МОДЕЛИ КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные процессы)
2001 год **Выпуск 168**

УДК 518.74

СЛОЖНОСТЬ "ЭКСТРАЛОГИЧЕСКОГО БАЗИСА СИСТЕМЫ" ПО ГУДМЕНУ И СЛОЖНОСТЬ НАУЧНОЙ ТЕОРИИ

Е.М.Черепанов

По убеждению многих ученых, сложность (простота) научной теории является одним из важных факторов выбора ее среди конкурирующих между собою теорий.[1] Но как определить сложность?

Нельсон Гудмен в ряде своих работ (наиболее важные из них [3–5]) предлагает метод измерения того, что он назвал "структурной сложностью (простотой) экстралогического базиса системы". Цель настоящей статьи — развить на основе результатов Гудмена способ оценки сложности научных теорий.

§1. Сложность экстралогического базиса

Сам Гудмен изъясняется несколько старомодно, но если говорить в привычных ныне терминах, то речь идет вот о чем. Пусть T и S — произвольные элементарные теории конечных предикатных сигнатур. Мы пишем TDS и говорим, что T *определяет* S, если и только если существует теория U, являющаяся одновременно дефинициальным расширением теории T и консервативным расширением теории S. Если TDS и M — подразумеваемая модель теории T, то M называется *T–экстралогическим базисом системы* S. Цель Гудмена — указать некоторый *общий* метод измерения сложности произвольных T–экстралогических

[1] Достаточно развернутый обзор и библиографию по данной теме см.в [1. с.229–246 и 2].

базисов произвольных систем. Так как для всякой элементарной теории T всегда найдется такая система S, что TDS, а всякая модель теории T при определенных обстоятельствах может иметь статус "подразумеваемой" модели, то цель Гудмена сводится к указанию некоторого общего метода для измерения сложности произвольной модели произвольной элементарной теории T конечной предикатной сигнатуры.

Мы представим ограниченный вариант результатов Гудмена, когда рассматриваемые элементарные теории T содержат не более двух сигнатурных предикатов, суммарное число мест которых не более двух. Суть подхода Гудмена будет ясна и в этом случае, а технические детали, относящиеся к общему случаю, заняли бы излишне большое место и неоправдано загромоздили бы изложение.

Итак, подлежат рассмотрению элементарные теории трех видов $T^{(1)}, T^{(1,1)}, T^{(2)}$, содержащие в своих сигнатурах соответственно или 1) один одноместный предикат, или 2) два одноместных предиката, или 3) один двуместный предикат. Предполагается, что каждая из рассматриваемых теорий описывает свое множество U объектов (назовем его подразумеваемым *универсумом* теории) и свои подразумеваемые отношения на этом множестве, соответствующие сигнатурным предикатам. Это значит, что теория вида $T^{(1)}$ описывает какую-то реляционную систему (какую-то модель) вида $< U$, унарное (отношение на U) $>$, теория вида $T^{(1,1)}$ описывает реляционную систему вида $< U$, унарное, унарное$>$, теория вида $T^{(2)}$ описывает реляционную систему вида $< U$, бинарное$>$. Эти подразумеваемые модели назовем *главными* моделями соответствующих теорий.

Очевидно, вовсе не предполагается, что теория T (любого из этих видов) описывает свою главную модель M^* однозначно. Важно лишь то, что теория позволяет судить о том, какому именно классу $Mod(T)$ возможных моделей принадлежит главная модель M^* теории (имеется в виду, что $Mod(T)$ — это класс всех тех и только тех моделей, на которых выполняются аксиомы T).

Можно считать, что Гудмен задается вопросом: как для заданной теории T измерить сложность главной модели M^* этой теории? Ясно, что, во-первых, нужны какие-то измерительные инструменты, и, во-вторых, нужна еще и договоренность о том, как эти инструменты использовать. В качестве измерительных инструментов Гудмен предлагает использовать наше знание о главной модели. Причем подразумевается, что оно может черпаться либо только из рассматриваемой теории (и тогда результат измерения характеризует также и теорию), либо из нее и какой-нибудь дополнительной внешней информации (и тогда результат измерения характеризует не столько теорию, сколько именно ее главную модель). Что же касается договоренности об использовании измерительных инструментов, то применительно к теориям только упомянутых трех видов $T^{(1,1)}, T^{(1,1)}, T^{(2)}$ ее несколько упрощенный вариант состоит в следующем.

