элемента. Произвольное отображение $V: \{p_0, p_1, \ldots\} \to A$ из множества пропозициональных переменных в универсум алгебры $\mathbf{A}$ называется $\mathbf{A}$-*оценкой*. Каждая $\mathbf{A}$-оценка может быть естественным образом расширена на множество всех формул. Формула $\varphi$ *истинна* в алгебре $\mathbf{A}$, или является *тождеством* алгебры $\mathbf{A}$ (пишем $\mathbf{A} \models \varphi$), если $V(\varphi) = 1$ для всех $\mathbf{A}$- оценок $V$.

Нетрудно проверить, что множество формул $\mathbf{LA} = \{\varphi | \mathbf{A} \models \varphi\}$ является логикой, которую мы будем называть *логикой* алгебры $\mathbf{A}$. *Логика класса алгебр* $\mathcal{K}$ — это пересечение логик алгебр из $\mathcal{K}$,

$$\mathbf{L}\mathcal{K} = \bigcap \{\mathbf{LA} | \mathbf{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Говорим, что алгебра $\mathbf{A}$ является *моделью* логики $\mathbf{L}$, если $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{LA}$. Если же $\mathbf{L} = \mathbf{LA}$, мы будем говорить, что алгебра $\mathbf{A}$ является *характеристической моделью* логики $\mathbf{L}$. Каждая логика из класса **Jhn** имеет характеристическую модель (см. [7,Ch.III,Sec.3]).

Под $j$-*алгеброй* мы понимаем алгебру $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \supset, \bot, 1\rangle$ такую, что алгебра $\langle A, \wedge, \vee, \supset, 1\rangle$ является импликативной решеткой, а константа $\bot$ интерпретируется произвольным элементом из универсума $A$.

*Гейтингова алгебра* — это $j$-алгебра с наименьшим элементом $\bot$. *Негативная алгебра* — это $j$-алгебра с наибольшим элементом $\bot$, т.е. $\bot = 1$.

*Алгеброй Пирса* мы называем импликативную решетку, удовлетворяющую тождеству **P** (или, что эквивалентно, тождеству **E**). *Алгебра Пирса–Иогансон*, или коротко, *pj–алгебра* (*негативная алгебра Пирса*, *Булева алгебра* ) — это $j$–алгебра (соответственно негативная алгебра, Гейтингова алгебра), удовлетворяющая тождеству **P**.

Все определенные выше классы алгебр являются многообразиями, определяющими следующие логики:

- **Lj** — это логика многообразия $j$–алгебр;
- **Li** — это логика многообразия Гейтинговых алгебр;
- **Ln** — это логика многообразия негативных $j$–алгебр;
- **Le** — это логика многообразия $pj$–алгебр;
- **Lk** — это логика многообразия Булевых алгебр;
- **Lmn** — это логика многообразия негативных алгебр Пирса.

Для $j$–алгебры $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \supset, \perp, 1\rangle$ определяем $A^{\perp} \rightleftharpoons \{b \in A \mid b \geq \perp\}$ и $A_{\perp} \rightleftharpoons \{b \in A \mid b \leq \perp\}$. Очевидно, что множество $A^{\perp}$ замкнуто относительно операций алгебры **A** и мы можем определить $j$–подалгебру $\mathbf{A}^{\perp}$ алгебры **A** с универсумом $A^{\perp}$, являющуюся, как несложно заметить, Гейтинговой алгеброй. За исключением случая $\perp = 1$, множество $A_{\perp}$ образует подрешетку, но не $j$–подалгебру алгебры **A**, так как $A_{\perp}$ не замкнуто относительно импликации. Тем не менее, операция $x \supset_{\perp} y \rightleftharpoons (x \supset y) \wedge \perp$ обращает $A_{\perp}$ в $j$–алгебру с единичным элементом $\perp$, т.е. в негативную алгебру, которую мы будем обозначать $\mathbf{A}_{\perp}$.

Только что определенные Гейтингову алгебру $\mathbf{A}^{\perp}$ и негативную алгебру $\mathbf{A}_{\perp}$ мы будем называть *верхней* и *нижней алгебрами, ассоциированными* с $j$–алгеброй **A**.

Для произвольной $j$–алгебры **A** и Гейтинговой алгебры **B**, имеющих непересекающиеся универсумы, через $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ мы будем обозначать $j$–алгебру, полученную отождествлением наибольшего элемента алгебры **A** и наименьшего элемента алгебры **B**. Разумеется, противоречие алгебры **A** будет играть роль $\perp$ в результирующей алгебре $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$.

Теперь, с произвольным расширением $\mathbf{L}$ минимальной логики мы свяжем пару логик, одна из которых промежуточная, а другая — негативная. Эти логики мы будем называть интуиционистским и негативным напарниками логики $\mathbf{L}$, и они будут определены таким образом, что верхние (нижние) алгебры моделей логики $\mathbf{L}$ — это в точности модели интуиционистского (негативного) напарника логики $\mathbf{L}$.

Определим следующую трансляцию. Если $\varphi(p_0,\ldots,p_n)$ — формула с пропозициональными переменными из списка $p_0,\ldots,p_n$, то мы полагаем $I(\varphi) \rightleftharpoons \varphi(p_0 \vee \bot,\ldots,p_n \vee \bot)$.

Для логики $\mathbf{L}$, расширяющей $\mathbf{Lj}$, определим

$$\mathbf{L}_{\mathbf{int}} \rightleftharpoons \{\varphi \mid \mathbf{L} \vdash I(\varphi)\},\ \mathbf{L}_{\mathbf{neg}} \rightleftharpoons \{\varphi \mid \mathbf{L} \vdash \bot \supset \varphi\}.$$

Легко видеть, что множества $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ и $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ образуют логики. Назовем логики $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ и $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ соответственно *интуиционистским* и *негативным напарниками* логики $\mathbf{L}$.

Перечислим ряд простых свойств введенных выше понятий.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2** [4].

1. *Для любой логики* $\mathbf{L} \in \mathbf{Par}$, *имеем* $\mathbf{L}_{\mathbf{int}} \in \mathbf{Int}$, $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}} \in \mathbf{Neg}$. *Кроме того, справедливы равенства* $\mathbf{L}_{\mathbf{int}} = \mathbf{L}+\{\bot \supset p\}$ *и* $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}} = \mathbf{L} + \{\bot\}$.

2. $\mathbf{L} \in \mathbf{Int}$, *если и только если* $\mathbf{L} \neq \mathcal{F}$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ *и* $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}} = \mathcal{F}$.

3. $\mathbf{L} \in \mathbf{Neg}$, *если и только если* $\mathbf{L} \neq \mathcal{F}$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ *и* $\mathbf{L}_{\mathbf{int}} = \mathcal{F}$.

4. *Если* $\mathbf{Lj} \subseteq \mathbf{L}^1 \subseteq \mathbf{L}^2$, *то* $\mathbf{L}^1_{\mathbf{int}} \subseteq \mathbf{L}^2_{\mathbf{int}}$ *и* $\mathbf{L}^1_{\mathbf{neg}} \subseteq \mathbf{L}^2_{\mathbf{neg}}$.

5. *Если* $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$, *то* $\mathbf{L}_{\mathbf{int}} \subseteq \mathbf{L}_1$.

6. *Если* $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_1 \in \mathbf{Neg}$, *то* $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}} \subseteq \mathbf{L}_1$.

Мы видим, в частности, что напарник $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ является наименьшей промежуточной логикой, содержащей $\mathbf{L}$, а $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ — наименьшей негативной логикой с тем же самым свойством.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3** [4]. *Пусть* $\mathbf{L} \in \mathbf{Jhn}$. *Верны следующие утверждения:*

1) *если алгебра* $\mathbf{A}$ *является моделью логики* $\mathbf{L}$, *то* $\mathbf{A}^{\bot} \models \mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ *и* $\mathbf{A}_{\bot} \models \mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$;

2) *если алгебра* $\mathbf{A}$ *является характеристической моделью логики* $\mathbf{L}$, *то* $\mathbf{LA}^{\bot} = \mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ *и* $\mathbf{LA}_{\bot} = \mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$.

Далее рассмотрим классы логик с фиксированными интуиционистским и негативным напарниками. Для логик $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ и

$\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$, определим

$$Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) \rightleftharpoons \{\mathbf{L} \supseteq \mathbf{Lj} \mid \mathbf{L}_{\mathbf{int}} = \mathbf{L}_1,\ \mathbf{L}_{\mathbf{neg}} = \mathbf{L}_2\}.$$

Определим также логику

$$\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2 \rightleftharpoons \mathbf{Lj} + \{I(\varphi),\ \bot \supset \psi \mid \varphi \in \mathbf{L}_1,\ \psi \in \mathbf{L}_2\},$$

которую мы будем называть *свободной комбинацией* логик $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4** [4]. *Пусть* $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ *и* $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$. *Тогда*

$$Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) = [\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2].$$

Следующее предложение позволяет построить аксиоматику логики $\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2$ относительно $\mathbf{Lj}$ по заданным аксиоматикам логики $\mathbf{L}_1$ относительно $\mathbf{Li}$ и логики $\mathbf{L}_2$ относительно $\mathbf{Ln}$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5** [4]. *Пусть* $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$, $\mathbf{L}_1 = \mathbf{Li} + \{\varphi_i \mid i \in I\}$ *и* $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$, $\mathbf{L}_2 = \mathbf{Ln} + \{\psi_j \mid j \in J\}$. *Тогда*

$$\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2 = \mathbf{Lj} + \{\ I(\varphi_i),\ \bot \supset \psi_j \mid i \in I,\ j \in J\ \}.$$

Семантическая характеризация свободного произведения логик дана в следующем

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6** [4]. *Пусть* $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ *и* $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$, *кроме того, пусть* $\mathbf{A}$ — *произвольная* $j$-*алгебра. Тогда* $\mathbf{A} \models \mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2$ *в том и только в том случае, если* $\mathbf{A}^{\bot} \models \mathbf{L}_1$ *и* $\mathbf{A}_{\bot} \models \mathbf{L}_2$.

Как видно из предложения 1.4, класс $\mathbf{Lj}$–расширений раскладывается в объединение попарно непересекающихся интервалов

$$\mathbf{Jhn} = \bigcup\{Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) \mid \mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int},\ \mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}\}.$$

Таким образом, исследование класса $\mathbf{Lj}$–расширений сводится к проблеме изучения структуры интервалов вида $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$, где $\mathbf{L}_1$ — промежуточная, а $\mathbf{L}_2$ — негативная логики.

Далее заметим, что верхние точки интервалов $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$ также образуют интервал в решетке $\mathbf{Jhn}$, именно $[\mathbf{Le}', \mathbf{Le}]$, где

$\mathbf{Le}'$ — логика, получающаяся присоединением к $\mathbf{Lj}$ одной из следующих аксиом:

$\mathbf{E}'$. $\bot \vee (\bot \supset p)$;

$\mathbf{D}'$. $(p \vee \bot \supset q \vee \bot) \supset ((p \supset q) \vee \bot)$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7** [4]. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *$j$-алгебра. Алгебра* $\mathbf{A}$ *является моделью логики* $\mathbf{Le}'$, *если и только если выполнено одно из следующих эквивалентных условий* :

1) *отображение* $\varepsilon(x) = x \vee \bot$ *является эпиморфизмом $j$-алгебры* $\mathbf{A}$ *на Гейтингову алгебру* $\mathbf{A}^{\bot}$;

2) *отображение* $\lambda(x) = (x \vee \bot, x \wedge \bot)$ *является изоморфизмом $j$-алгебр* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}^{\bot} \times \mathbf{A}_{\bot}$.

