МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные системы)

2002 год Выпуск 170

УДК 510

# ПОЧЕМУ ОБОБЩЕННАЯ КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА ИСТИННА В КАНТОРОВСКОМ "МИРЕ МНОЖЕСТВ"

А.С. Нудельман

После доказательства Коэном независимости континуум–гипотезы от аксиом теории множеств Цермело–Френкеля $ZF$, признаваемых формальным выражением канторовских (классических) теоретико–множественных представлений, возникла проблема поиска естественного расширения наших представлений о канторовском "мире множеств", при котором гипотеза континуума была бы разрешимой, т.е., конкретнее, возникла проблема поиска теоретико–множественной аксиомы $Ax$ такой, что

а) в теории $ZF + Ax$ было бы доказуемо либо континуум–гипотеза, либо отрицание континуум–гипотезы и

б) аксиома $Ax$ имела бы достаточно веское и убедительное основание быть принятой в качестве естественного уточнения свойств канторовского "мира множеств".

В данной работе формулируется новая теоретико–множественная аксиома $ABS$ (аксиома поглощения) (§ 1), позволяющая решить обобщенную континуум–проблему, и приводится обоснование принятия этой аксиомы в качестве естественного уточнения свойств канторовского "мира множеств" (§ 2,3).

Здесь используются общепринятые в $ZF$ обозначения и сокращения. В частности, буквами $\alpha, \beta, \gamma$ и $\delta$ (возможно, с индексами) обозначаются ординалы, а символами $\omega_\alpha$ — бесконечные кардиналы ($\omega_0 = \omega$). Выражения $|x|\tau|y|$, где

$r \in \{<, \leq, =\geq, >\}$, используются для сравнения мощностей множеств $x$ и $y$ (определяемые, традиционно, посредством понятия "разнозначное отображение"). Если $f$ — отображение и $x \subseteq dom\ f$, то $f[x] = \{f(z)|z \in x\}$. Через $P(x)$ обозначается множество $\{z|z \subseteq x\}$.

## § 1. Аксиома поглощения $ABS$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что множество $x$ поглощает множество $y$ (записывать $abs(x,y)$), если существует разнозначное отображение $f : \beta + 1 \to y \cup \{y\}$ такое, что имеет место

а) $f[\beta] = y$,

б) $\forall \gamma < \beta \ \ (|f[\gamma + 1]| \leq |x|)$,

в) $|f[\beta + 1]| > |x|$.

АКСИОМА $ABS$. Для всяких множеств $x$ и $y$, если $abs(x,y)$, то существует функция (поглощения) $\varphi : P(x) \to P(y)$ такая, что выполняются

а) $\forall z \subseteq x \ (abs(z, \varphi(z)))$,

б) $\forall z_1, z_2 \subseteq x(\varphi(z_1 \cap z_2) = \varphi(z_1) \cap \varphi(z_2))$.

## § 2. Принцип естественности $PN$ расширения представлений о свойствах бесконечных множеств канторовского "мира множеств"

Гносеологический источник естественного расширения (канторовских, классических) теоретико-множественных представлений не может, очевидно, находиться внутри существующих теоретико-множественных представлений. Поэтому такой источник следует искать в более широких, общенаучных рамках. При этом, разумеется, необходимо иметь ввиду два обстоятельства:

1) неразрешимая в $ZF$ проблема, связанная с бесконечными множествами, есть вопрос о наличии или отсутствии вполне определенного свойства у бесконечных множеств и

2) непосредственное интуитивное усмотрение каких-либо свойств у бесконечных множеств невозможно.

Первое обстоятельство является очевидным, а второе — представляется очевидным, поскольку бесконечные множества не имеют своих прототипов в реальном физическом мире и, следовательно, непосредственное интуитивное усмотрение какого-либо свойства бесконечных множеств не имеет объективной основы[1].

Заметим, что в существующие теоретико-множественные представления, оформленные в виде теории множеств $ZF$, аксиомой бесконечности $A^{inf}$ бесконечное множество только вводится в качестве теоретического конструкта (естественно, вместе с внутренними структурными свойствами такого множества, выводимыми из $A^{inf}$). Откуда же возникает весь известный спектр бесконечных множеств и весь известный спектр свойств этих теоретических конструктов?

Принятая здесь точка зрения состоит в следующем. Все аксиомы теории множеств $ZF$, за исключением аксиомы бесконечности $A^{inf}$, появились в качестве результата элементарного гносеологического приема — прямой экстраполяции, прямого распространения (переноса) свойств конечных совокупностей на бесконечные (акт экстраполяции осуществляется самой аксиомой $A^{inf}$): всякая аксиома $ZF - A^{inf}$ для (наследственно) конечных множеств истинна почти "осязаемо", почти эмпирически и такая аксиома, исходно выражающая некоторое свойство конечных множеств, принимается в качестве истинной для всех множеств, как конечных, так и бесконечных. Что касается свойств обозримых конечных множеств, выраженных аксиомами $ZF - A^{inf}$, то эти свойства непосредственно усматриваются на физических прототипах этих множеств — на обозримых совокупностях физических объектов. Таким образом, принятая здесь точка зрения позволяет рассматривать классическую теорию множеств как своеобразную эмпирическую теорию, включающую бесконечные множества в качестве теоретических конструктов, позволяет не удивляться тому факту, что классический математический аппарат весьма полезен для описания эмпирического мира.

---

[1]Непосредственное интуитивное усмотрение математиком какого-либо свойства бесконечных множеств, формулируемое, обычно, в виде гипотезы, обусловлено, как правило, индивидуальностью как его математического образования, так и его практики работы в математике.