Договоримся бинарное отношение R называть:

- *избыточным*, если оно удовлетворяет аксиоме

$$\forall xy(\mathrm{R}(x,y) \to x = y);$$

- *рефлексивным*, если оно удовлетворяет аксиоме

$$\forall xy(x = y \to \mathrm{R}(x,y));$$

- *иррефлексивным*, если оно удовлетворяет аксиоме

$$\forall xy(\mathrm{R}(x,y) \to x \neq y);$$

- *диверсивным*, если оно удовлетворяет аксиоме

$$\forall xy(x \neq y \to \mathrm{R}(x,y));$$

- *симметричным*, если оно удовлетворяет аксиоме

$$\forall xy(\mathrm{R}(x,y) \to \mathrm{R}(x,y));$$

- *самополным*, если оно удовлетворяет аксиоме

$$\forall xyzw(\mathrm{R}(x,y)\ \&\ \mathrm{R}(z,w)\ \&\ x \neq y\ \&\ z \neq w\ \&\ x \neq w \to \mathrm{R}(x,w)).$$

Обозначим через E совокупность указанных шести условий, через F — произвольную подсовокупность (одну из 64 возможных) совокупности E. Пусть далее, $< U$, бинарная $F >$ — произвольная модель с носителем U и одним бинарным отношением, удовлетворяющим всем условиям из F. Если $F = \emptyset$, то вместо $< U$ бинарная $F >$ пишем $< U$, бинарная $>$

Вводим теперь понятие так называемого "релевантного" класса моделей ("релевантного вида базисов"). Оно, применительно к нашему ограниченному рассмотрению, может быть определено следующим образом.

Релевантный класс — это:

- либо класс всех моделей вида $< U$, унарное$>$;
- либо класс всех моделей вида $< U$, унарное, унарное$>$;
- либо класс всех моделей вида $< U$, бинарное $F >$;
- либо пересечение двух релевантных классов;
- либо объединение двух релевантных классов;
- либо разность двух релевантных классов.

Гудмен умеет каждому релевантному классу $\boldsymbol{K}$ приписать некоторое неотрицательное целое число $v(\boldsymbol{K})$ — сложность класса $\boldsymbol{K}$ — так, чтобы соблюдались некоторые естественные условия, например:

1) если $\boldsymbol{K}$ — класс всех моделей вида $< U$, унарное $>$, а $\boldsymbol{L}$ — произвольный релевантный класс, содержащий хотя бы одну модель, не все отношения которой логические[2], то $v(\boldsymbol{K}) \leq \leq v(\boldsymbol{L})$;

2) если $\boldsymbol{K}$ — класс всех моделей вида $< U$, бинарное $>$, $\boldsymbol{L}$ — класс всех моделей вида $< U$, бинарное рефлексивное $>$, то $v(\boldsymbol{K}) = v(\boldsymbol{L})+1$;

3) если $\boldsymbol{K}$ — класс всех моделей вида $< U$, бинарное $>$, $\boldsymbol{L}$ — класс всех моделей вида $< U$, бинарное иррефлексивное $>$, то $v(\boldsymbol{K}) = v(\boldsymbol{L})+1$;

4) если $\boldsymbol{K}$ — класс всех моделей вида $< U$, бинарное иррефлексивное самополное$>$, $\boldsymbol{L}$ — класс всех моделей вида $< U$, унарное$>$, то $v(\boldsymbol{K}) = 2v(\boldsymbol{L})$;

5) если $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ — произвольные релевантные классы, то $v(\boldsymbol{K}) \leq v(\boldsymbol{K} \cup \boldsymbol{L})$;

6) если $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ — произвольные релевантные классы, то $v(\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}) \leq v(\boldsymbol{K})$;

7) если $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ — произвольные релевантные классы и $v(\boldsymbol{K}) < v(\boldsymbol{L})$, то $v(\boldsymbol{L}) = v(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{K})$;

8) если $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ — произвольные релевантные классы и $v(\boldsymbol{K}) \leq v(\boldsymbol{L}$, то $v(\boldsymbol{K} \cup \boldsymbol{L}) = v(\boldsymbol{L})$;

9) если $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ — произвольные релевантные классы и $v(\boldsymbol{K}) < v(\boldsymbol{K} \cup \boldsymbol{L})$, то $v(\boldsymbol{K} \cup \boldsymbol{L}) = v(\boldsymbol{L})$.

---

[2]Гудмен называет *логическим* всякое отношение, явно определимое в терминах равенства.

Причем, оказывается, это приписывание таково, что:

$v(K) = 0$, если $K = \emptyset$;

$v(K) = 0$, если K — релевантный класс, все модели которого содержат только логические отношения;

$v(K) = 1$, если K — класс всех моделей вида $<U$, унарное$>$;

$v(K) = 2$, если K — класс всех моделей вида $<U$, унарное, унарное$>$;

$v(K) = 4$, если K — класс всех моделей вида $<U$, бинарное$>$;

$v(K) = 2$, если K — класс всех моделей вида $<U$, бинарное иррефлексивное самополное$>$;

$v(K) = 1$, если K — класс всех моделей вида $<U$, бинарное иррефлексивное самополное симметричное$>$ и т.д.

