МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНФОРМАТИКЕ

(Вычислительные системы)

2002 год Выпуск 169

УДК 510.649

ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМАХ РАЗМЫТЫХ ГРУПП

Г.Э.Яхъяева

1. Основные понятия и определения

Нами предложен новый подход в изучение нечеткости [2]. Его отличие от подхода Л.Заде [1] в том, что понятие нечеткости накладывается не на множества, а на функции. В работе [3] было введено понятие нечеткой бинарной операции, т.е. операции, результат действия которой состоит не из одного элемента, а представляет собой некоторое подмножество исходного множества. При этом каждое конкретное значение действия задается с некоторым весом. Соответственно этому было введено обозначение $a * b =_\alpha c$, где $\alpha \in (0, 1]$ показывает вес, с которым произведению элемента a на b соответствует элемент c.

Пусть нам дана алгебраическая система $< G, * >$ с нечеткой бинарной операцией. Операция "$*$" называется *ассоциативной*, если для любых $a, b, c \in G$ выполняется равенство множеств $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Операция "$*$" называется *компактной*, если для любых $a, b, c, d \in G$ справедливо следующее $\exists \alpha \;\; a * b =_\alpha c \Rightarrow ((a * b) * d = = c * d \wedge d * (a * b) = d * c)$.

Элемент $e \in G$ называется *нейтральным* если для любого $a \in G$ найдутся такие числа $\alpha, \beta \in (0, 1]$, что $e * a =_\alpha a$, $a * e =_\beta a$. Через E будем обозначать множество всех нейтральных элементов системы $< G, * >$.

Элемент $b \in G$ будем называть *обратным* к элементу $a \in G$ относительно нейтрального элемента $e \in E$, если найдутся такие числа $\alpha, \beta \in (0,1]$, что $b * a =_\alpha e$, $a * b =_\beta e$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебраическая система $< G, * >$ является размытой группой, если выполняются следующие свойства

1) операция "$*$" ассоциативна;

2) операция "$*$" компактна;

3) $E \neq \emptyset$;

4) для каждого элемента множества G найдется по крайней мере один обратный.

Будем говорить, что две размытые группы $< G, * >$ и $< G', \circ >$ обладают одной структурой [4], если существует такое взаимно однозначное отображение φ множества G на множество G', что для любых $a, b, c \in G$ справедливо

$$\exists \alpha \in (0,1][a * b =_\alpha c] \Leftrightarrow \exists \beta \in (0,1][\varphi(a) \circ \varphi(b) =_\beta \varphi(c)]. \quad (1)$$

Если при этом еще "сохраняется порядок на числах" [5], то группы G и G' будут называться изоморфными. Отображение группы $< G, * >$ в группу $< G', \circ >$ называется гомоморфизмом [3], если для любых $a, b, c \in G$

$$\exists \alpha \in (0,1][a * b =_\alpha c] \Rightarrow \exists \beta \in (0,1][\varphi(a) \circ \varphi(b) =_\beta \varphi(c)]. \quad (2)$$

2. Нормальные подгруппы

Пусть нам дана некоторая подгруппа H размытой группы G. Для некоторого элемента $g \in G$ определим множество gH следующим образом: $gH = \bigcup_{h \in H} \{g * h\}$. Множество gH будем называть *левым смежным классом* группы G относительно подгруппы H. Правый смежный класс определяется аналогично.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Смежные классы, образованные относительно размытой группы, являются непересекающимися классами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что смежные классы g_1H и g_2H пересекаются, т.е. найдется такой элемент $x \in g_1H \cap g_2H$. Тогда найдутся такие элементы $h_1, h_2 \in H$, что $x \in g_1 * h_1$ и $x \in g_2 * h_2$. В силу свойства компактности получим $g_2^{-1} * x =$

$= g_2^{-1} * g_1 * h_1 = g_2^{-1} * g_2 * h_2$, откуда следует $h_2 \in g_2^{-1} * g_1 * * h_1$.

Выберем некоторый элемент $y \in g_1 H$. Имеем $y \in g_1 * h_3 = (g_2 * g_2^{-1}) * g_1 * (h_1 * h_1^{-1}) * h_3 = g_2 * h_2 * h_1^{-1} * h_3 = g_2 * h$. Тем самым мы показали, что $g_1 H \supseteq g_2 H$. Обратное включение доказывается аналогично. □