**СЛЕДСТВИЕ 1.8** [4]. *Пусть* $\mathbf{L} \in \mathbf{Jhn}$. *Тогда* $\mathbf{Le}' \subseteq \mathbf{L} \subseteq \subseteq \mathbf{Le}$, *если и только если* $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, *где* $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ *и* $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$.

Разумеется, в предположениях последнего следствия мы имеем $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$, то $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_{int}$ и $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_{neg}$.

Рассмотрим следующий подстановочный частный случай закона Пирса

$\mathbf{P}'$. $((\bot \supset p) \supset \bot) \supset \bot = \neg\neg(\bot \supset p)$.

Логику $\mathbf{Lg} \rightleftharpoons \mathbf{Lj} + \{\mathbf{P}'\}$ назовем *логикой Гливенко.* В работе [8, p.46] упоминается, что логика Гливенко является наименьшей среди логик, для которых выводимость двойного отрицания $\neg\neg\varphi$ равнозначна выводимости формулы $\varphi$ в классической логике. К сожалению, упомянутая работа не содержит ни доказательства упомянутого факта, ни дальнейших ссылок. В [4] приведено доказательство этого факта, основанное на следующей характеристике моделей логики $\mathbf{Lg}$.

Если $\mathbf{A}$ — Гейтингова алгебра, мы обозначим через $\nabla_{\mathbf{A}}$ ее фильтр плотных элементов, а через $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ Булеву алгебру регулярных элементов. Напомним, что $\nabla_{\mathbf{A}} = \{a \in \mathbf{A} \mid \neg\neg a = 1\}$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{a \in \mathbf{A} \mid a \vee \neg a = 1\}$, а также, что Булева алгебра регулярных элементов изоморфна фактор-алгебре алгебры $\mathbf{A}$ по фильтру плотных элементов, $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \cong \mathbf{A}/\nabla_{\mathbf{A}}$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9** [4]. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *$j$-алгебра. Тогда* $\mathbf{A}$ *является моделью логики* $\mathbf{Lg}$, *если и только если* $\bot \vee (\bot \supset a) \in \nabla_{\mathbf{A}^{\bot}}$ *для любых* $a \in \mathbf{A}$.

Логика $\mathbf{Lg}$ является примером логики отличной от концевых точек интервала $Spec(\mathbf{Lg}_{int}, \mathbf{Lg}_{neg}) = Spec(\mathbf{Li}, \mathbf{Ln})$.

В заключение секции будет сказано несколько слов о семантике Крипке для расширений минимальной логики. За дальнейшими подробностями читатель может обратиться к работе [8].

*$j$-Шкалой Крипке*, или просто *$j$-шкалой* назовем тройку $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q\rangle$, где $W$ — множество возможных миров, $\sqsubseteq$ — отношение достижимости такое, что $\langle W, \sqsubseteq\rangle$ является обычной шкалой Крипке для интуиционистской логики, т.е. частично упорядоченным множеством, а $Q \subseteq W$ — конус относительно $\sqsubseteq$, который мы будем называть конусом *ненормальных миров*. Миры, не лежащие в $Q$, будут называться *нормальными*. Как обычно, *оценкой* $j$-шкалы $\mathcal{W}$ назовем отображение $v$ множества пропозициональных переменных во множество конусов порядка $\langle W, \sqsubseteq\rangle$. *Модель* $\mu = \langle \mathcal{W}, v\rangle$ — это пара, состоящая из $j$-шкалы и ее оценки. Мы будем говорить также в этом случае, что $\mu$ — модель на $\mathcal{W}$.

Для модели $\mu = \langle \mathcal{W}, v\rangle$, где $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q\rangle$, элемента $x \in W$ и формулы $\varphi$ мы определим отношение выполнимости $\mu \models_x \varphi$ индукцией по сложности формулы примерно так же, как для обычных шкал Крипке. Единственным исключением является случай константы $\bot$: $\mu \models_x \bot \quad \Leftrightarrow \quad x \in Q$. Будем читать запись $\mu \models_x \varphi$ как "формула $\varphi$ верна в мире (в точке) $x$ в модели $\mu$". Как обычно, говорим что формула $\varphi$ *истинна на модели* $\mu = \langle \mathcal{W}, v\rangle$, $\mu \models \varphi$, если для всех $x \in W$ выполняется отношение $\mu \models_x \varphi$. Формула $\varphi$ *истинна на $j$-шкале* $\mathcal{W}$, $\mathcal{W} \models \varphi$, если она истина на модели $\langle \mathcal{W}, v\rangle$ для произвольной оценки $v$ $j$-шкалы $\mathcal{W}$. Формула $\varphi$ *общезначима на классе* $\mathcal{K}$ $j$-шкал Крипке, если $\mathcal{W} \models \varphi$ для любой $j$-шкалы $\mathcal{W} \in \mathcal{K}$.

Говорим, что $j$-шкала $\mathcal{W}$ является *моделью* логики $\mathbf{L} \in \mathbf{Jhn}$, $\mathcal{W} \models \mathbf{L}$, если $\mathcal{W} \models \varphi$ для всех $\varphi \in \mathbf{L}$. Для класса $j$-шкал $\mathcal{K}$ полагаем $\mathbf{L}\mathcal{K} \rightleftharpoons \{\varphi \mid \forall \mathcal{W} \in \mathcal{K}\ (\mathcal{W} \models \varphi)\}$.

Говорим, что логика $\mathbf{L} \in \mathbf{Jhn}$ *характеризуется* классом $j$-шкал $\mathcal{K}$, если $\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathcal{K}$.

Мы будем называть $j$-шкалу $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q\rangle$ *нормальной*, если $Q = \emptyset$, т.е., если все миры данной шкалы нормальны. Ясно, что нормальная $j$-шкала может быть отождествлена с обычной шкалой Крипке для интуиционистской логики. Назовем $j$-шкалу $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q\rangle$ *нормальной*, если $Q = W$,т.е., если все миры нормальные. Наконец, $j$-шкала $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q\rangle$ будет называться *тождественной*, если отношение достижимости $\sqsubseteq$ тождественно на $W$, $\sqsubseteq = id_W$. Пусть $Nor$ обозначает класс всех нормальных $j$–шкал, $Inn$ — класс всех ненормальных $j$–шкал, $Id$ — класс всех тождественных $j$–шкал.

Определим также следующие классы $j$–шкал. Пусть $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q\rangle$ — $j$–шкала. Говорим, что шкала $\mathcal{W}$ *разделена*, если

$$\forall x, y \in W((x \notin Q \wedge y \in Q) \Rightarrow x \sqsubseteq y.$$

Будем говорить, что шкала $\mathcal{W}$ *замкнута*, если

$$\forall x, y \in W((x \notin Q \wedge y \in Q) \Rightarrow \neg(x \sqsubseteq y).$$

Обозначим через $Sep$ класс всех разделенных $j$–шкал и через $Cl$ класс всех замкнутых $j$–шкал.

Определенные выше классы $j$–шкал характеризуют следующие логики.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10** [4].

1. *Логика* **Lj** *характеризуется классом всех $j$–шкал.*
2. *Логика* **Li** *характеризуется классом $Nor$.*
3. *Логика* **Ln** *характеризуется классом $Inn$.*
4. *Логика* **Le** *характеризуется классом $Id$.*
5. *Логика* **Lk** *характеризуется классом $Nor \cap Id$.*
6. *Логика* **Lmn** *характеризуется классом $Inn \cap Id$.*
7. *Логика* $\mathbf{Ljl'} \rightleftharpoons \mathbf{Lj} + \{(p \supset \bot) \vee (\bot \supset p)\}$ *характеризуется классом $Sep$.*
8. *Логика* **Le′** *характеризуется классом $Cl$.*

Приводимая ниже характеризация логики Гливенко была получена П.Вудрафом [9] и использована впоследствии Р.Гольдблатом [2] для доказательства разрешимости логики **Lg**.

Назовем $j$–шкалу $\mathcal{W} = \langle W, \sqsubseteq, Q\rangle$ *плотной*, если

$$\forall x \in W(x \notin Q \Rightarrow \exists y \sqsupseteq x \forall z \sqsupseteq y(z \notin Q)).$$

Класс всех плотных $j$–шкал будет обозначаться $Den$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11** [4]. *Логика* **Lg** *характеризуется классом $Den$.*

## 2. Представление $j$-алгебр

В этом разделе будет дано представление для $j$-алгебр, которое позволит описывать классы моделей для логик, лежащих внутри интервалов вида $[\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2]$, где $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ и $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$. Как показывают результаты предыдущего раздела, пересечение $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ промежуточной и негативной логик характеризуется классом всех прямых произведений вида $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$ — Гейтингова алгебра, являющаяся моделью $\mathbf{L}_1$, а $\mathbf{B}$ — негативная алгебра, которая является моделью $\mathbf{L}_2$. Действительно, согласно следствию 1.8, пересечение $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ расширяет логику $\mathbf{Le}'$, причем каждая модель $\mathbf{A}$ логики $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ изоморфна $\mathbf{A}^{\perp} \times \mathbf{A}_{\perp}$ по предложению 1.7. Остается заметить, что ввиду предложения 1.4 $\mathbf{L}_1 = (\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2)_{\mathbf{int}}$ и $\mathbf{L}_2 = (\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2)_{\mathbf{neg}}$. Таким образом, по предложению 1.3, мы имеем $\mathbf{A}^{\perp} \models \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{A}_{\perp} \models \mathbf{L}_2$.

В то же время, свободная комбинация логик $\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2$ характеризуется классом всех $j$-алгебр $\mathbf{A}$ таких, что верхняя алгебра $\mathbf{A}^{\perp}$ является моделью логики $\mathbf{L}_1$ , а нижняя алгебра $\mathbf{A}_{\perp}$ — моделью логики $\mathbf{L}_2$ (см. предложение 1.6). Здесь естественно возникает вопрос. Если даны Гейтингова алгебра $\mathbf{B}$ и негативная алгебра $\mathbf{C}$, то чем отличается произвольная $j$-алгебра $\mathbf{A}$ с условием $\mathbf{A}^{\perp} \cong \mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_{\perp} \cong \mathbf{C}$ от прямого произведения алгебр $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$? Предложение 1.9 позволяет предположить, что именно элементы вида $\perp \vee (\perp \supset a)$, где $a \in \mathbf{A}_{\perp}$ будут играть специальную роль в определении структуры $j$-алгебры $\mathbf{A}$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.** *Пусть $\mathbf{A}$ — произвольная $j$-алгебра, а отображение $f_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}_{\perp} \to \mathbf{A}^{\perp}$ задано правилом $f_{\mathbf{A}}(x) = \perp \vee (\perp \supset x)$. Тогда имеют место следующие факты:*

1) *отображение $f_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}_{\perp} \to \mathbf{A}^{\perp}$ является полурешеточным гомоморфизмом, сохраняющим пересечение $\wedge$ и наибольший элемент $f_{\mathbf{A}}(\perp) = 1$;*

2) *вложение $\lambda_{\perp} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\perp} \times \mathbf{A}_{\perp}$, где $\lambda_{\perp}(x) = (x \vee \perp, x \wedge \perp)$, имеет следующий образ:*

$$\lambda_{\perp}(\mathbf{A}) = \{(x, y) \mid x \leq f_{\mathbf{A}}(y),\ x \in \mathbf{A}^{\perp},\ y \in \mathbf{A}_{\perp}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Для краткости опускаем нижний индекс в обозначении $f_{\mathbf{A}}$. Вычислим $f(\bot) = \bot \vee (\bot \supset \bot) = 1$. Далее,

$$f(y_1) \wedge f(y_2) = (\bot \vee (\bot \supset y_1)) \wedge (\bot \vee (\bot \supset y_2)) =$$

$$= \bot \vee ((\bot \supset y_1) \wedge (\bot \supset y_2)) = \bot \vee (\bot \supset y_1 \wedge y_2) = f(y_1 \wedge y_2).$$

Таким образом, мы проверили, что $f$ — это полурешеточный гомоморфизм, сохраняющий единичный элемент.

