МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные системы)
2002 год **Выпуск 170**

УДК 519

О ВОЗМОЖНЫХ ТИПАХ ВРЕМЕНИ В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИМОСТИ[1]

А.С.Морозов, К.Ф.Самохвалов

При изучении обобщений понятия вычислимости на допустимые множества становится ясным, что традиционные представления о процессах перечисления, рассматриваемые в классической теории вычислимости, нуждаются в корректировке.

Так, в классическом случае любой алгоритмический процесс явно или неявно разворачивается во времени, моменты которого следуют (тикают) один за другим: $0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, время, в которое происходит процесс вычисления, изоморфно множеству натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ldots\}$, обозначаемому в математике ω. Предположим, что мы перечисляем некоторое непустое множество натуральных чисел $S \subseteq \omega$, т.е. осуществляем алгоритмический процесс, который время от времени выдает элементы из S, причем так, что любой элемент из S рано или поздно появится в этом процессе. Можно организовать новый алгоритмический процесс, вычисляющий некоторую функцию из ω на S, который выглядит следующим образом:

> если множество S бесконечно, то пусть $f(n)$ будет равно n–му элементу, выдаваемому этим процессом; если же множество S конечно и равно, скажем, $\{a_0, \ldots, a_m\}$, то просто положим $f(n)$ равным $a_{r(n)}$, где $r(n)$ есть остаток от деления n на $m + 1$.

[1]Работа поддержана грантом РГРФ № 01–03–00247.

В обоих случаях можно сказать, что ω выступает как перечислитель для множества S, т.е. как некоторый тип времени, в котором множество S может быть перечислено.

Основываясь на приведенных рассуждениях, сформулируем определение, которое окажется тривиальным для классического случая. Скажем, что перечислимое множество натуральных чисел A является *перечислителем* для множества натуральных чисел S, если существует вычислимая функция f из A на S.

Заметим, что отношение "быть перечислителем" транзитивно, т.е. если A — перечислитель для B и B — перечислитель для C, то A — перечислитель для C.

Назовём бесконечные перечислимые множества натуральных чисел A и B *эквивалентными*, если они являются перечислителями друг для друга.

Эти определения тривиальны в том смысле, что любые два бесконечных перечислимых множества оказываются эквивалентными, что устанавливается несложными рассуждениями.

Ситуация сильно изменяется, когда мы рассматриваем обобщение понятия вычислимости, базирующееся на понятии *допустимого множества*.

Мы не будем здесь приводить полностью достаточно длинное определение допустимых множеств, требующее к тому же большого объема комментариев. Мы дадим только некоторые важные примеры. Для серьёзного знакомства с предметом мы рекомендуем монографии [1, 3].

Предположим, что в нашем распоряжении имеется среда для программирования, в которой каким-то образом реализованы базовые типы данных.[2] Их можно представить себе как некоторую алгебраическую систему[3] $\mathfrak{M} = \langle M; P_0, \ldots, P_k \rangle$, в которой

---

[2] Например, натуральные, вещественные числа, строки и т.п.

[3] Конечно, базовые типы данных в языках высокого уровня, как правило, имеют несколько основных множеств (например, числа, символы, строки ...) с заданными на них операциями (например, сложение, конкатенация строк и т.п.), а также отображения, связывающие между собой элементы разных основных множеств (например, получение номера символа или длины строки). Однако в универсальной алгебре разработаны методы, которые позволяют достаточно просто представлять такие наборы типов как одну единственную алгебраическую систему. Из универсальной алгебры также

$P_i \subseteq M^{n_i}$ — отношение на M. В процессе создания программы почти всегда приходится стоить новые типы данных, исходя из уже имеющихся в наличии типов. Для этой цели в алгоритмических языках имеются соответствующие конструкции. Оказывается, что все мыслимые подобные конструкции, которые уже существуют и, видимо, которые будут изобретены, можно некоторым образом погрузить в так называемую *наследственно конечную надстройку* над этой алгебраической системой. Эта надстройка обозначается $\mathbb{HF}_{\mathfrak{M}}$ и получается как объединение следующей возрастающей цепи множеств:

$$\mathbb{HF}_0 = M(\text{универсум модели } \mathfrak{M}),$$

$$\mathbb{HF}_{n+1}(\mathfrak{M}) = \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}) \cup S_{<\omega}(\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M})),$$

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}).$$

Здесь $S_{<\omega}(V)$ обозначает множество всех конечных подмножеств множества V. Кроме того, здесь мы игнорируем возможную теоретико-множественную структуру элементов модели $\mathfrak{M}$, т.е. мы считаем, что элементы модели $\mathfrak{M}$ не могут содержать никаких других элементов.