Общий случай, когда рассматриваются теории *произвольных* конечных сигнатур, отличается от предложенного (упрощенного) частного варианта только усложнением определения релевантного вида (и соответствующим пополнением списка условий 1–9).

Определив сложность любого *релевантного* класса моделей, Гудмен определяет затем сложность *произвольного* класса моделей заданной конечной предикатной сигнатуры. А именно, под *сложностью* $v(I)$ произвольного *класса* I *моделей* M конечной предикатной сигнатуры предлагается понимать сложность наименее сложного релевантного класса, все еще охватывающего класс I:

$$v(\mathbf{I}) = \min\{v(\mathbf{K}) | \mathbf{K} \supseteq \mathbf{I},\ \mathbf{K} - \text{релевантный класс}\}. \qquad (1)$$

Это определение корректно, так как для любого класса моделей I конечной предикатной сигнатуры всегда найдется релевантный класс моделей K такой, что $K \supseteq I$.

Под *сложностью* $v(M, T)$ отдельной *модели* M теории T (конечной предикатной сигнатуры) понимается сложность $v(\{M\})$ единичного класса $\{M\}$:

$$v(M, T) = v(\{M\}). \qquad (2)$$

Мы уже говорили, что главная модель M^* теории T задается самой теорией неоднозначно. Теория задает всего лишь не–

который класс $\boldsymbol{Mod}$ (T) моделей, содержащий главную модель M^*, и только. Поэтому, черпая информацию о главной модели только из самой теории, мы в состоянии оценить по формулам (1),(2) сложность модели M^* только приближенно — как сложность класса $\boldsymbol{Mod}(T)$. Эта оценка всегда будет оценкой сверху:

$$v(M^*,T) \leq v(\mathbf{Mod}(T)) =$$

$$= \min\{v(\mathbf{K})|\mathbf{K} \supseteq \mathbf{Mod}(T),\ \mathbf{K} \text{ — релевантный класс}\}. \quad (3)$$

Разумеется, оценку сверху (3) можно улучшить, если у нас есть дополнительный источник информации о главной модели M^*, не содержащийся в теории T. В этом случае мы знаем, что $M^* \in N$, где $N \subset \boldsymbol{Mod}(T)$, и, следовательно, $v(M^*,T) \leq \leq v(N) \leq v(\boldsymbol{Mod}(T))$.

Таким образом, окончательно, если TDS, и M^* – T–экстралогический базис системы S, то *его структурная сложность* (по Гудмену) $v_G(T,S,M^*)$ определяется формулой:

$$v_G(T,S,M^*) = v(M^*,T). \quad (4)$$

§ 2. Сложность элементарной теории

Напрашивается следующий шаг в развитии подхода Гудмена, хотя сам Гудмен его почему–то не сделал. Из (3) и (4) выводится очевидная приближенная оценка структурной сложности экстралогического базиса системы S :

$$v_G(T,S,M^*) \leq v(\mathbf{Mod}(T)). \quad (5)$$

Пусть S — произвольная элементарная система конечной предикатной сигнатуры. Очевидно, что SDS. Тогда из (4) имеем:

$$v_G(S,S,M^*) = v(M^*,S), \quad (6)$$

где M^* — главная модель системы S. С другой стороны из (5) имеем:

$$v_G(S,S,M^*) \leq v(\mathbf{Mod}(S)). \quad (7)$$

Эта *приближенная* оценка структурной сложности S-экстралогического *базиса* системы S может рассматриваться как *точное* значение сложности $v_G(S)$ *самой* теории S, ибо $Mod(S)$ взаимно однозначно соответствует системе S. Иными словами,

$$v_G(S) = v(Mod(S)) = \\ = \min\{v(\mathbf{K}) | \mathbf{K} \supseteq \mathrm{Mod}(S),\ \mathbf{K}\text{— релевантный класс}\}. \quad (8)$$

На формулу (8) мы будем ссылаться как на определение *сложности* произвольной *элементарной* теории S (конечной предикатной сигнатуры) *по Гудмену*.

Пусть Σ — класс всех элементарных теорий конечных предикатных сигнатур, и пусть S_1, S_2 принадлежат Σ. Тогда, если S_1 определяет S_2, а S_2 определяет S_1, то мы говорим, что теории S_1 и S_2 являются *переопределениями* друг друга, и пишем $S_1 \sim S_2$. Пусть $f : \Sigma \to Re$ — произвольная числовая характеристика теорий из Σ. Мы тогда и только тогда называем f *собственной* характеристикой (или *n-характеристикой*), когда для любых $S_1, S_2 \in \Sigma$, если $S_1 \sim S_2$, то $f(S_1) = f(S_2)$. В любом другом случае f называется *дескриптивной* характеристикой (или *d-характеристикой*).