Аналогично классической теории групп, мы можем рассмотреть понятие *нормальной размытой подгруппы.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Размытая подгруппа H размытой группы G называется нормальной, если для любого элемента $g \in G$

$$H = gHg^{-1}. \tag{3}$$

Так же, как и в четком случае легко показать, что выражение (3) эквивалентно выражению

$$gH = Hg. \tag{4}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть H нормальная подгруппа размытой группы G. Тогда если $x \in aH$ и $y \in bH$, то $x * y \subseteq \subseteq (a * b)H = cH$, где $(a * b) =_\alpha c$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in aH$, то $x \in a * h_1$. Если $y \in \in bH$, то $y \in b * h_2$. Имеем $x * y = (a * h_1) * (b * h_2) = (a * b) * (h_1' * h_2) \subseteq \subseteq (a * b)H$. □

3. Размытая факторгруппа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть φ некоторое отображение группы G в себя и H — нормальная подгруппа группы G. Отображение φ будем называть нормальным отображением, если для любого $a \in G$ выполняется

$$\varphi(aH) \subseteq aH. \tag{5}$$

Через $[a]_\varphi$ обозначим класс элементов, являющихся прообразами элемента a, т.е. $[a]_\varphi = \{b | \varphi(b) = a\}$. Заметим, что не для каждого элемента a из G существует класс $[a]_\varphi$. Через $[G]_\varphi$ обозначим множество классов $\{[a]_\varphi | a \in \varphi(G)\}$.

Выберем два элемента a_1 и a_2 из класса $[a]_\varphi$. Элемент a_1 принадлежит некоторому смежному классу $q_1 H$, следовательно, согласно (5), получим $\varphi(a_1) \in g_1H$. С другой стороны, если элемент a_2 принадлежит классу g_2H, то и $\varphi(a_2) \in g_2H$. А так как $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, получим $g_1H = g_2H$. Таким образом, мы доказали, что каждый класс $[a]_\varphi$ содержится в некотором смежном классе gH. Более того, в силу (5), для любого $a \in G$ получим

$$a \in gH \Rightarrow [\varphi(a)] \subseteq gH. \tag{6}$$

Пусть $a_i \in [a]_\varphi$ и $b_j \in [b]_\varphi$. Мы имеем, $a_i \in g_1H$ и $b_j \in g_2H$. Тогда, по утверждению 2, получим $a_i * b_j \subseteq (g_1 * g_2)H$. То есть, всевозможные произведения элементов из класса $[a]_\varphi$ на элементы из класса $[b]_\varphi$ будут попадать в один и тот же смежный класс.

Определим теперь размытую операцию на множестве $[G]_\varphi$. Пусть для некоторых $a_i \in [a]_\varphi$ и $b_j \in [b]_\varphi$ мы имеем $a_i * b_j \subseteq gH$. Тогда

$$\exists \alpha \in (0,1]([a]_\varphi \circ [b]_\varphi =_{\alpha>0} [c]_\varphi) \Leftrightarrow [c]_\varphi \in gH. \tag{7}$$

ТЕОРЕМА 1. *Система* $< [G]_\varphi, \circ >$ *является размытой группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $a_i \in [a]_\varphi$, $b_j \in [b]_\varphi$, $c_k \in [c]_\varphi$. Система $< G, * >$ является размытой группой, поэтому мы имеем $(a_i * b_j) * c_k = a_i * (b_j * c_k) \subseteq gH$. Следовательно, операция $\circ$ так же будет ассоциативной. Покажем, что заданная операция является компактной. Пусть $[a]_\varphi \circ [b]_\varphi =_\alpha [c]_\varphi$. Это означает, что существуют такие элемента $g_1, g_2, g_3 \in G$ и $h_1, h_2, h_3 \in H$, что $a_i =_{\alpha_1} g_1 * h_1$, $b_j =_{\alpha_2} g_2 * h_2$, $c_k =_{\alpha_3} g_3 * h_3$, $g_3 =_\beta g_1 * g_2$. Для произвольного элемента $d \in G$ мы имеем $c_k * d = (g_3 * h_3) * d = (g_3 * d) * h'_3 \subseteq (g_3 * d)H$. С другой стороны, имеем $(a_i * b_j) * d = (g_1 * h_1) * (g_2 * h_2) * d = (g_1 * g_2) * h'_1 * h_2 * d = g_3 * h * d = (g_3 * d) * h' \subseteq (g_3 * d)H$.

Следовательно, $[c]_\varphi \circ [d']_\varphi = ([a]_\varphi \circ [b]_\varphi) \circ [d]_\varphi$, где $d \in [d']_\varphi$.

Легко заметить, что роль нейтральных элементов играют классы, входящие в нормальную группу H. Пусть $[a]_\varphi \subseteq gH$, тогда все классы, содержащиеся в смежном классе $g^{-1}H$, будут играть роль обратных к классу $[a]_\varphi$. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть H — нормальная подгруппа размытой группы G и отображение $\varphi : G \to G$ отвечает условию (5).

Алгебраическую систему $< [G], \circ >$ будем называть размытой факторгруппой группы G и обозначать $G/_{H,\varphi}$.