2. Если $a \in \mathbf{A}$, то $(a \vee \bot, a \wedge \bot) \in \lambda_\bot(\mathbf{A})$ и верно неравенство $a \vee \bot \leq \bot \vee (\bot \supset a \wedge \bot)$. Последнее можно проверить, доказав в $\mathbf{Lj}$ формулу $p \vee \bot \supset \bot \vee (\bot \supset p \wedge \bot)$. Таким образом, включение

$$\lambda_\bot(\mathbf{A}) \subseteq \{(x, y) \mid x \leq f(y),\ x \in \mathbf{A}^\bot,\ y \in \mathbf{A}_\bot\}$$

доказано. Пусть теперь $x, y \in \mathbf{A}$, $x \geq \bot$, $y \leq \bot$ и $x \leq \bot \vee (\bot \supset y)$. Покажем, что существует элемент $a \in \mathbf{A}$ такой, что $x = a \vee \bot$ и $y = a \wedge \bot$. Полагаем $a = x \wedge (\bot \supset y)$, тогда $a \vee \bot = (\bot \vee x) \wedge (\bot \vee (\bot \supset y)) = x \wedge (\bot \vee (\bot \supset y)) = x$ и, кроме того, $a \wedge \bot = x \wedge (\bot \supset y) \wedge \bot = \bot \wedge (\bot \supset y) = y$. Обратное включение также проверено.

Предложение доказано.

Как видно из последнего предложения, каждая $j$–алгебра $\mathbf{A}$ определяется тройкой $(\mathbf{A}^\bot, \mathbf{A}_\bot, f_{\mathbf{A}})$, состоящей из Гейтинговой алгебры, негативной алгебры и полурешеточного гомоморфизма. Теперь наоборот, возьмем тройку $(\mathbf{B}, \mathbf{C}, f : \mathbf{C} \to \mathbf{B})$, где $\mathbf{B}$ — произвольная Гейтингова алгебра, $\mathbf{C}$ — произвольная негативная алгебра, а $f$ — произвольный полурешеточный гомоморфизм из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{B}$, сохраняющий пересечение и наибольший элемент. По этой тройке мы постараемся сконструировать $j$–алгебру $\mathbf{A}$, верхняя и нижняя алгебры которой изоморфны алгебрам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно, а $f_{\mathbf{A}}$ индуцируется естественным образом гомоморфизмом $f$.

Определим решетку $\mathbf{B} \times_f \mathbf{C}$ как подрешетку прямого произведения $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ с универсумом

$$|\mathbf{B} \times_f \mathbf{C}| \rightleftharpoons \{(x, y) \mid x \in \mathbf{B},\ y \in \mathbf{C},\ x \leq f(y)\}.$$

Это действительно подрешетка, поскольку отображение $f$ сохраняет пересечение и, следовательно, порядок, откуда легко вытекает соотношение $f(y_1 \vee y_2) \leq f(y_1) \vee f(y_2)$. Из последнего соотношения немедленно следует, что множество $|\mathbf{B} \times_f \mathbf{C}|$ замкнуто относительно покомпонентных операций прямого произведения решеток. Следующее предложение показывает, что эта решетка может рассматриваться как $j$-алгебры.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.** *Пусть* $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $f$, *и* $\mathbf{A} \rightleftharpoons \mathbf{B} \times_f \mathbf{C}$ *такие же как выше. Решетка* $\mathbf{A}$ *имеет естественную структуру* $j$*-алгебры, где операция псевдодополнения задана правилом*

$$(x_1, y_1) \supset (x_2, y_2) = ((x_1 \supset x_2) \wedge f(y_1 \supset y_2),\ y_1 \supset y_2),$$

*а единичный элемент и противоречие алгебры* $\mathbf{A}$ *удовлетворяют соотношениям:* $1_{\mathbf{A}} = (1_{\mathbf{B}}, \bot_{\mathbf{C}})$ *и* $\bot_{\mathbf{A}} = (\bot_{\mathbf{B}}, \bot_{\mathbf{C}})$. *Более того, выполняется следующее:* $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}^{\bot}$, $\mathbf{C} \cong \mathbf{A}_{\bot}$, *и эти изоморфизмы заданы правилами* $x \mapsto (x, \bot_{\mathbf{C}})$, $x \in \mathbf{B}$, *и* $y \mapsto$ $\mapsto (\bot_{\mathbf{B}}, y)$, $y \in \mathbf{C}$ *соответственно. Наконец, для всех* $y \in \mathbf{C}$ *имеем* $(f(y), \bot_{\mathbf{C}}) = \bot_{\mathbf{A}} \vee (\bot_{\mathbf{A}} \supset (\bot_{\mathbf{B}}, y)) = f_{\mathbf{A}}((\bot_{\mathbf{B}}, y))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что операция псевдодополнения корректно определена. Пусть $b_1, b_2 \in \mathbf{B}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$, $b_1 \leq f(c_1)$, и $b_2 \leq f(c_2)$. Элемент $(b_1, c_1) \supset (b_2, c_2)$, в случае если он определен, должен быть наибольшим среди элементов $(x, y)$, $x \leq f(y)$ таких, что $(b_1, c_1) \wedge (x, y) \leq (b_2, c_2)$. Последнее эквивалентно соотношениям $x \leq (b_1 \supset b_2) \wedge f(y)$ и $y \leq c_1 \supset c_2$. Принимая во внимание, что $f$ сохраняет порядок, мы немедленно получим, что элемент $((b_1 \supset b_2) \wedge f(c_1 \supset c_2),\ c_1 \supset c_2)$ является искомым псевдодополнением.

Остальные соотношения, за исключением последнего, тривиальны. Проверим последнее равенство, используя выведенную формулу для псевдодополнения. Имеем

$$\bot_{\mathbf{A}} \vee (\bot_{\mathbf{A}} \supset (\bot_{\mathbf{B}}, y)) = (\bot_{\mathbf{B}}, \bot_{\mathbf{C}}) \vee ((\bot_{\mathbf{B}}, \bot_{\mathbf{C}}) \supset (\bot_{\mathbf{B}}, y)) =$$

$$= (\bot_{\mathbf{B}}, \bot_{\mathbf{C}}) \vee (1_{\mathbf{B}} \wedge f(\bot_{\mathbf{C}} \supset y), \bot_{\mathbf{C}} \supset y) =$$

$$= (\bot_{\mathbf{B}}, \bot_{\mathbf{C}}) \vee (f(y), y) = (f(y), \bot_{\mathbf{C}}).$$

Предложение доказано.

Как показывают вышеприведенные рассуждения, чтобы задать класс $j$-алгебр, характеризующий то или иное расширение $\mathbf{L}$ минимальной логики, мы должны выделить класс Гейтинговых алгебр и класс негативных алгебр изоморфных соответственно верхним и нижним алгебрам, ассоциированным с моделями логики $\mathbf{L}$. Сделав этот шаг, мы зафиксируем интуиционистский и негативный напарники логики $\mathbf{L}$. Далее, чтобы определить место логики $\mathbf{L}$ внутри интервала $[\mathbf{L}_{\mathrm{int}} * \mathbf{L}_{\mathrm{neg}}, \mathbf{L}_{\mathrm{int}} \cap \mathbf{L}_{\mathrm{neg}}]$, мы должны выделить тем или иным способом класс допустимых полурешеточных гомоморфизмов из негативных алгебр в Гейтинговы. Если мы не накладываем ограничений на класс гомоморфизмов, у нас получится свободная комбинация промежуточной и негативной логик, характеризующихся выбранными классами Гейтинговых и негативных алгебр (см. предложение 1.6). Если мы допускаем только гомоморфизмы, тождественно равные единичному элементу, мы получаем пересечение $\mathbf{L}_{\mathrm{int}} \cap \mathbf{L}_{\mathrm{neg}}$. Действительно, $j$–алгебра $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$ совпадает с прямым произведением $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, если и только если $f(y) = 1$ для всех $y \in \mathbf{B}$.

Интересно рассмотреть логики, отличные от пересечений и свободных комбинаций промежуточных и негативных логик, т.е. логики, лежащие внутри интервалов вида $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$. Многочисленные примеры таких логик будут изучены в следующем разделе.

## 3. Логики Сегерберга и их семантика

В этом разделе, используя полученное представление $j$–алгебр, мы опишем алгебраическую семантику для логик, изучавшихся ранее К.Сегербергом [8], который охарактеризовал эти логики в терминах семантики Крипке. Кроме самой логики $\mathbf{Lj}$ К.Сегерберг [8] рассмотрел логики, полученные присоединением к $\mathbf{Lj}$ одной или нескольких аксиом из следующего списка:

**I**: $\bot \supset p$

**K**: $\neg p \vee \neg\neg p$

**X**: $p \vee \neg p$

**L**: $(p \supset q) \vee (q \supset p)$

**E**: $p \vee (p \supset q)$

**L′** : $\neg p \vee (\bot \supset p) = (p \supset \bot) \vee (\bot \supset p)$

**E′**: $\bot \vee (\bot \supset p)$

$\mathbf{Q}$: $\bot$

$\mathbf{L_N}$: $(p \supset q \vee \bot) \vee (q \supset p \vee \bot)$

$\mathbf{L_1^Q}$: $\bot \supset (p \supset q) \vee (q \supset p)$

$\mathbf{L_2^Q}$: $(\bot \supset (p \supset q)) \vee (\bot \supset (q \supset p))$

$\mathbf{E_1^Q}$: $\bot \supset p \vee (p \supset q)$

$\mathbf{E_2^Q}$: $(\bot \supset p) \vee (\bot \supset (p \supset q))$

$\mathbf{P'}$: $\neg\neg(\bot \supset p)$

Комбинируя эти аксиомы, мы получим большое число логик, причем только некоторые их них имеют традиционное обозначение, например $\mathbf{Li} = \mathbf{Lj} + \{\mathbf{I}\}$. Это приводит к необходимости ввести какую-то систему обозначений для новых логик.

Если некоторая логика получается из логики уже имеющей обозначение, скажем $\mathbf{L}$, путем присоединения аксиомы обозначенной прописной буквой, скажем $\mathbf{X}$, то обозначение этой новой логики получается присоединением соответствующей строчной буквы к уже существующему обозначению: $\mathbf{Lx} \rightleftharpoons \mathbf{L} + \{\mathbf{X}\}$. Разумеется, одна логика может получить несколько обозначений. В соответствие с принятым соглашением мы имеем, например, $\mathbf{Lji} = \mathbf{Li}$, $\mathbf{Lje} = \mathbf{Le}$, $\mathbf{Ljq} = \mathbf{Ln}$, $\mathbf{Lix} = \mathbf{Ljix} = \mathbf{Lk}$, и наконец, $\mathbf{Ljp'} = \mathbf{Lg}$.