Легко показать, что $v_G(S)$ — дискриптивная сложность (*d-сложность*). В самом деле, пусть, например, S_1 — элементарная теория в языке, содержащем только один одноместный предикатный символ P, а S_2 — элементарная теория в языке, содержащем два одноместных предикатных символа P и Q. Пусть S_1 не имеет нелогических аксиом, а единственная нелогическая аксиома S_2 — это формула $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x))$. Очевидно, $S_1 \sim S_2$, но $v_G(S_1) = 1$, а $v_G(S_2) = 2$.

Кроме того, нужно подчеркнуть следующее обстоятельство. Если элементарные теории S_1 и S_2 таковы, что $S_1 \sim S_2$, $Mod(S_1)$, $Mod(S_2)$ — *релевантные* классы, то $v_G(S_2) = v_G(S_1)$. В общем же случае для всякой элементарной теории S_1 всегда найдется элементарная теория S_2 такая, что $S_1 \sim S_2$ и $v_G(S_2) > v_G(S_1)$, хотя отнюдь не для всякой элементарной теории S_1 всегда найдется элементарная теория S_2 такая, что $S_1 \sim S_2$ и $v_G(S_2) < v_G(S_1)$.

Собственно говоря, Гудмен специально ориентировал (первым же постулатом своего подхода [3, p. 710]) свое понимание сложности произвольного класса моделей на то, чтобы отмеченное обстоятельство имело место.

§ 3. Стандартное представление научной теории

Следует заметить, что элементарная теории — это еще не научная теория. Поэтому, чтобы иметь возможность воспользоваться результатами Гудмена для оценки сложности *научной* теории, мы должны сначала фиксировать точное понимание нами последней.

С современной точки зрения, любая научная теория h — это гипотетическое утверждение вида

$$\forall x(RF(x) \wedge S_h(x) \Rightarrow W_h(x)), \qquad (9)$$

где квантор $\forall$ относится к области всех возможных объектов внимания, а предикаты RF, S_h, W_h имеют следующие смыслы:

$RF(x)$ — "x есть фрагмент реальной действительности";

$S_h(x)$ — "x есть возможный предмет теории h" или "x является одним из тех объектов внимания, которые мы, высказывая h, объявляем интересными";

$W_h(x)$ — "x есть возможный мир теории h" или "x является одним из тех объектов внимания, к которым мы, высказывая h, рекомендуем относиться как к реальным фрагментам действительности".

Предполагается, что предикаты S_h и W_h задаются автором теории, тогда как частичный (на классе всех возможных объектов внимания) предикат RF принципиально не подлежит авторскому определению: он задан самой действительностью и никогда не бывает полностью известным. Выбор S_h мотивируется желаемой областью исследования, а выбор W_h — характером высказываемого гипотетического утверждения.

Говорят, что *объект* (внимания) *a согласуется с теорией h*, если

$$RF(a) \wedge S_h(a) \Rightarrow W_h(a). \qquad (10)$$

В противном случае говорят, что *объект a опровергает теорию h* или является *фальсификатором для h*. Таким образом, теория h, сформулированная как гипотетическое утверждение (9), есть следующее предположение о реальности: *подлинная картина мира такова, что для любого объекта внимания выполняется условие* (10).

Принимая такую теорию, мы тем самым считаем, что любые объекты согласуются с теорией h (не являются фальсификаторами для h). Это предположение заведомо не опровергаемо, если объем предиката W_h включает объем предиката S_h. Если же объем предиката W_h пуст, а объем предиката S_h — нет, то теория h сформулирована абсурдным образом: она либо заведомо опровергается (в случае непустого пересечения объемов предикатов RF и S_h), либо бессодержательна (если объемы предикатов RF и S_h не пересекаются).

Для произвольных двух теорий h_1 и h_2 мы пишем $h_1 \succ h_2$ и говорим, что h_1 *сильнее* или *более рискованна, чем* h_2, если и только если объем предиката S_{h_1} содержит в себе объем предиката S_{h_2}, а объем предиката W_{h_1} содержится в объеме предиката W_{h_2}. Если $h_1 \succ h_2$, мы говорим также, что h_2 *слабее* или *менее рискованна, чем* h_1. Такое словоупотребление оправданно в том смысле, что если $h_1 \geq h_2$, то, заведомо, всякий фальсификатор для h_2 является фальсификатором и для h_1. Теории h_1 и h_2 мы называем:

– *равносильными* или *равнорискованными*, если и только если $h_1 \succ h_2$ и $h_2 \succ h_1$;

– *сравнимыми*, если и только если $h_1 \succ h_2$ или $h_2 \succ h_1$;

– *несравнимыми*, если не $h_1 \succ h_2$ и не $h_2 \succ h_1$.