Легко заметить, что если нормальная подгруппа H равна множеству E нейтральных элементов группы G, а отображение φ является биекцией, то группы G и $G/_{H,\varphi}$ обладают общей структурой.

Если же отображение φ отвечает условию $|\varphi(aH)| = 1$, для любого $a \in G$, то $G/_{H,\varphi}$ является четкой факторгруппой (обозначается $G/_{H}$), свойства которой описаны в работах [3,5].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть G — некоторая размытая группа. Для любой размытой факторгруппы $G/_{H,\varphi}$ существует гомоморфизм $\psi : G \to G_{H,\varphi}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\psi : a \mapsto [\varphi(a)]_\varphi$. Покажем, что это отображение сохраняет операцию в смысле (2). Пусть для некоторых элементов $a, b, c \in G$ мы имеем $a * b =_\alpha c$. Тогда найдутся такие элементы $g_1, g_2 \in G$, что $a \in g_1 H$ и $b \in g_2 H$. Следовательно, по утверждению 2, получим $c(g_1 * g_2)H$, а значит, $[\varphi(c)]_\varphi \subseteq (g_1 * g_2)H$.

С другой стороны, из $a \in g_1 H$ следует $[\varphi(a)]_\varphi \subseteq g_1 H$, и из $b \in g_1 H$ следует $[\varphi(b)]_\varphi \subseteq g_2 H$. Тогда, по утверждению 2 получим, что для любого $a_i \in [\varphi(a)]_\varphi$ и $b_j \in [\varphi(b)]_\varphi$ произведение $a_i * b_j$ содержится в смежном классе $(g_1 * g_2)H$. Следовательно, по определению операции (7) получим $[\varphi(a)]_\varphi \circ [\varphi(b)]_\varphi =_{\beta > 0} [\varphi(c)]_\varphi$.□

Гомоморфизм, переводящий размытую группу в некоторую ее факторгруппу, в дальнейшем будем называть *естественным гомоморфизмом.*

В статье [3] была доказана следующая теорема, которая является нечетким аналогом классической теоремы о гомоморфизмах.

ТЕОРЕМА 2. *Если ψ — гомоморфизм размытой группы G на размытую группу G^* с ядром H, то отображение $\tau : gH \mapsto \psi(g)E^*$ является изоморфизмом четких групп $G/_H$ и $G^*/_{E^*}$.*

В данной статье мы хотим привести другой аналог классической теоремы о гомоморфизмах, который основан на понятие размытой факторгруппы. Для доказательства нам понадобятся следующие две леммы.

Пусть E – множество нейтральных элементов группы G. Четкая факторгруппа $G/_E$ называется *скелетом* размытой группы G и обозначается $(G)_{sk}$.

ЛЕММА 1. *Пусть φ_1 и φ_2 два нормальных отображения группы G в себя, отвечающих одной и той же нормальной подгруппе H. Тогда факторгруппы $G/_{H,\varphi_1}$ и $G/_{H,\varphi_2}$ обладают изоморфными скелетами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $[gH]\varphi_i =$ $= \{[a]\varphi_i | [a]\varphi_i \subseteq gH\}$, $i = 1,2$. Тогда$(G/_{H,\varphi_i})_{sk} = \{[gH]\varphi_i$ $|g \in G\}$, $i = 1,2$. Согласно (5) отображение $f : [gH]\varphi_1 \mapsto [gH]\varphi_2$ является взаимно однозначным.

На скелетной группе операция определяется следующим образом [3]: $g_1 * g_2 =_\alpha g \Rightarrow [g_1H]\varphi_i \cdot [g_2H]\varphi_i = [gH]\varphi_i$. В силу чего, отображение f становится изоморфизмом.□

ЛЕММА 2. *Пусть ψ гомоморфизм размытой группы G на размытую группу G^* с ядром H. Тогда для любых $a, g \in G$ имеем $a \in gH \Leftrightarrow \psi(a) \in \psi(g)E^*$, где E^* – множество нейтральных элементов группы G^*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in gH$. Тогда найдется такой элемент $h \in H$, что $a =_{\alpha>0} g * h$. Так как ψ — гомоморфизм, получим $\psi(a) =_{\beta>0} \psi(g) \circ \psi(h)$. А из этого следует $\psi(a) \in \psi(g)E^*$.

Допустим теперь, что $\psi(a) \in \psi(g)E^*$ и $a \notin gH$. Если $a \notin gH$, тогда, с одной стороны, найдется такой элемент g', что $a \in g'H$ для любого $h \in H$ имеем $g' \neq gh$. Следовательно, $g'H \neq gH$. Тогда, по теореме 2, получим $\psi(g')E^* \neq \psi(g)E^*$.