Для всех имеющихся до сих пор способов построения новых типов данных из уже имеющихся, можно указать разумный способ для их погружения в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$[4]. Поэтому можно считать, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — универсальная среда для программирования над базовыми типами данных, представленными моделью $\mathfrak{M}$.

На $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ определяются отношения

- $U(x)$, выделяющее элементы модели $\mathfrak{M}$;
- $x \in y$, выделяющее пары, в которых x принадлежит y;
- $P_i(x_1, \dots, x_{n_i})$, $i = 0, \dots, k$, выделяющие наборы элементов основной модели $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие $P_i(x_1, \dots, x_{n_i})$.

следуют убедительные аргументы в пользу того, что для теоретического изучения можно ограничиться только символами отношений, естественно представив отношениями имеющиеся операции.

[4]Так, например, упорядоченную пару из элементов a и b можно представлять как множество $\{\{a, b\}, \{b\}\}$, (см. дальнейшие детали в [1, 3]).

Множества вида $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ вместе с вышеуказанными отношениями являются простейшими и важнейшими примерами *допустимых множеств*. В общем случае допустимые множества — это некоторые теоретико-множественные надстройки над алгебраическими структурами, удовлетворяющие определенным свойствам. Мы отправляем читателя за деталями к упомянутой выше литературе.

Естественно считать, что отношения $U, \in, P_i$, $i = 0, \ldots, k$ алгоритмически распознаваемы, т.е. у нас есть возможность проверять по данным наборов элементов из $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$, удовлетворяют ли они этим отношениям; причем мы можем вставлять такие проверки в наши алгоритмы.

Естественно также полагать, что если отношения $A(\bar{x})$ и $B(\bar{x})$ алгоритмически распознаваемы, то таковы же и отношения, выражаемые через них как $A(\bar{x})$ & $B(\bar{x})$, $A(\bar{x}) \vee B(\bar{x})$, $A(\bar{x}) \to$ $\to B(\bar{x})$, $\neg A(\bar{x})$, $\exists z \in tA(\bar{x})$, $\forall z \in tA(\bar{x})$. Поэтому естественно считать, что все отношения, выражаемые через основные отношения модели $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ с помощью вышеуказанных средств, тоже алгоритмически распознаваемы. Такие отношения называются Δ_0-отношениями. Соответствующие формулы носят название Δ_0-формул.

В вычислимости над допустимыми множествами важную роль играет также понятие Σ-формулы. С точностью до эквивалентности эти формулы получаются навешиванием конечного числа неограниченных кванторов существования на Δ_0-формулы[5] Заметим, что любая Δ_0-формула эквивалентна некоторой Σ-формуле. Важность таких формул иллюстрируется следующим примером: предположим, что функция $F(x)$ на $\mathrm{HF}(\mathfrak{M})$ определима Σ-формулой[6] следующим образом:

$$F(x) = y \Leftrightarrow \exists t \varphi(x, y, t),$$

где φ — Δ_0-формула. Тогда $F(x)$ можно считать вычислимой; действительно, зафиксировав аргумент x, мы можем перебирать всевозможные t и y до тех пор, пока не обнаружим что $\varphi(x, y, t)$.

[5] Данная характеризация не является определением.

[6] Такие функции назовем Σ-функциями.

Тогда надо взять y в качестве результата $y = F(x)$. Естественно считать, что Σ–функции — это в точности интуитивно вычислимые функции на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

В каждом допустимом множестве естественно содержится множество ω натуральных чисел в таком виде, как оно обычно определяется в теории множеств: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots, n+1 = n \cup \{n\}, \ldots$. Известно, что оно выделяется Δ_0–формулой [3] и поэтому является подмножеством, определимым с помощью Σ–формулы (Σ–подмножеством).

Хорошо известно, что классическая вычислимость является частным случаем Σ–определимости для простейшего допустимого множества $\mathbb{HF}(\emptyset)$. В частности любая частичная функция из ω в ω вычислима тогда и только тогда, когда она является Σ–функцией на $\mathbb{HF}(\emptyset)$, а произвольное подмножество $S \subseteq \omega$ перечислимо тогда и только тогда, когда оно Σ–определимо на $\mathbb{HF}(\emptyset)$.