Мы пишем $h_1 \approx h_2$, если и только если теории h_1 и h_2 равносильны.

Согласно (9) теория h определена, если заданы предикаты S_h и W_h. Так вот, стандартный подход к научным теориям основан на задании этих предикатов некоторым *специальным* образом. А именно: объемы указанных предикатов задаются как классы *интерпретаций* предварительно выбранного первопорядкового (с равенством) языка L сигнатуры Ω. Понятие "интерпретация языка" отличается здесь от понятия "модель языка" и возникает при обсуждении вопроса: как осуществляется классификация моделей языка на фрагменты реальной действительности ("реальные фрагменты") и на фрагменты нереальной действительности ("нереальные фрагменты")?

Пусть L_1 — язык сигнатуры $< P >$, где P — символ одноместного предиката и пусть {Ч}, {К}, {К,Ч} — множества, состоящие соответственно из человека, коровы, человека и коровы; { } — пустое множество. Рассмотрим несколько моделей языка L_1 :

$$M_1 = (\{Ч,К\}, \{\ \}); \quad M_2 = (\{Ч,К\}, \{Ч\};$$
$$M_3 = (\{Ч,К\}; \{К\}); \quad M_4 = (\{Ч,К\}; \{Ч,К\}).$$

(Фактически здесь перечислены все модели указанной сигнатуры на множестве {Ч, К}.) В определенном смысле каждая из них является фрагментом действительности уже потому, что она — *объект* внимания. Однако вопрос о том, какие из этих моделей относятся к *реальным* фрагментам действительности, а какие — к *нереальным*, ставит нас в тупик. Это происходит потому, что деление моделей на реальные и нереальные фрагменты зависит от выбора истолкования языка L_1. Вот несколько иллюстраций этой зависимости:

Истолкование I_1 языка L_1. Предикат P трактуется как свойство "быть целочисленной функцией". Тогда модель M_1 есть реальный фрагмент, а остальные три модели реальными фрагментами не являются.

Истолкование I_2 языка L_1. Предикат P трактуется как свойство "быть рогатым". Тогда только модель M_3 является реальным фрагментом.

Истолкование I_3 языка L_1. Предикат P трактуется как свойство "быть животным". Тогда модели M_2, M_3, M_4 — реальные фрагменты, а модель M_1 — нереальный фрагмент.

Истолкование I_4 языка L_1. Предикат P трактуется как свойство "быть одушевленным". Тогда, если мы признаем наличие души только у человека, лишь модель M_2 есть реальный фрагмент действительности, если же душа есть атрибут и коровы, то и модели M_3, M_4 — реальные фрагменты

Приведенные примеры подсказывают, что, как только мы выбираем одно из мыслимых истолкований первопорядкового языка L (сигнатуры Ω), у нас появляется возможность однозначного разбиения всего класса моделей $M\Omega$ этого языка на два подкласса — реальные и нереальные фрагменты. С другой стороны, сама возможность такого рода дихотомии уже подразумевает какое–то истолкование языка. Иными словами, речь идет о следующем:

а) если I — какое–то истолкование языка L (сигнатуры Ω), а M — произвольная модель этого языка, то (частичный на классе всех объектов внимания) предикат RF определен на объекте (I, M) и не определен на объекте M;

б) истолкованию I однозначно соответствует предикат RF_1 на $M\Omega$ (разбиение класса $M\Omega$ на две части) такой, что

$$(\forall M \in M\Omega)(RF_1(M) \Leftrightarrow RF_1((I, M))). \tag{11}$$

Условимся называть *интерпретацией* языка L пару (I, M), где I — истолкование языка L, M — его модель. Согласно "а", фраза: "Модель M — реальный (нереальный) фрагмент" — не является, если судить строго, правильным оборотом речи. Строго говоря, в качестве реальных и нереальных фрагментов следует рассматривать именно интерпретации, а не просто модели языка L. Причем, если мы знаем, что некоторая интерпретация a ($a = (I, M)$) есть реальный (нереальный) фрагмент, т.е. знаем, что $RF((I, M))$ (не $RF((I, M))$), то интерпретацию a будем называть *позитивным* (*негативным*) *фактом* a. Установить позитивный (негативный) факт a значит узнать, что $RF(a)$ (не $RF(a)$). Такого рода установление называется *опытом*.[3] Очевидно, всякий такой опыт ob может быть *представлен* парой (RF, a) : $ob = (RF, a)$.

Договоримся обозначать через $|RF_I|$ объем предиката RF_I. Тогда согласно "б" каждое истолкование I языка L определяет разбиение класса $M\Omega$ на две части: класс моделей $|RF_I|$ и класс моделей $M\Omega - |RF_I|$. Однако из "б" и даже из "б" совместно с "а" не следует, что знать истолкование I значит знать и указанное разбиение. Ввиду (11), чтобы определить, принадлежит ли модель M классу $|RF_I|$, требуется *не только знать истолкование*

[3]Это, конечно, очень обобщенное, по сравнению с обычным словоупотреблением, понимание термина "опыт", ибо здесь допускаются к рассмотрению и такие интерпретации $a = (I, M)$, где M — *бесконечная модель*.