Стоит сказать несколько слов о том, каким образом возникают аксиомы из приведенного выше списка. Семантика Крипке для расширений $\mathbf{Lj}$ была описана в разделе 1. Напомним, что каждая $j$-шкала делится на две части, состоящие из нормальных и ненормальных миров соответственно. Первая в списке аксиома $\mathbf{I}$, аксиоматизирующая интуиционистскую логику относительно минимальной , выделяет класс $j$-шкал, в которых все миры нормальны. Следующие две аксиомы — это хорошо известные закон исключенного третьего $\mathbf{X}$ и слабый закон исключенного третьего $\mathbf{K}$. Эти аксиомы накладывают ограничения на отношение достижимости только в нормальной части $j$-шкалы. Оно должно быть нормальным в случае аксиомы $\mathbf{X}$ и направленным в случае аксиомы $\mathbf{K}$. Аксиома линейности Даммета $\mathbf{L}$ и обобщенный закон исключенного третьего $\mathbf{E}$ определяю. свойства отношения достижимости на всей шкале. Порядок $j$-шкалы, удовлетворяющей аксиоме **L**, должен быть линейным, а $j$-шкала, на которой выполнена аксиома **E**, должна иметь тождественное отношение достижимости. Следующие две аксиомы, **L′** и **E′**, являются частным случаем аксиом **L** и **E** соответственно. Они не накладывают ограничений ни на нормальную, ни на ненормальную части $j$-шкалы, а только лишь на способ расположения конуса ненормальных элементов внутри шкалы (см. предложение 1.10).

Взаимное расположение логик, которые могут быть получены присоединением к **Lj** одной или нескольких из числа аксиом, перечисленных до этого момента, представлено на рис.1.

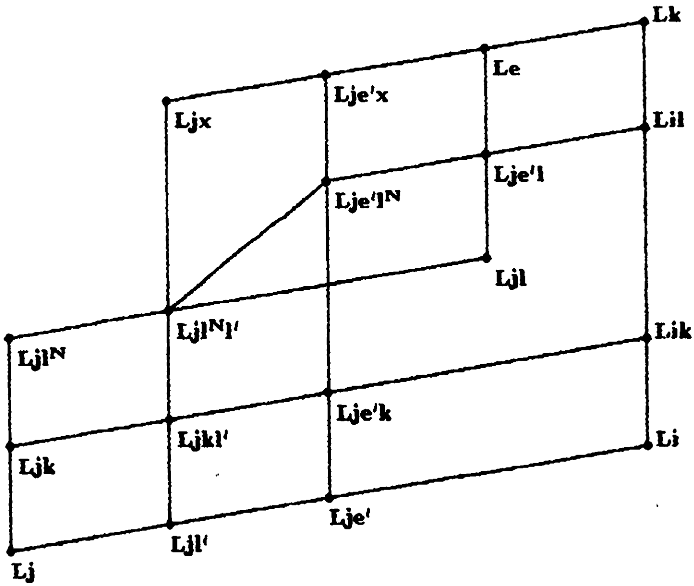



Рис. 1

Заметим, что эта диаграмма (так же, как и диаграмма, представленная на рис.2) учитывает только порядок, но не решеточную структуру класса **Jhn**. Все логики, представленные на диаграмме, различны и логика $\mathbf{L}_1$ содержится в логике $\mathbf{L}_2$, если и только если существует путь от $\mathbf{L}_1$ к $\mathbf{L}_2$, который в каждой точке возрастает или направлен вправо.

Вышеприведенная диаграмма содержит явные нерегулярности и для их объяснения К.Сегерберг вводит в рассмотрение ряд новых аксиом, уже не столь естественных, как те, что были рассмотрены ранее. "But as long as we cannot account for the irregularities in the above diagram, we cannot claim to understand the situation fully" ("Но пока мы не можем объяснить все нерегулярности вышеприведенной диаграммы, мы не можем утверждать, что полностью понимаем ситуацию") [8, p.41].

Как показывают предшествующие рассуждения, аксиома **X** может рассматриваться как релятивизация аксиомы **E** на нормальную часть $j$–шкалы. В самом деле, аксиома **E** накладывает условие "быть тождественным" на отношение достижимости, тогда как аксиома **X** накладывает то же самое условие "быть тождественным", но на ограничение отношения достижимости на нормальную часть $j$–шкалы. Следующие шесть аксиом в списке — это не рассматривавшаяся до Сегерберга аксиома **Q**, выделяющая класс ненормальных $j$–шкал, и релятивизации аксиом **E** и **L** на нормальную или ненормальную часть $j$–шкалы. Аксиома $\mathbf{L_N}$ является, по существу, ограничением аксиомы **L** на нормальные миры. Аксиомы $\mathbf{L}_1^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{L}_2^{\mathbf{Q}}$ — это различные варианты релятивизации аксиомы **L** на ненормальную часть $j$–шкалы. Ограничивая аксиому **E** на конус ненормальных элементов, К.Сегерберг также предлагает два варианта: $\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_2^{\mathbf{Q}}$.

Последняя аксиома списка $\mathbf{P}'$ подобна аксиомам $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{L}'$, так как она ограничивает только способ соединения нормальной и ненормальной частей $j$–шкалы (предложение 1.11). Эта аксиома так же, как и аксиомы $\mathbf{L}_1^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}$ лежит в стороне от главной линии рассмотрений работы [8].

Если мы исключим из приведенного в начале раздела списка аксиомы $\mathbf{P}'$, $\mathbf{L}_1^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}$, то логики, получающиеся присоединением к **Lj** одной или нескольких из числа оставшихся аксиом, составят замечательную диаграмму, представленную на рис. 2. Логики, которые уже были на рис. 1, выделены на этой диаграмме незакрашенными кружками. Способ расположения этих логик на рис. 2 вполне объясняет нерегулярности предыдущей диаграммы. Только для некоторых точек на диаграмме указаны явным образом имена соответствующих логик. Все остальные логики получаются комбинацией аксиом явно обозначенных логик, поэтому не составляет труда восстановить, какая логика соответствует той или иной точке на диаграмме. Например, на горизонтальной линии, заканчивающейся логикой **Lik**, лежат следующие логики: **Ljke′**, **Ljke′l$_2^Q$**, **Ljke′e$_2^Q$**(= **Le**) (слева

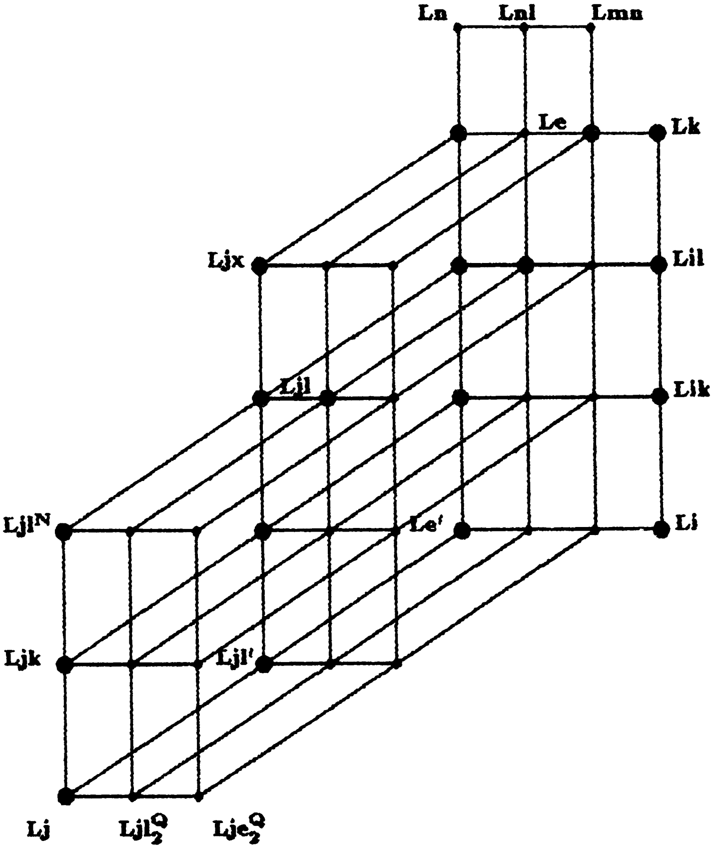



Рис. 2

направо). Отметим также равенство $\mathbf{Ljl} = \mathbf{Ljl^N l_2^Q}$. Как мы увидим ниже, равенство $\mathbf{Ljl} = \mathbf{Ljl^N l_1^Q}$ не имеет места, поэтому использование аксиомы $\mathbf{L_1^Q}$ вместо $\mathbf{L_2^Q}$ привело бы к диаграмме логик не столь регулярной, как представленная на рис. 2. Именно этот факт объясняет выбор К.Сегерберга между различными вариантами релятивизации аксиомы $\mathbf{L}$ на конус ненормальных миров.

Рассматриваемая диаграмма содержит только четыре промежуточные логики, они лежат на вертикальной линии от **Li** до **Lk**. Три негативных логики диаграммы расположены на горизонтальной линии от **Ln** до **Lmn**. Все остальные логики принадлежат классу **Par**. Они образуют трехмерную фигуру, размерности которой в точности соответствуют, как мы увидим позднее, трем параметрам, определяющим положение паранепротиворечивой логики в классе **Par**.

Чтобы прояснить упомянутое выше соответствие, мы перейдем к изучению алгебраической семантики логик Сегерберга.

Напомним, что *Стоуновская* алгебра — это Гейтингова алгебра, удовлетворяющая тождеству **K**. Пусть **A** — Гейтингова (негативная) алгебра. Будем называть **A** *Гейтинговой (негативной) l-алгеброй*, если $\mathbf{A} \models (p \supset q) \vee (q \supset p)$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.** *Пусть* **A** *— произвольная j-алгебра. Верны следующие эквивалентности:*

1. $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljk}$, *если и только если* $\mathbf{A}^{\perp}$ *— Стоуновская алгебра;*
2. $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljx}$, *если и только если* $\mathbf{A}^{\perp}$ *— Булева алгебра;*
3. $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljl'}$, *если и только если* $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}_{\perp}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\perp})$;
4. $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljl}$, *если и только если* $\mathbf{A}^{\perp}$ *и* $\mathbf{A}_{\perp}$ *являются l-алгебрами,* $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}_{\perp}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\perp})$ *и для всех* $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_{\perp}$ *верно равенство* $f_{\mathbf{A}}(y_1 \supset y_2) \vee f_{\mathbf{A}}(y_2 \supset y_1) = 1$;
5. $\mathbf{A} \models \mathbf{Lg}$, *если и только если* $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}_{\perp}) \subseteq \nabla(\mathbf{A}^{\perp})$;
6. $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljl^N}$, *если и только если* $\mathbf{A}^{\perp}$ *— l-алгебра;*
7. $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljl_1^Q}$, *если и только если* $\mathbf{A}_{\perp}$ *— l-алгебра;*

8. $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljl}_2^{\mathbf{Q}}$, *если и только если* $\mathbf{A}_\perp$ — *l-алгебра и для всех* $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_\perp$ *справедливо равенство* $f_{\mathbf{A}}(y_1 \supset y_2) \vee \vee f_{\mathbf{A}}(y_2 \supset y_1) = 1$;

9. $\mathbf{A} \models \mathbf{Lje}_1^{\mathbf{Q}}$, *если и только если* $\mathbf{A}_\perp$ *—негативная алгебра Пирса;*

10. $\mathbf{A} \models \mathbf{Lje}_2^{\mathbf{Q}}$, *если и только если* $\mathbf{A}_\perp$ — *негативная алгебра Пирса и для всех* $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_\perp$ *справедливо равенство* $f_{\mathbf{A}}(y_1) \vee f_{\mathbf{A}}(y_1 \supset y_2) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Пусть $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljk}$. Представим $\mathbf{A}$ в виде $\mathbf{A}^\perp \times_{f_{\mathbf{A}}} \mathbf{A}_\perp$, возьмем произвольный элемент $(x, y) \in \mathbf{A}$ и вычислим

$$((x,y) \supset (\perp,\perp)) \vee (((x,y) \supset (\perp,\perp)) \supset (\perp,\perp)) = (x \supset \perp, y \supset \perp) \vee$$

$$\vee((x \supset \perp, y \supset \perp) \supset (\perp,\perp)) = (\neg x, \perp) \vee ((\neg x, \perp) \supset (\perp,\perp)) =$$

$$= (\neg x, \perp) \vee (\neg\neg x, \perp) = (\neg x \vee \neg\neg x, \perp) = (1, \perp).$$

Последнее равенство имеет место в том и только в том случае, если тождество $\neg x \vee \neg\neg x = 1$ верно на $\mathbf{A}^\perp$, т.е. если $\mathbf{A}^\perp$ — Стоуновская алгебра.