Проводя аналогию с рассмотрениями, приведенными в начале статьи, мы будем считать *перечислителем* любое Σ–подмножество. Мы говорим, что *множество A перечислимо с помощью перечислителя S* если существует Σ–функция из S на A.

Пусть S_0 и S_1 перечислители. Будем говорить, что S_0 *сводится к* S_1 (и обозначать это как $S_0 \preceq S_1$), если существует Σ–отображение "на" $f : S_1 \to S_0$. Смысл этого определения состоит в том, что если S_0 сводится к S_1, то любое множество, перечислимое с помощью S_0, перечислимо и с помощью S_1.

Будем говорить, что S_0 *эквивалентно* S_1 (и обозначать $S_0 \equiv S_1$), если $S_0 \preceq S_1$ и $S_1 \preceq S_0$. Класс эквивалентности перечислителя S обозначаем через $[S] = \{A | A \equiv S\}$.

Если мы определим $[A] \preceq [B] \Leftrightarrow A \preceq B$, то нетрудно видеть, что полученное отношение $\preceq$ на эквивалентных классах перечислителей будет частичным порядком.

Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, $A \subseteq \mathbb{A}$. *Структурой перечислителей на Σ–множестве A* назовем пару

$$E_{\mathbb{A}}(A) = \langle \Sigma(A)/_{\equiv}, \preceq \rangle,$$

где $\Sigma(A)$ есть семейство всех Σ–подмножеств A. *Структурой бес-*

конечных перечислителей на Σ множестве A назовем пару

$$E^*_{\mathbb{A}}(A) = \langle(\Sigma(A) \setminus F(\mathbb{A}))/_{\equiv}, \preceq\rangle,$$

где $F(\mathbb{A})$ — семейство всех конечных Σ–подмножеств A.

Как уже отмечалось, в классическом случае, т.е. при $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\emptyset)$, структура $E^*_{\mathbb{A}}(\omega)$ оказывается тривиальной, т.е. состоящей из одного элемента. Можно показать, что такая структура $E^*_{\mathbb{A}}(S)$ будет тривиальной также и для любого бесконечного Σ–подмножества $S \subseteq \mathbb{HF}(\emptyset)$.

Тем не менее, в общем случае семейства вида $E_{\mathbb{A}}(\omega)$ могут оказаться нетривиальными. Так, например, в [2] построен пример допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ и Σ–подмножества натуральных чисел S, для которого не существует Σ–отображения из ω в S. Это говорит о том, что классы $[S]$ и $[\omega]$ в структуре $E^*_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(\omega)$ различны. Отсюда следует вывод, что если вообще вводить дискретное математическое время, то против привычных ожиданий, в этом случае имеется более, чем один тип такого времени.

Можно ввести следующие определения: пусть как обычно

$$A \oplus B = \{\langle a, 0\rangle | a \in A\} \cup \{\langle b, 1\rangle | b \in B\},$$

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \ \&\ b \in B\}.$$

Будем называть перечислитель A *конечно распараллеливаемым*, если $A \oplus A \preceq A$, и *бесконечно распараллеливаемым*, если $A \times A \preceq A$. Смысл этих определений состоит в том, что конечно (бесконечно) распараллеливаемый перечислитель можно использовать для одновременного перечисления конечного (бесконечного вычислимого) семейства множеств, перечислимых с его помощью.

Представляет интерес изучение того, являются ли данные определения распараллеливаемых перечислителей нетривиальными в данной постановке задачи, а также изучение возможных структур перечислителей и их алгебраических свойств (описание получаемых частично упорядоченных множеств, существование в них точных верхних и нижних граней, алгоритмические свойства элементарных теорий).

Кроме того, напрашивается интригующий внешний (философский) вопрос: не открывает ли наличие разных типов *математического* времени возможность разных типов *физического, психологического* и т.д. времени?

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Определимость и вычислимость. – Новосибирск: Научная книга, 1996. — 300 с.

2. МОРОЗОВ А.С. Σ–множество натуральных чисел, не перечислимое с помощью натуральных чисел// Сиб. мат. журнал.– 2000.– Т.41, № 6. – С.1401–1408.

3. BARWISE J. Admissible Sets and Structures. Springer–Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1975.

Поступила в редакцию
27 декабря 2001 года