I, но и *установить* позитивный или негативный факт $a = (I, M)$. В приведенном выше примере, зная истолкование I_2 языка L_1, мы вправе отнести модель M_3 к реальным фрагментам только тогда, когда установим факт, что корова не безрога. Здесь прослеживается аналогия с тем, что знать программу вычисления числа — это еще не значит знать само число. Отсюда, между прочим, следует, что истолкование I языка L не отождествляется с разбиением класса моделей $M\Omega$ этого языка на две части (т.е. с предикатом RF_I) и остается в контексте обсуждаемых вопросов *исходным* (*неопределяемым*) понятием.

Вернемся к обсуждению стандартного подхода к научным теориям. Процедуру задания предикатов S_h и W_h можно теперь поэтапно описать следующим образом.

Этап 1. Выбирается язык L_h (сигнатура Ω_h) и истолкование I_h этого языка.

Этап 2. Выбирается аксиоматическая система S_h в языке L_h так, чтобы $S_h \neq P(L_h)$, где $P(L_h)$ — множество всех предложений языка L_h. Объемом $|S_h|$ предиката S_h объявляется класс интерпретаций, определяемый условием

$$|S_h| = \{(I_h, M) | M \in \mathrm{Mod}(S_h)\}, \tag{12}$$

где $Mod(A)$ обозначает класс всех моделей произвольного множества A предложений языка L_h.

Этап 3. Выбирается аксиоматическая система W_h в языке L_h так, чтобы $S_h \supseteq W_h \neq P(L_h)$. Объемом $|W_h|$ предиката W_h объявляется класс интерпретаций, определяемый условием

$$|W_h| = \{I_h, M) | M \in \mathrm{Mod}(W_h)\}. \tag{13}$$

Таким образом, научная теория h однозначно задается четверкой $(\Omega_h, I_h, S_h, W_h)$. Представление

$$h = (\Omega_h, I_h, S_h, W_h) \tag{14}$$

называется *стандартным представлением*, или *стандартной логической реконструкцией* (*идеализацией*), тройка (Ω_h, S_h, W_h) — *формализмом*, а истолкование I_h — *содержательным базисом* научной теории h.

Как мы уже отметили выше, цель задания научной теории — сформулировать конкретное предположение вида (9). Стандартное представление (14) обеспечивает достижение этой цели при дополнительном соглашении относительно того, как от четверки $(\Omega_h, I_h, S_h, W_h)$ перейти к процедуре проверки условия (10) для любого объекта внимания a. Собственно говоря, такая процедура — это смысл предположения (9), а, следовательно, и *смысл теории* h. В качестве процедуры проверки условия (10) предлагается следующая последовательность шагов:[4]

Шаг 1. Рассматривается (произвольный) объект внимания a. Располагая Ω_h и I_h, выясняем, является ли a интерпретацией языка сигнатуры Ω_h при истолковании I_h. Если нет, то объявляем, что объект a не относится к теории h, не опровергает, следовательно, теорию h, и мы готовы рассматривать какой-то другой объект внимания a_1. Если да, то устанавливаем, какая именно модель M из $M\Omega_h$ является вторым членом интерпретации a, и переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Располагая S_h, выясняем, принадлежит ли $a = (I_h, M)$ классу $|S_h|$, т.е. принадлежит ли модель M классу $Mod(S_h)$. Если нет, то объявляем, что объект a не относится к предметам теории h, не опровергает, следовательно, теорию h, и мы готовы рассматривать другой объект внимания. Если да, то объявляем, что объект a относится к предметам теории h, и переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Устанавливаем, является ли предмет теории $a = (I_h, M)$ реальным фрагментом, т.е. имеет ли место соотношение $RF((I_h, M))$. Если не $RF((I_h, M))$, то объявляем a несущественным предметом теории ввиду его нереальности и готовы рассматривать другой объект внимания. Если да, то объявляем a фактом, существенным для теории h, и переходим к завершающему шагу 4.

Шаг 4. Располагая W_h, выясняем, принадлежит ли существенный для теории факт a классу $|W_h|$, т.е. принадлежит ли модель M из $(I_h, M) = a$ классу $Mod(W_h)$. Если да, то объявля-

[4]Вопрос, какими средствами можно (если можно) осуществить исполнение каждого шага из этой последовательности — за пределами темы настоящей статьи.

ем, что факт a согласуется с теорией h. Если нет, то объявляем, что факт a опровергает теорию h.