2. Это утверждение проверяется непосредственным вычислением.

3. Пусть $(x, y) \in \mathbf{A}^\perp \times_{f_{\mathbf{A}}} \mathbf{A}_\perp$. Прямое вычисление дает

$$((x,y) \supset (\perp,\perp)) \vee ((\perp,\perp) \supset (x,y) = ((x \supset \perp) \vee f(y), \perp).$$

Здесь и далее мы опускаем нижний индекс в обозначении $f_{\mathbf{A}}$, если это не приводит к недоразумениям. Как можно заметить, формула $\mathbf{L}'$ является тождеством алгебры $\mathbf{A}$, если и только если для всех $x \in \mathbf{A}^\perp$, $y \in \mathbf{A}_\perp$, $x \le f(y)$, верно равенство $(x \supset \perp) \vee f(y) = 1_{\mathbf{A}^\perp}$. В частности, имеем $(f(y) \supset \perp) \vee f(y) = = \neg f(y) \vee f(y) = 1$, т.е. каждый элемент вида $f(y)$ регулярен. Обратная импликация легко следует из вышеприведенных рассуждений и того факта, что псевдодополнение убывает по первому аргументу. Действительно, если для некоторого $y \in \mathbf{A}_\perp$ мы имеем $(f(y) \supset \perp) \vee f(y) = 1_{\mathbf{A}^\perp}$, то для всех $x \in \mathbf{A}^\perp$, $x \le f(y)$ мы тоже имеем $(x \supset \perp) \vee f(y) = 1_{\mathbf{A}^\perp}$.

4. Предположим $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljl}$. В этом случае верхняя алгебра $\mathbf{A}^{\perp}$, являющаяся подалгеброй $\mathbf{A}$, будет $l$–алгеброй. Включение $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}_{\perp}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\perp})$ следует из п.3, так как $\mathbf{L}'$ — это частный случай аксиомы $\mathbf{L}$. Далее, напомним, что псевдодополнение $\supset_{\perp}$ алгебры $\mathbf{A}_{\perp}$ определено через псевдополнение $\supset$ алгебры $\mathbf{A}$ формулой $x \supset_{\perp} y = (x \supset y) \wedge \perp$. Вычислим

$$(x \supset_{\perp} y) \vee (y \supset_{\perp} x) = ((x \supset y) \wedge \perp) \vee ((y \supset x) \wedge \perp) =$$

$$= ((x \supset y) \vee (y \supset x)) \wedge \perp = 1 \wedge \perp = \perp.$$

Таким образом, $\mathbf{A}_{\perp}$ также является $l$–алгеброй. Чтобы проверить последнее из условий данного пункта, возьмем произвольные элементы $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_{\perp}$ и представим их в виде $(\perp, y_1)$ и $(\perp, y_2)$. Имеем

$$(1, \perp) = ((\perp, y_1) \supset (\perp, y_2)) \vee ((\perp, y_2) \supset (\perp, y_1)) =$$

$$= (f(y_1 \supset y_2) \vee f(y_2 \supset y_1), (y_1 \supset y_2) \vee (y_2 \supset y_1)),$$

в частности, $f(y_1 \supset y_2) \vee f(y_2 \supset y_1) = 1$.

Докажем обратную импликацию. Пусть $\mathbf{A}^{\perp}$ и $\mathbf{A}_{\perp}$ — $l$–алгебры; пусть, кроме того, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}_{\perp}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A}^{\perp})$ и для всех $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_{\perp}$ верно равенство $f_{\mathbf{A}}(y_1 \supset y_2) \vee f_{\mathbf{A}}(y_2 \supset y_1) = 1$. Возьмем элементы $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{A}$ и, используя формулу для псевдодополнения, вычислим

$$((x_1, y_1) \supset (x_2, y_2)) \vee ((x_2, y_2) \supset (x_1, y_1)) =$$

$$= (h, (y_1 \supset y_2) \vee (y_2 \supset y_1)).$$

Вторая компонента последней пары равна $\perp = 1_{\mathbf{A}_{\perp}}$, так как $\mathbf{A}_{\perp}$ — $l$–алгебра, в то же время, первая компонента имеет вид:

$$h = ((x_1 \supset x_2) \vee (x_2 \supset x_1)) \wedge (f(y_1 \supset y_2) \vee (x_2 \supset x_1)) \wedge$$

$$\wedge ((x_1 \supset x_2) \vee f(y_2 \supset y_1)) \wedge (f(y_1 \supset y_2) \vee f(y_2 \supset y_1)).$$

Из наших предположений немедленно следует, что первый и последний конъюктивные члены равны единице. Таким образом, выполнимость тождества $\mathbf{L}$ на $\mathbf{A}$ эквивалентна условию:

для всех $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{A}$, верно $(x_1 \supset x_2) \vee$
$\vee f(y_2 \supset y_1) = 1_{\mathbf{A}^{\perp}}$.

Принимая во внимание факты, что псевдодополнение убывает по первому и возрастает по второму аргументу, а также, что $x \leq f(y)$ для всех $(x, y) \in \mathbf{A}$, получаем цепочку неравенств $(x_1 \supset x_2) \vee f(y_2 \supset y_1) \geq (x_1 \supset \bot) \vee f(\bot \supset y_1) \geq (f(y_1) \supset \supset \bot) \vee f(y_1) = \neg f(y_1) \vee f(y_1) = 1$. Последнее равенство выполняется ввиду условия, что каждый элемент вида $f(y)$ регулярен.

Утверждения 5–10 проверяются непосредственным вычислением.

Предложение доказано.

В приводимом ниже следствии символ $\cup^*$ обозначает операцию взятия точной верхней грани в решетке логик $\mathbf{Jhn}$.

**СЛЕДСТВИЕ 3.2.**

1. $\mathbf{Ljk} = \mathbf{Lik} * \mathbf{Ln}$;

2. $\mathbf{Ljx} = \mathbf{Lk} * \mathbf{Ln}$;

3. *для всех* $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ *и* $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$ *верно следующее равенство*

$$(\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2)\mathbf{p}' \cup^* (\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2)\mathbf{l}' = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2.$$

   *В частности* $\mathbf{Le}' = \mathbf{Lg} \cup^* \mathbf{Ljl}'$;

4. *для всех* $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int}$ *и* $\mathbf{L}_2 \in \mathbf{Neg}$ *таких, что* $\mathbf{L}_1 \neq \mathbf{Lk}$, *логики* $(\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2)\mathbf{p}'$ *и* $(\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2)\mathbf{l}'$ *отличны от концевых точек интервала* $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$. *В то же время, если* $\mathbf{L}_1 = \mathbf{Lk}$, *то* $(\mathbf{Lk} * \mathbf{L}_2)\mathbf{p}' = \mathbf{Lk} \cap \mathbf{L}_2$ *и* $(\mathbf{Lk} * \mathbf{L}_2)\mathbf{l}' = \mathbf{Lk} * \mathbf{L}_2$;

5. $\mathbf{Ljl}^{\mathbf{N}} = \mathbf{Lil} * \mathbf{Ln}$;

6. $\mathbf{Ljl}_1^{\mathbf{Q}} = \mathbf{Li} * \mathbf{Lnl}$;

7. $\mathbf{Ljl}_2^{\mathbf{Q}} \in Spec(\mathbf{Li}, \mathbf{Lnl})$, $\mathbf{Ljl}_2^{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{Li} * \mathbf{Lnl}$, $\mathbf{Ljl}_2^{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{Li} \cap \mathbf{Lnl}$;

8. $\mathbf{Lje}_1^{\mathbf{Q}} = \mathbf{Li} * \mathbf{Lmn}$;

9. $\mathbf{Lje}_2^{\mathbf{Q}} \in Spec(\mathbf{Li}, \mathbf{Lmn})$, $\mathbf{Lje}_2^{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{Li} * \mathbf{Lmn}$, $\mathbf{Lje}_2^{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{Li} \cap \mathbf{Lmn}$;

10. *логика* $\mathbf{Ljl}$ *является собственным расширением логики* $(\mathbf{Lil} * \mathbf{Lnl})\mathbf{l}' = \mathbf{Ljl}'\mathbf{l}^{\mathbf{N}}\mathbf{l}_1^{\mathbf{Q}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1,2,5,6 и 8 легко следуют из предложений 1.5 и 1.6, а также из подходящих утверждений последнего предложения.

3. По п.3 предложения 3.1, в моделях логики $(\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2)\mathbf{l}'$ все элементы вида $\perp \vee (\perp \supset a)$ регулярны. С другой стороны, из п.5 того же предложения следует, что все элементы указанного вида плотны в моделях логики $(\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2)\mathbf{p}'$. Таким образом, в моделях наименьшей верхней грани логик $(\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2)\mathbf{p}'$ и $(\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2)\mathbf{l}'$ элементы вида $\perp \vee (\perp \supset a)$ регулярны и плотны одновременно, т.е. все они равны единичному элементу. Следовательно, модели рассматриваемой верхней грани — это в точности прямые произведения вида $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, где $\mathbf{B} \models \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{C} \models \mathbf{L}_2$, откуда, по предложению 1.7 и следствию 1.8, немедленно вытекает требуемое равенство.

4. Это утверждение следует из того, что для каждой Гейтинговой алгебры $\mathbf{A}$ следующие три условия эквивалентны: $\mathbf{A}$ — Булева алгебра; единичный элемент является единственным плотным элементом алгебры $\mathbf{A}$; все элементы алгебры $\mathbf{A}$ регулярны.

7. Согласно п.8 предложения 3.1, логика $\mathbf{Ljl}_2^\mathbf{Q}$ принадлежит интервалу $Spec(\mathbf{Li}, \mathbf{Lnl})$. Рассмотрим модель $\mathbf{A}$ свободной комбинации $\mathbf{Li} * \mathbf{Lnl}$, устроенную следующим образом. Верхняя алгебра $\mathbf{A}^\perp$ произвольна; нижняя алгебра $\mathbf{A}_\perp$ — это 4-элементная негативная алгебра Пирса с универсумом $\{\perp, a, b, 0\}$, где $0 \leq a \leq \perp$, $0 \leq b \leq \perp$, а элементы $a$ и $b$ несравнимы; $f(\perp) = 1$, $f(x) = \perp$ для всех $x \neq \perp$. Вычислим

$$f(a \supset b) \vee f(b \supset a) = f(b) \vee f(a) = \perp \vee \perp = \perp.$$

Это доказывает, что $\mathbf{Ljl}_2^\mathbf{Q}$ отличается от нижней точки интервала $Spec(\mathbf{Li}, \mathbf{Lnl})$.

Теперь укажем модель логики $\mathbf{Ljl}_2^\mathbf{Q}$, отличную от прямого произведения Гейтинговой и негативной алгебр. Это будет доказывать, что логика $\mathbf{Ljl}_2^\mathbf{Q}$ не равна пересечению логик $\mathbf{Li}$ и $\mathbf{Ljl}$. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — соответственно Гейтингова и негативная $l$-алгебры, которые изоморфны как импликативные решетки, и пусть $f : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ — произвольный решеточный изоморфизм. Нетрудно убедиться, что $\mathbf{B} \times_f \mathbf{C}$ является искомой моделью $\mathbf{Ljl}_2^\mathbf{Q}$.