С другой стороны, из $a \in g'H$, по только что доказанному, следует $\psi(a) \in \psi(g')E^*$. А так как $\psi(g')E^*$ и $\psi(g)E^*$ смежные классы группы G^*, то по утверждению 1, $\psi(g')E^* = \psi(g')E^*$. □

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ψ — гомоморфизм размытой группы G на размытую группу G^* с ядром H. Тогда существует размытая факторгруппа $G/_{H,\varphi}$ группы G, обладающая такой же структурой, что и группа G^*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $a \in G$ через (a) обозначим множество $\{a_i | \psi(a_i) = \psi(a)\}$. Очевидно, что множество элементов группы G разбивается на непересекающиеся классы такого типа. В силу леммы 2, получим $a \in gH \Leftrightarrow (a) \subseteq gH$. Зададим теперь нормальное отображение φ следующим образом. В каждом классе (a) выберем и зафиксируем представитель $a' \in (a)$. После чего определим $[a']_{\varphi} = (a)$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G^* \arrow[dl, dashed, leftrightarrow, "f"] \\ & G/_{H,\varphi} & \end{tikzcd}$$

Отображение $\pi : a \mapsto (a)$ является естественным гомоморфизмом, переводящим размытую G группу на размытую факторгруппу $G/_{H,\varphi}$.

Покажем, что группы $G/_{H,\varphi}$ и G^* обладают общей структурой. Для этого построим отображение $f : [a']_{\varphi} \mapsto \psi(a)$, где a' зафиксированный представитель класса (a). Очевидно, что отображение f является взаимно однозначным.

Согласно лемме 1 и теореме 2 существует изоморфизм $\tau : [gH]_{\varphi} \mapsto \psi(g)E^*$ скелетов данных групп. Теперь, нам достаточно доказать, что для любого $g \in G$ имеем $|[gH]_{\varphi}| = |\psi(g)E^*|$. Согласно лемме 2, имеем $[a']_{\varphi} \in [gH]_{\varphi} \Leftrightarrow a \in gH \Leftrightarrow \psi(a) \in$ $\in \psi(g)E^*$.□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Нормальные отображения φ_1 и φ_2, определенные на группе G относительно нормальной подгруппы H, будем называть подобными, если для любого $g \in G$ имеем $|\varphi_1(gH)| = \varphi_2(gH)|$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Если нормальные отображения φ_1 и φ_2 подобны, то факторгруппы $G/_{H,\varphi_1}$ и $G/_{H,\varphi_2}$ обладают общей структурой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В каждом смежном классе группы G выберем по одному представителю. Пусть $\{g_i | i \in I\}$ — некоторый пересчет этих представителей. Если нормальные отображения φ_1 и φ_2 подобны, то для каждого представителя g_i существует взаимно однозначное отображение $\pi_{g_i} : [g_iH]_{\varphi_1} \to [g_iH]_{\varphi_2}$. Тогда, объединяя все эти отображения, мы можем построить взаимно однозначное отображение $\pi : G/_{H,\varphi_1} \to G/_{H,\varphi_2}$, которое удовлетворяет условию $[a]_{\varphi_1} \subseteq gH \Leftrightarrow \pi([a]_{\varphi_1}) \subseteq gH$. А это, в свою очередь, обеспечивает выполнение условия (1). □

Таким образом, структура гомоморфного образа размытой группы G однозначно определяется ядром гомоморфизма и нормальным отображением группы G с точностью до подобия.

Литература

1. ZADEH L.A. Fuzzy sets //Inform. and control. — 1965. — № 8. — P. 338–353.

2. ДОБРИЦА В.П., ЯХЪЯЕВА Г.Э. О возможных подходах в изучении нечеткости //Материалы годичной научной конференции профессорско–преподавательского состава. МН и ВО РК, АГУ им. Абая. — Алматы, 1999. — С. 58–59.

3. ДОБРИЦА В.П., ЯХЪЯЕВА Г.Э. О группах с нечеткими операциями //Структурные и сложностные проблемы вычислимости. — Новосибирск, 1999. — Вып. 165: Вычислительные системы. — С. 127–138.

4. ЯХЪЯЕВА Г.Э. Изоморфизмы размытых полугрупп //Вестник АГУ. Сер. физико-математических наук. — Алматы. — 2000. — № 1. — С. 90–98.

5. ДОБРИЦА В.П., ЯХЪЯЕВА Г.Э. О гомоморфизмах размытых групп. Логика и приложения //Тез.международной конф., посвященной 60–летию со дня рождения академика Ю.Л.Ершова. Новосибирск, май, 2000. — Новосибирск, 2000. — С. 43–44.

Поступила в редакцию
25 ноября 2001 года