Предположение вида (9) тривиально в двух крайних (вырожденных) случаях: когда оно заведомо согласуется с любым фактом и когда заведомо существует факт, опровергающий это предположение. Следует заметить, что изложенное соглашение о процедуре проверки теории h (совместно с условием $W_h \neq P(L_h)$ и еще одним не отмеченным нами условием на связь между S_h и W_h[5]) исключают из числа возможных второй случай, оставляя (когда $S_h = W_h$) допустимым первый. Таким образом, в рамках традиционного подхода формулировка заведомо опровержимых научных теорий исключена.

Следует заметить также, что всякую *вырожденную* научную теорию h, т.е. теорию h вида $(\Omega_h, I_h, S_h, S_h)$, мы вправе отождествлять с непротиворечивой элементарной теорией S_h в языке сигнатуры Ω_h.

Впредь по техническим причинам мы расширяем рамки традиционного подхода, отказываясь от условия $W_h \neq P(L_h)$ и, тем самым, допуская к рассмотрению научные теории в пустыми классами $Mod(S_h)$ и $Mod(W_h)$, в частности, противоречивые элементарные теории S в качестве вырожденных теорий (Ω, I, S, S) таких, что $Mod(S) = \emptyset$.

§ 4. Сложность научной теории

Пусть H — класс всех теорий вида (14). Очевидно, любые две теории $h_1 = (\Omega_{h_1}, I_{h_1}, S_{h_1}, W_{h_1})$ и $h_2 = (\Omega_{h_2}, I_{h_2}, S_{h_2}, W_{h_2})$ из H равносильны тогда и только тогда, когда совпадают их содержательные базисы, и выполняется условие

$$\mathrm{Mod}(S_{h_1}) \setminus \mathrm{Mod}(W_{h_1}) = \mathrm{Mod}(S_{h_2}) \setminus \mathrm{Mod}(W_{h_2}). \qquad (15)$$

[5] Речь идет об условии, необходимом для того, чтобы правильно учесть роль теоретических терминов (если они есть) при формулировке и проверке научной теории. В контексте данной статьи проблема теоретических терминов не существенна, поэтому нет необходимости выписывать это условие явно (ср. [6, гл. 3]).

Мы говорим, что теория $h_2 = (\Omega_{h_2}, I_{h_2}, S_{h_2}, W_{h_2})$ является *излишне усложненным вариантом* теории h_1, если и только если h_1 и h_2 равносильны и выполняется условие

$$\mathbf{Mod}(S_{h_2}) \supset \mathbf{Mod}(S_{h_1}) \text{ или } \mathbf{Mod}(W_{h_2}) \supset \mathbf{Mod}(W_{h_1}). \quad (16)$$

Например, пусть h_1 — вырожденная теория (Ω, I, S_1, S_1), h_2 — вырожденная теория (Ω, I, S_2, S_2), где Ω содержит только символ R двуместного предиката; истолкование I произвольное; система S_1 аксиоматизируется двумя аксиомами — аксиомой симметричности для R и аксиомой рефлексивности для R; система S_2 аксиоматизируется одной аксиомой — аксиомой рефлексивности для R. Тогда, очевидно, теория h_2 — излишне усложненный вариант теории h_1.

Если теория $h_2 = (\Omega_{h_2}, I_{h_2}, S_{h_2}, W_{h_2})$ — излишне усложненный вариант теории $h_1 = (\Omega_{h_1}, I_{h_1}, S_{h_1}, W_{h_1})$, то мы пишем: $h_1 \succ h_2$. Очевидно, $h_1 \succ h_2$ тогда и только тогда, когда $\Omega_{h_1} = \Omega_{h_2}$, $I_{h_1} = I_{h_2}$, выполнены условия (15) и (16).

Пусть $g : H \to Re$ — произвольная числовая характеристика теорий из H. По аналогии с тем, как это выше было условлено для элементарных теорий, мы тогда и только тогда называем g *собственной* характеристикой (или *n–характеристикой*) *научных теорий*, когда для любых $h_1, h_2 \in H$, если $h_1 \approx h_2$, то $g(h_1) = g(h_2)$. В любом другом случае g называется *дескриптивной* характеристикой (или *d–характеристикой*). Кроме того, g называется *формальной*, если $g(h_1) = g(h_2)$ всякий раз, когда совпадают формализмы теорий h_1 и h_2. Наша цель — предложить некую специальную d–характеристики μ, которую можно рассматривать в качестве сложности научных теорий.

В связи с этим мы выдвигаем некоторые требования к искомой формальной характеристике μ, которые мы склонны рассматривать как естественные, учитывая при этом, с одной стороны, результаты Гудмена, а, с другой стороны, то обстоятельство, что сложность теорий должна играть важную роль при выборе одной теории из любых двух предъявленных конкурирующих теорий.