9. Тот факт, что логика $\mathbf{Lje}_2^Q$ принадлежит интервалу $Spec(\mathbf{Li}, \mathbf{Lmn})$, следует из п.10 предложения 3.1. Примеры $j$–алгебр, показывающие, что логика $\mathbf{Lje}_2^Q$ отлична от концевых точек указанного интервала, могут быть построены аналогично п.7.

10. Это утверждение также может быть доказано аналогично п.7. В качестве примера, показывающего, что указанное расширение является собственным, можно взять $j$–алгебру $\mathbf{A}$ из п.7,потребовав дополнительно, чтобы $\mathbf{A}^{\perp}$ была Гейтинговой $l$--алгеброй.

Следствие доказано.

Теперь мы располагаем достаточным количеством информации о моделях логик Сегерберга, чтобы продолжить анализ рис. 2. Обозначим через $Neg$ линию, проходящую через логики $\mathbf{Ln}$ и $\mathbf{Lmn}$, и через $Int$ — линию, проходящую через логики $\mathbf{Li}$ и $\mathbf{Lk}$. Напомним, что логики, лежащие на линии $Int$ ($Neg$), образуют пересечение семейства $\mathcal{D}$ логик, представленных на рис. 2, с классом $\mathbf{Int}$ (соответственно с классом $\mathbf{Neg}$), $\mathcal{D} \cap \mathbf{Int} = Int$ и $\mathcal{D} \cap \mathbf{Neg} = Neg$. Эти линии играют роль координатных осей для трехмерной части рис.2, которую мы обозначим $Par$, $Par = \mathcal{D} \cap \mathbf{Par}$. Для любой логики $\mathbf{L} \in Par$ естественным образом определяются ее проекции $I(\mathbf{L})$ и $N(\mathbf{L})$ соответственно на осях $Int$ и $Neg$. Например

$$I(\mathbf{Lj}) = \mathbf{Li},\ N(\mathbf{Lj}) = \mathbf{Ln},\ I(\mathbf{Ljl}) = \mathbf{Lil},\ N(\mathbf{Ljl}) = \mathbf{Lnl},$$

$$I(\mathbf{Ljx}) = \mathbf{Lk}, N(\mathbf{Ljx}) = \mathbf{Ln}.$$

Используя предложение 3.1 и следствие 3.2 легко проверить, что для всех логик $\mathbf{L} \in Par$ справедливы равенства $I(\mathbf{L}) = \mathbf{L}_{\mathbf{int}}$ и $N(\mathbf{L}) = \mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$. Таким образом, для любой линии $\mathcal{L}$ на диаграмме, параллельной линии $(\mathbf{Lj}, \mathbf{Le}')$, лежащие на этой линии логики имеют фиксированные интуиционистский и негативный напарники, скажем $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ соответственно. Иными словами, мы имеем $\mathcal{L} = \mathcal{D} \cap Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$.

Мы установили таким образом, что три изменения части $Par$ рис.2 в точности соответствуют трем параметрам, определяющим положение логики в классе $\mathbf{Par}$. Первая координата логики

$\mathbf{L}$ — это ее интуиционистский напарник $\mathbf{L}_{\mathbf{int}} \in \mathbf{Int}$, вторая координата — это негативный напарник $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}} \in \mathbf{Neg}$, а третья координата соответствует положению логики $\mathbf{L}$ внутри интервала $Spec(\mathbf{L}_{\mathbf{int}}, \mathbf{L}_{\mathbf{neg}})$, что определяется в свою очередь классом допустимых полурешеточных гомоморфизмов из моделей $\mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ в модели $\mathbf{L}_{\mathbf{int}}$.

Теперь мы должны отметить один очевидный дефект рис.2. Рассмотрим плоскости, лежащие в части $Par$, которые параллельны плоскости, проходящей через точки $\mathbf{Lj}$, $\mathbf{Ljk}$ и $\mathbf{Ljl}_1^{\mathbf{Q}}$. Имеется три таких плоскости. Пусть $\mathcal{P}j$ обозначает плоскость, содержащую точку $\mathbf{Lj}$, $\mathcal{P}l$ — плоскость, содержащую точку $\mathbf{Ljl}$ и, наконец, пусть $\mathcal{P}e$ обозначает плоскость, содержащую точку $\mathbf{Le}$. Для точного соответствия набросанным выше геометрическим аналогам должно быть выполнено следующее условие. Логики, принадлежащие каждой из плоскостей $\mathcal{P}j$, $\mathcal{P}l$ или $\mathcal{P}e$, должны определять тот же самый класс допустимых гомоморфизмов.Но это выполняется только для плоскости $\mathcal{P}e$. Для любой логики $\mathbf{L} \in \mathcal{P}e$ имеем $\bot \vee (\bot \supset p) \in \mathbf{L}$, следовательно, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathbf{int}} \cap \mathbf{L}_{\mathbf{neg}}$ и является наибольшей точкой интервала $Spec(\mathbf{L}_{\mathbf{int}}, \mathbf{L}_{\mathbf{neg}})$, которой соответствует класс гомоморфизмов, тождественно равных единичному элементу.

Рассмотрим плоскость $\mathcal{P}j$. Элементы этой плоскости являются наименьшими точками в множестве вида $Par \cap Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$, где $\mathbf{L}_1 \in \{\mathbf{Li}, \mathbf{Lik}, \mathbf{Lil}\}$ и $\mathbf{L}_2 \in \{\mathbf{Ln}, \mathbf{Lln}, \mathbf{Lmn}\}$. Согласно предложению 1.4, наименьшая точка интервала вида $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$ — это свободная комбинация $\mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2$ логик $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$. Более того, в соответствии с предложением 1.6 свободная комбинация логик допускает все возможные полурешеточные гомоморфизмы из моделей негативного напарника в модели интуиционистского напарника. Однако только три точки плоскости $\mathcal{P}j$, именно, логики $\mathbf{Lj}$, $\mathbf{Ljk}$ и $\mathbf{Ljl}^{\mathbf{N}}$, являются свободными комбинациями своих напарников (см. пп. 1 и 5 следствия 3.2). Логики $\mathbf{Ljl}_2^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{Lje}_2^{\mathbf{Q}}$ являются собственными расширениями свободных комбинаций $\mathbf{Li} * \mathbf{Lnl}$ и $\mathbf{Li} * \mathbf{Lmn}$ соответственно, как это следует из пп.7 и 9 следствия 3.2. Что касается оставшихся четырех логик плоскости $\mathcal{P}j$, мы можем легко модифицировать доказательства пп.7 и 9 следствия 3.2, чтобы показать, что ограничения, накладываемые аксиомами $\mathbf{L}_2^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_2^{\mathbf{Q}}$ на класс допустимых полурешеточных гомоморфизмов, остаются нетривиальными, даже если интуиционистский напарник логики удовлетворяет аксиоме $\mathbf{K}$ или $\mathbf{L}^{\mathbf{N}}$ (см. также предложения 3.4 и 3.5 ниже).

В случае плоскости $\mathcal{P}l$ мы имеем подобную ситуацию. Логики, принадлежащие левой крайней вертикальной линии, задают тот же самый класс полурешеточных гомоморфизмов, к которому относятся все гомоморфизмы с образом, содержащимся в множестве регулярных элементов верхней алгебры (см. п.3 предложения 3.1). Все остальные логики данной плоскости характеризуются более узким классом допустимых гомоморфизмов (см. предложения 3.4 и 3.5).

Отмеченный дефект можно легко исправить, заменив аксиомы $\mathbf{L}_2^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_2^{\mathbf{Q}}$ на аксиомы $\mathbf{L}_1^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}$ соответственно. Как следует из пп.7 и 9 предложения 3.1, эти аксиомы не накладывают ограничений на класс допустимых гомоморфизмов, а ограничивают только класс нижних алгебр. Таким образом, именно эти аксиомы могут рассматриваться как адекватные релятивизации аксиомам $\mathbf{L}$ и $\mathbf{E}$ на негативный напарник логики. После упомянутой замены, а также удаления аксиомы $\mathbf{L}$ из списка рассматриваемых аксиом мы получим диаграмму логик, имеющую в точности такую же конфигурацию, как диаграмма, представленная на рис.2.

Выше уже отмечалось, что аксиомы $\mathbf{L}_2^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_2^{\mathbf{Q}}$ накладывают ограничения не только на класс нижних алгебр своих моделей, но и на класс гомоморфизмов из нижних алгебр в верхние, допустимых в их моделях. Эти два ограничения можно разделить. Как следует из предложения 3.1, аксиомы $\mathbf{L}_1^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}$ ограничивают класс нижних алгебр в точности так же, как это делают аксиомы $\mathbf{L}_2^{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{E}_2^{\mathbf{Q}}$ соответственно, при этом они не оказывают влияния на класс допустимых гомоморфизмов. С другой стороны, как будет показано ниже, аксиомы

$$\mathbf{F}_1 : \ \bot \vee (\bot \supset (p \supset q)) \vee (\bot \supset (q \supset p)) (= \bot \vee \mathbf{L}_2^{\mathbf{Q}}),$$
$$\mathbf{F}_2 : \ \bot \vee (\bot \supset p) \vee (\bot \supset (p \supset q)) (= \bot \vee \mathbf{E}_2^{\mathbf{Q}})$$

будут ограничивать класс допустимых гомоморфизмов в той же степени, что и аксиомы $\mathbf{L}_2^{\mathbf{Q}}$ ш $\mathbf{E}_2^{\mathbf{Q}}$ соответственно, не изменяя при этом класса нижних алгебр.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.** *Пусть* $\mathbf{A}$ *— произвольная* $j$*-алгебра. Верны следующие эквивалентности:*

1) $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljf_1}$, *если и только если* $f_{\mathbf{A}}(y_1 \supset y_2) \vee f_{\mathbf{A}}(y_2 \supset y_1) = 1$ *для всех* $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_\perp$;

2) $\mathbf{A} \models \mathbf{Ljf_2}$, *если и только если* $f_{\mathbf{A}}(y_1) \vee f_{\mathbf{A}}(y_1 \supset y_2) = 1$ *для всех* $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_\perp$.

Оба утверждения проверяются непосредственным вычислением. Ясно, что $\mathbf{Ljl_2^Q} = \mathbf{Ljl_1^Qf_1}$, $\mathbf{Lje_2^Q} = \mathbf{Lje_1^Qf_2}$ и $\mathbf{Ljl} = \mathbf{Ljl'l^Nl_1^Qf_1}$.