Мы уже отметили, что всякая вырожденная теория $h = (\Omega_h, I_h, S_h, S_h)$ отождествляется с элементарной теорией S_h.

Поэтому первое требование сводится к тому, чтобы для любой вырожденной теории выполнялось соотношение:

$$\mu(h) = v_G(S_h). \tag{17}$$

Допустим теперь, что требуется предпочесть (выбрать) одну из двух равносильных теорий h_1 и h_2. При этом, очевидно, либо обе теории просто совпадают, либо одна из них, скажем, h_2, является излишне усложненным вариантом другой: $h_1 \lhd h_2$. Во втором случае естественно предпочесть теорию h_1. Следовательно, второе требование к сложности μ сводится к условию:

$$\text{если } h_1 \lhd h_2, \text{ то } \mu(h_1) < \mu(h_2). \tag{18}$$

Предположим, далее, что требуется выбрать одну из двух сравнимых, но не равносильных теорий h_1 и h_2. Тогда, очевидно, одна из двух этих теорий, скажем, h_2, сильнее другой: $h_2 \succ h_1$. В этом случае естественно предпочесть теорию h_2, если дополнительно известно, что обе теории относятся к одной и той же области исследований, т.е. $Mod(S_{h_1} = Mod(S_{h_2})$. Таким образом, мы имеем третье условие на μ :

$$\text{если } h_2 \succ h_1, \text{ и } \mathbf{Mod}(S_{h_1}) = \mathbf{Mod}(S_{h_2}), \text{ то}$$
$$\mu(h_2) < \mu(h_1). \tag{19}$$

Никаких других естественных условий на d-сложность научных теорий мы не имеем в виду, поэтому полагаем всякое формальное отображение $\mu : H \to Re$, удовлетворяющее требованиям (17)–(19), приемлемой характеристикой. Из всего этого класса в принципе приемлемых характеристик, мы выбираем одно конкретное отображение μ_0 в качестве практически рекомендуемого. Оно определяется следующим образом: для всякой теории h вида (14)

$$\mu_0(h) = v_G(S_h) - v_G(Th[\mathbf{Mod}(S_h) \setminus \mathbf{Mod}(W_h)]),$$

$Th[X]$ обозначает элементарную теорию произвольного класса X моделей.

Читателю предоставляется самому убедиться в том, что μ_0 действительно удовлетворяет требованиям (17)–(19).

З а к л ю ч е н и е

Предложенная мера сложности, как и результат всякого иного научного предприятия, может быть подвергнута критике с бесчисленных сторон. О двух из них стоит, пожалуй, упомянуть немедленно.

Во–первых, указанная мера привязана к пониманию научной теории в соответствии с представлением (14), а это последнее отнюдь не безупречно в том отношении, что основано на чрезмерно обобщенном (чрезмерно идеализированном) видении опыта как интерпретации $a = (I, M)$, где M — (возможно) *бесконечная* модель. В перспективе желателен более операциональный подход к вопросу, что такое научная теория.

Во–вторых, желательно иметь наряду с d–сложностью также и некоторую n–сложность.

Что касается первого замечания, то автору представляется возможным найти такое представление научной теории, которое будет более операциональным, чем стандартное, но при котором предложенную меру d–сложности μ_0 удается, заново обосновав, оставить без изменения. Что же касается поисков подходящего определения n–сложности, то здесь, по-видимому, нельзя продвинуться вперед, опираясь на результаты Гудмена. По мнению автора, здесь имеют некоторые перспективны результаты работы [7].

Л и т е р а т у р а

1. КАЙБЕРГ Г. Вероятность и индуктивная логика. — М.: Прогресс, 1978.

2. МАМЧУР Е.А., ОВЧИННИКОВ Н.Ф., УЁМОВ А.И. Принцип простоты и мера сложности. — М.: Наука, 1989.

3. GOODMAN N. Axiomatic Measurement of Simplicity //Journal of Philosophy. — 1955. — Vol. 52, № 24. — P. 709–722.

4. GOODMAN N. Recent Developments in the Theory of Simplicity // Philosophy and Phenomenological Research. — 1959. — Vol. 19, № 4. — P. 429–446.

5. GOODMAN N. The Structure of Apperance. — Cambridge: Harward University Press., 1961.

6. ГОНЧАРОВ С.С., ЕРШОВ Ю.Л., САМОХВАЛОВ К.Ф. Введение в логику и методологию науки. — М.: Интерпракс, 1994.

7. САМОХВАЛОВ К.Ф. Способы измерения простоты эмпирических теорий //Методы обнаружения закономерностей с помощью ЭВМ. — Новосибирск, 1981. — Вып. 91: Вычислительные системы. — С. 68–75.

Поступила в редакцию
22 февраля 2001 года