Рассмотрим класс $\mathcal{D}_1$, состоящий из логик, которые могут быть получены присоединением к $\mathbf{Lj}$ некоторого подмножества следующего множества аксиом $\{\mathbf{I}, \mathbf{Q}, \mathbf{K}, \mathbf{X}, \mathbf{L}, \mathbf{E}, \mathbf{L}', \mathbf{E}', \mathbf{P}', \mathbf{L}^{\mathbf{N}}, \mathbf{L}_1^{\mathbf{Q}}, \mathbf{E}_1^{\mathbf{Q}}, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$. Очевидно, что $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_1$. В то же время, класс $\mathcal{D}$ удовлетворяет такому условию. Для любых $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{Int} \cap \mathcal{D}$ и

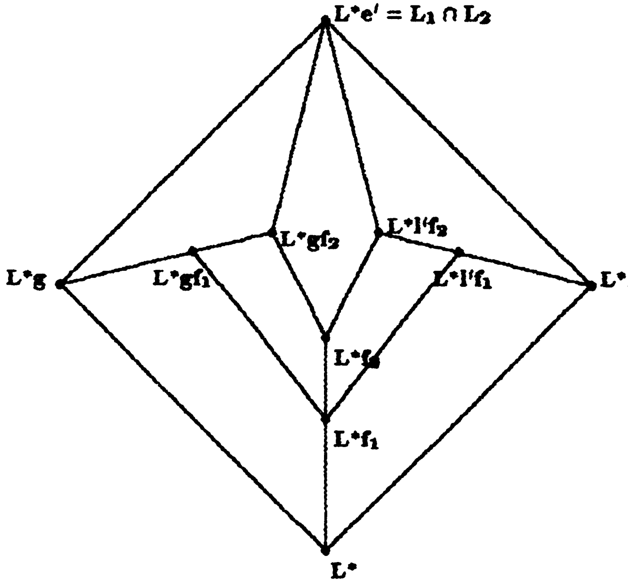



Рис. 3

$\mathbf{L}_2 \in \mathrm{Neg} \cap \mathcal{D}$ пересечение $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) \cap \mathcal{D}$ линейно упорядочено. Именно этим объясняется особое изящество диаграммы с рис.2. При переходе к классу $\mathcal{D}_1$ это условие уже не имеет места, как это видно из нижеследующих предложений.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.** *Пусть* $\mathbf{L}_1 \in \{\mathbf{Li}, \mathbf{Lik}, \mathbf{Lil}\}$, $\mathbf{L}_2 \in \{\mathbf{Ln}, \mathbf{Lnl}\}$ *и* $\mathbf{L}^* \rightleftharpoons \mathbf{L}_1 * \mathbf{L}_2$. *Множество логик* $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) \cap \mathcal{D}_1$ *образует верхнюю полурешетку, представленную на полурешеточной диаграмме* (см. рис.3).

В ходе доказательств этого предложения нам придется построить ряд $j$–алгебр, необходимых для проверки соотношений между различными логиками. Следующие Гейтинговы и негативные алгебры (см. рис.4) будут играть роль строительных блоков: $\mathbf{2}$ и $\mathbf{2}'$ — двух–элементные Гейтингова и негативная алгебры; $\mathbf{3}^{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{3}^{\mathbf{N}}$ — трех–элементные линейно упорядоченные Гейтингова и негативная алгебры; наконец, $\mathbf{4}^{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{4}^{\mathbf{N}}$ — четырех–элементные Гейтингова и негативная алгебры, импликативные решетки которых являются алгебрами Пирса.

Для любой Гейтинговой алгебры $\mathbf{B}$, негативной алгебры $\mathbf{C}$, и любой построенной из них $j$–алгебры $\mathbf{B} \times_f \mathbf{C}$, мы будем отождествлять элемент $b$ алгебры $\mathbf{B}$ ($c$ алгебры $\mathbf{C}$) с соответствующим элементом $(b, \perp)$ верхней алгебры $(\mathbf{B} \times_f \mathbf{C})^{\perp}$ ($(\perp, c)$ нижней алгебры $(\mathbf{B} \times_f \mathbf{C})_{\perp}$).

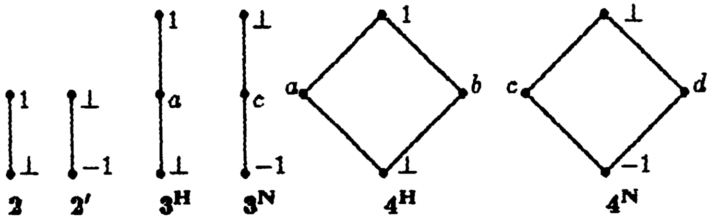



Рис. 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (предложения 3.4). Прежде всего заметим, что $\mathbf{L}_1 \neq \mathbf{Lk}$ по условию. Из этого факта и пп.3 и 4 следствия 3.2. вытекает, что логики $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{l}'$ отличны от концевых точек интервала $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$, а наименьшая верхняя грань этих логик совпадает с наибольшей точкой интервала $\mathbf{L}^*\mathbf{g} \cup^* \mathbf{L}^*\mathbf{l}' =$

$= \mathbf{L}^*\mathbf{e}'$. Это значит, в частности, что логики $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$ b $\mathbf{L}^*\mathbf{l}'$ несравнимы.

Рассмотрим логики $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$. Пусть $\mathbf{A}$ — произвольная модель логики $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$. Согласно предложению 3.3, имеем равенство $f_{\mathbf{A}}(y_1) \vee f_{\mathbf{A}}(y_1 \supset y_2) = 1$ для всех $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_\perp$. Так как $y_1 \leq y_2 \supset y_1$, получаем $f_{\mathbf{A}}(y_1) \leq f_{\mathbf{A}}(y_2 \supset y_1)$, а также $f_{\mathbf{A}}(y_2 \supset \supset y_1) \vee f_{\mathbf{A}}(y_1 \supset y_2) = 1$ для всех $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_\perp$. Принимая во внимание предложение 3.3., последний факт означает, что алгебра $\mathbf{A}$ будет моделью логики $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$. Таким образом, мы доказали включение $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1 \subseteq \mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$.

Рассмотрим $j$-алгебру $\mathbf{A}_1 \rightleftharpoons \mathbf{3}^{\mathbf{H}} \times_{f_1} \mathbf{3}^{\mathbf{N}}$, где $f_1 : \mathbf{3}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{3}^{\mathbf{H}}$ — это однозначно определенный изоморфизм импликативных решеток (см. рис. 5, на котором представлены структуры всех алгебр, конструируемых в доказательстве данного и следующего предложений). Для любых $y_1, y_2 \in \mathbf{A}_{1\perp}$ имеем $f_1(y_1 \supset y_2) \vee \vee f_1(y_2 \supset y_1) = (f_1(y_1) \supset f_1(y_2)) \vee (f_1(y_2) \supset f_1(y_1)) = 1$, так как $\mathbf{3}^{\mathbf{H}} \models (p \supset q) \vee (q \supset p)$. Таким образом, $\mathbf{A}_1 \models \mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$. Возьмем элементы $-1, c \in \mathbf{3}^{\mathbf{N}}$. Ясно, что $f_1(-1) = \perp$ и $f_1(c) = a$ (см. рис.4). Вычислим $f_1(c) \vee f_1(c \supset -1) = f_1(c) \vee f_1(-1) = = a \vee \perp = a \neq 1$. Это значит, что $\mathbf{A}_1$ не является моделью логики $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$, поэтому включение $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1 \subset \mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$ — собственное.

Рассмотрим $j$-алгебры $\mathbf{A}_2 \rightleftharpoons \mathbf{2} \times_{f_2} \mathbf{4}^{\mathbf{N}}$, где $f_2(\perp) = 1$, $f_2(x) = \perp$ для всех $x < \perp$, и $\mathbf{A}_3 \rightleftharpoons \mathbf{4}^{\mathbf{H}} \times_{f_3} \mathbf{4}^{\mathbf{N}}$, где $f_3$ — изоморфизм импликативных решеток между $\mathbf{4}^{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{4}^{\mathbf{H}}$. Подобно тому, как это было было сделано в пп. 7 и 9 следствия 3.2, мы можем показать, что $\mathbf{A}_2$ является моделью логики $\mathbf{L}^*$, но не будет моделью логики $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$ соответственно, что $\mathbf{A}_3$ — это модель $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$, но не $\mathbf{L}^*\mathbf{e}'$. Мы доказали, таким образом, что логики $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$ отличны от концевых точек интервала $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2)$.

Теперь мы проверим, что каждая из логик $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$ несравнима с каждой из логик $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{l}'$. $j$-Алгебры $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_3$ являются моделями логик $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$ соответственно, но они не являются моделями $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$, откуда следует, что логика $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$ не содержится ни в одной из логик $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_2$. Определим $j$-алгебру $\mathbf{A}_4$ как $\mathbf{3}^{\mathbf{H}} \times_{f_4} \mathbf{4}^{\mathbf{N}}$, где $f_4(\perp) = 1$ и $f_4(x) = a$ для всех $x < \perp$. Алгебра $\mathbf{A}_4$ будет моделью логики $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$, так как элемент $a$ плотен

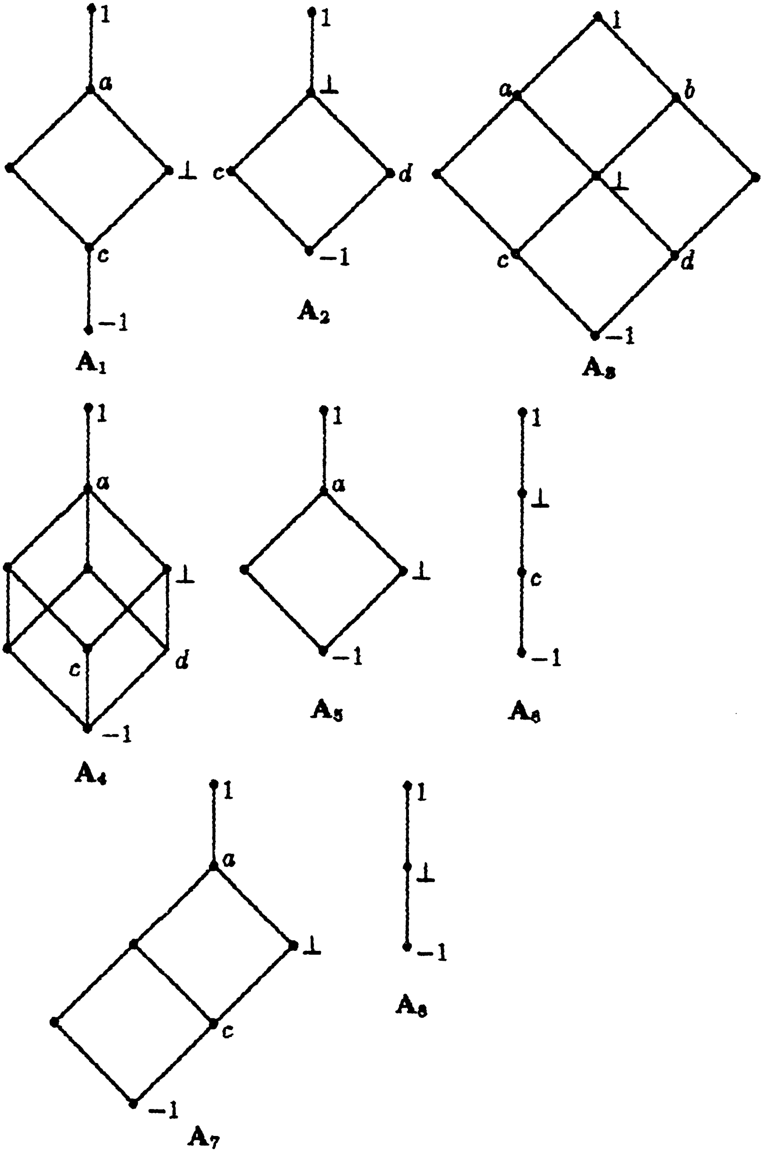

1
a
⊥
c
−1
$\mathbf{A}_1$
1
⊥
c
d
−1
$\mathbf{A}_2$
1
a
b
⊥
c
d
−1
$\mathbf{A}_3$
1
a
⊥
c
d
−1
$\mathbf{A}_4$
1
a
⊥
−1
$\mathbf{A}_5$
1
⊥
c
−1
$\mathbf{A}_6$
1
a
⊥
c
−1
$\mathbf{A}_7$
1
⊥
−1
$\mathbf{A}_8$

Рис. 5

в $\mathbf{3^H}$, но не логики $\mathbf{L^*f_1}$, а значит, эта алгебра не является также моделью логики $\mathbf{L^*f_2}$. Действительно, для $c, d \in \mathbf{4^N}$ имеем $f_4(c \supset d) \vee f_4(d \supset c) = f_4(d) \vee f_4(c) = a \vee a = a$. Тем самым, мы установили, что логики $\mathbf{L^*f_1}$ и $\mathbf{L^*f_2}$ не сравнимы с $\mathbf{L^*g}$.

Алгебра $\mathbf{A_2}$ является контрпримером, показывающим, что ни одна из логик $\mathbf{L^*f_1}$ и $\mathbf{L^*f_2}$ не содержится в логике $\mathbf{L^*l'}$. Чтобы установить, что обратные включения также не имеют места, рассмотрим $j$-алгебру $\mathbf{A_5} \rightleftharpoons \mathbf{3^H} \times_{f_5} \mathbf{2'}$, где $f_5(-1) = a$. Это не модель логики $\mathbf{L^*l'}$, так как элемент $a$ не регулярен, в то же время, непосредственные вычисления показывают, что $\mathbf{A_5} \models \mathbf{L^*f_2}$. Таким образом, $\mathbf{L^*l'}$ не содержится в $\mathbf{L^*f_2}$, тем более, в $\mathbf{L^*f_1}$.

Полученные нами факты о несравнимости логик влекут, в частности, что логика $\mathbf{L^*gf_i}$ является собственным расширением логик $\mathbf{L^*f_i}$ и $\mathbf{L^*g}$, $i = 1, 2$, а логика $\mathbf{L^*l'f_i}$ является собственным расширением логик $\mathbf{L^*f_i}$ и $\mathbf{L^*l'}$, $i = 1, 2$. Таким образом, нам остается проверить собственность включений $\mathbf{L^*gf_1} \subsetneq \mathbf{L^*gf_2} \subsetneq \mathbf{L^*e'}$ и $\mathbf{L^*l'f_1} \subsetneq \mathbf{L^*l'f_2} \subsetneq \mathbf{L^*e'}$.

Мы можем использовать $j$-алгебру $\mathbf{A_6} \rightleftharpoons \mathbf{3^N} \oplus \mathbf{2}$ ($\cong \mathbf{2} \times_{f_6} \mathbf{3^N}$, где $f_6(x) = \bot$ для всех $x < \bot$), чтобы показать, что включение $\mathbf{L^*l'f_1} \subsetneq \mathbf{L^*l'f_2}$ собственное. Это будет модель логики $\mathbf{L^*lf_1}$, так как для любых $y_1, y_2 \in \mathbf{3^N}$ или $y_1 \supset y_2 = \bot$, или $y_2 \supset y_1 = \bot$. С другой стороны, $f_6(c) \vee f_6(c \supset -1) = \bot \vee \bot = \bot$. Заметим, что $j$-алгебра $\mathbf{A_3}$ является моделью логики $\mathbf{L^*l'f_2}$, отличной от прямого произведения алгебр $\mathbf{4^H}$ и $\mathbf{4^N}$. Это доказывает, что $\mathbf{L^*e'}$ — собственное расширение $\mathbf{L^*l'f_2}$.

Наконец, рассмотрим алгебры $\mathbf{A_7} \rightleftharpoons \mathbf{3^H} \times_{f_7} \mathbf{3^N}$, где $f_7(x) = a$ для всех $x < \bot$, и определенную выше $\mathbf{A_5}$. Первая из этих алгебр будет контрпримером, показывающим, что включение $\mathbf{L^*gf_1} \subsetneq \mathbf{L^*gf_2}$ собственное. Вторая алгебра может быть использована для проверки того факта, что $\mathbf{L^*e'}$ — собственное расширение $\mathbf{L^*gf_2}$.

Предложение доказано.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5.** *Пусть* $\mathbf{L_1} \in \{\mathbf{Li}, \mathbf{Lik}, \mathbf{Lil}\}$, *и* $\mathbf{L^*} \rightleftharpoons \mathbf{L_1} * \mathbf{Lmn}$. *Множество логик* $Spec(\mathbf{L_1}, \mathbf{L_2}) \cap \mathcal{D}_1$ *образует верхнюю полурешетку, представленную на полурешеточной диаграмме* (см. рис.6).

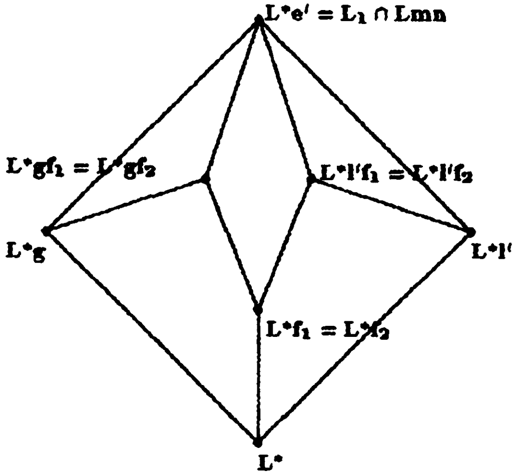


Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.Как и в предыдущем предложении, у нас есть условие $\mathbf{L_1} \neq \mathbf{Lk}$, из которого следует, что логики $\mathbf{L^*g}$ и $\mathbf{L^*l'}$ отличны от концевых точек интервала $Spec(\mathbf{L_1}, \mathbf{L_2})$, несравнимы, и их точная верхняя грань совпадает с наибольшей точкой этого интервала.

Докажем равенство $\mathbf{L^*f_1} = \mathbf{L^*f_2}$. Включение $\mathbf{L^*f_1} \subseteq \mathbf{L^*f_2}$ было установлено ранее. Проверим обратное включение. Возьмем произвольную модель $\mathbf{A}$ логики $\mathbf{L^*f_1}$, тогда имеем $f_{\mathbf{A}}(x \supset y) \vee f_{\mathbf{A}}(y \supset x) = 1$ для всех $x, y \in \mathbf{A}_\perp$. По условию алгебра $\mathbf{A}_\perp$ удовлетворяет закону Пирса, поэтому для любых $x, y \in \mathbf{A}_\perp$ верно равенство $x = (x \supset y) \supset x$, с другой стороны, в каждой $j$–алгебре выполняется тождество $x \supset y = x \supset (x \supset y)$. Таким образом, для любых $x, y \in \mathbf{A}_\perp$ имеем

$$f_{\mathbf{A}}(x) \vee f_{\mathbf{A}}(x \supset y) = f_{\mathbf{A}}((x \supset y) \supset x) \vee f_{\mathbf{A}}(x \supset (x \supset y)) = 1,$$

что и доказывает требуемое равенство.

Нижние алгебры $j$–алгебр $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{A_4}$ и $\mathbf{A_5}$, определенных в предложении 3.4, являются моделями логики $\mathbf{Lmn}$, поэтому они могут быть использованы в последующих рассуждениях. В частности, при помощи $j$–алгебр $\mathbf{A_2}$ и $\mathbf{A_3}$ мы можем проверить, что логика $\mathbf{L^*f_1}$ лежит внутри интервала $Spec(\mathbf{L_1}, \mathbf{Lmn})$.

Алгебры $\mathbf{A}_4$ и $\mathbf{A}_8 \rightleftharpoons \mathbf{2}' \oplus \mathbf{2}$ могут быть использованы для того, чтобы показать несравнимость логик $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$. Алгебра $\mathbf{A}_4$ является моделью логики $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$, но не логики $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$. Алгебра $\mathbf{A}_8$, наоборот, будет моделью логики $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$, но не логики $\mathbf{L}^*\mathbf{g}$.

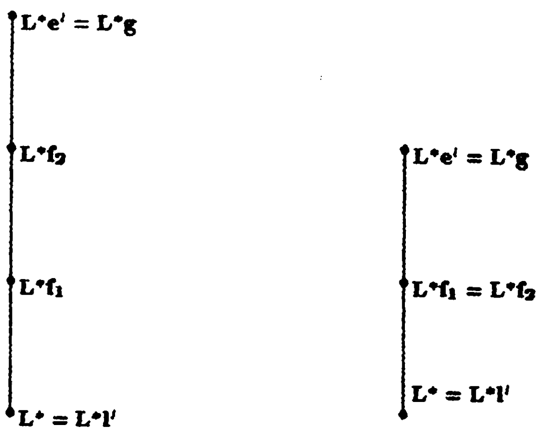
Подобным образом, алгебры $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_5$ могут использоваться для проверки несравнимости логик $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{l}'$.

Нам осталось проверить собственность включений $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1\mathbf{g} \subsetneq \mathbf{L}^*\mathbf{e}'$ и $\mathbf{L}^*\mathbf{f}_1\mathbf{l}' \subsetneq \mathbf{L}^*\mathbf{e}'$. Подходящими контрпримерами являются алгебры $\mathbf{A}_5$ и $\mathbf{A}_3$ соответственно.

Предложение доказано.

Нами еще не был рассмотрен случай, когда интуиционистский напарник совпадает с классической логикой. Оказывается, что только в этом случае множество вида $Spec(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2) \cap \mathcal{D}_1$ линейно упорядочено по включению.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6.** *Пусть* $\mathbf{L}_2 \in \{\mathbf{Ln}, \mathbf{Lnl}, \mathbf{Lmn}\}$, *и* $\mathbf{L}^* \rightleftharpoons \mathbf{Lk}*\mathbf{L}_2$. *Множества логик* $Spec(\mathbf{Lk}, \mathbf{L}_2) \cap \mathcal{D}_1$ *имеют структуру, приведенную на рис. 7.*




$\mathbf{L}_2 \in \{\mathbf{Ln}, \mathbf{Lnl}\}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{L}_2 = \mathbf{Lmn}$

Рис. 7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы рассмотрим случай $\mathbf{L}_2 \in \{\mathbf{Ln}, \mathbf{Lnl}\}$. Алгебры $\mathbf{A}_6$, $\mathbf{A}_8$ и $\mathbf{A}_2$ могут быть использованы для проверки собственности включений $L^* \subset L^*f_1$, $L^*f_1 \subset L^*f_2$ и соответственно $L^*f_2 \subset L^*e'$.

В случае $L_2 = Lmn$ мы снова можем использовать алгебры $A_8$ и $A_2$ для проверки требуемых соотношений между логиками.

Предложение доказано.

## Литература

1. CURRY H.B. Foundations of mathematical logic. New York: McGrow-Hill Book Company, 1963.

2. GOLDBLATT R.I. Decidability of some extensions //J. Z. für Math. Logic und Gründ. Math. — 1974. — Vol. 20. — P. 203–206.

3. ODINTSOV S.P. Maximal paraconsistent extension of Johansson logic. Logique at Analyse, **161/162**, 2000.

4. ODINTSOV S.P. Logic of classical refutability and class of extensions of minimal logic. Logic and Logical Philosophy, 7/8, 1999/2000.

5. ОДИНЦОВ С.П. Алгебраическая семантика и семантика Крипке для расширений минимальной логики. Логические исследования № 2 (электронный журнал, http://www.logic.ru), 1999.

6. RASIOWA H. An algebraic approach to non-classical logics. — Amsterdam, North-Holland, 1974.

7. RAUTENBERG W. Klassische und nichtclassische Aussagenlogik. — Braunschweig: Vieweg, 1979.

8. SEGERBERG K. Propositional logics related to Heyting's and Johansson's //Theoria. — 1968. — Vol. 34. — P. 26–61.

9. WOODRUFF P. W. A note on *JP'*// Theoria. 1970. — Vol. 36. — P. 183–184.

Поступила в редакцию
29 августа 2001 года