Принимаемый здесь принцип естественности $PN$ расширения теории $ZF$ основан на том, что исходным "материалом" для такого расширения, при котором сохраняется "канторовость" свойств бесконечных множеств, могут быть только результаты непосредственного наблюдения свойств совокупностей реальных физических объектов, т.е. наблюдения, аналогичного тому, которое послужило основанием для принятия аксиом теории $ZF - A^{inf}$. Здесь считается, что всякая добавляемая к $ZF$ новая аксиома, уточняющая свойства бесконечных множеств, должна удовлетворять принципу естественности $PN$.

**Принцип естественности $PN$.** Всякая новая аксиома $Ax$ удовлетворяет принципу $PN$ тогда и только тогда, когда

а) в теории $ZF$ доказуемо предложение $Ax^{fin}$, которое получается из предложения $Ax$ путем ограничения области значений всех входящих в $Ax$ переменных множеством наследственно конечных множеств, и

б) теория $ZF + Ax$ непротиворечива.

Ясно, что если добавляемая к $ZF$ новая аксиома $Ax$ удовлетворяет принципу естественности $PN$, то теорией $ZF + Ax$ будет описываться именно канторовский, классический "мир множеств", причем более полно, чем это делается теорией $ZF$. Следовательно, будет увеличена полезность (для описания эмпирического мира) математического аппарата, базирующегося на теории $ZF + Ax$. Если же новая аксиома $Ax$ не удовлетворяет принципу $PN$, хотя теория $ZF + Ax$ и непротиворечива, то реален случай, когда предложение $Ax^{fin}$ ложно в области конечных множеств. В этом случае теорией $ZF + Ax$ будет описываться "мир" таких множеств, которые в части, обусловленной аксиомой $Ax$, не будут иметь "генетической" связи с эмпирической действительностью (будут, даже, "отрицать" эмпирическую действительность) и, следовательно, математический аппарат, базирующийся на теории $ZF + Ax$, не может быть полезен для описания эмпирического мира.

Конечно, теоретически возможна ситуация, когда новые аксиомы $Ax_1$ и $Ax_2$ удовлетворяют принципу естественности $PN$,а теория $ZF + Ax_1 + Ax_2$ противоречива[2]. Здесь, по–видимому, можно сказать только одно: в невозможность такой ситуации можно только верить, а возможность такой ситуации может и, следовательно, должна быть доказана (здесь усматривается аналогия с эмпирической гипотезой, которую, как известно, нельзя доказать, но можно, если эта гипотеза не верна, опровергнуть).

## § 3. Об аксиоме поглощения

В работе [6] показано, фактически, что в теории $ZF$ доказуема эквивалентность аксиомы поглощения $ABS$ и обобщенной континуум–гипотезы $GCH$. Следовательно, во–первых, теория $ZF + ABS$ непротиворечива (теория $ZF$ считается непротиворечивой) и, во–вторых, в теории $ZF + ABS$ доказуема $GCH$. В работе [6] показано, также, что в теории $ZF$ доказуемо предложение $ABS^{fin}$. Следовательно, аксиома $ABS$ удовлетворяет принципу естественности $PN$.

Более того, гносеологический статус аксиомы поглощения $ABS$ не ниже гносеологического статуса аксиом теории $ZF - A^{fin}$, поскольку $ABS^{fin}$ является результатом наблюдения вполне определенного и реализуемого на практике физического (механического) процесса плотного наполнения $CF$ [5]. Представим предложение $ABS$ в виде $\forall x, y Abs(x, y)$ и покажем естественность привнесения факта $ABS$ в существующие теоретико–множественные $ZF$–представления на примере простейшего нетривиального частного случая этого факта — $Abs(\omega_0, \omega_1)$.

---

[2]Казалось бы, что такими новыми аксиомами являются аксиома поглощения $ABS$ и аксиома детерминированности $AD$. Но аксиома $AD$ не удовлетворяет принципу естественности $PN$, поскольку $AD$ есть результат экстраполяции соответствующего свойства конечных игр (множеств) только на счетно–бесконечные игры (множества). Результат экстраполяции $ADF$ вышеупомянутого свойства и на несчетно–бесконечные игры (множества) оказывается таким, что теория $ZF + ADF$ противоречива.

Пусть $g$ — отображение такое, что $dom\ g = \omega_1 + 1$ и $g(\alpha)$, $\alpha \leq \omega_1$, есть разнозначное отображение ординала $\alpha + 1$ на кардинал $\beta$. Примем квазифизическую интерпретацию отображения $g$ : будем считать, что последовательность $< g(0), g(1), \ldots$ $\ldots, g(\omega_1) >$ является $ZF$–описанием пошагового процесса $CF$ плотного наполнения формы (урны) $M(\omega_1)$, представляющей собой семейство $\{m_\gamma | \gamma < \omega_1\}$ мест, объектами (шарами) из совокупности $S(\omega_1) = \{s_\gamma | \gamma \leq \omega_1\}$, при этом в процессе $CF$

а) каждое место формы $M(\omega_1)$ может быть занято только одним объектом из $S(\omega_1)$,

б) каждый объект из $S(\omega_1)$ может занимать только одно место формы $M(\omega_1)$ и

в) на каждом шаге $\alpha(\leq \omega_1)$ процесса $CF$ в форму $M(\omega_1)$ вводится объект $s_\alpha$ и совокупность всех уже введенных объектов $S(\alpha) = \{s_\gamma | \gamma \leq \alpha\}$ плотно размещается в начальном отрезке (начальной подформе) $M(\beta) = \{m_\gamma | \gamma < \beta\}$ в соответствии с отображением $g(\alpha)$, которое является $ZF$–описанием установленного на шаге $\alpha$ распределения объектов из $S(\alpha)$ по местам подформы $M(\beta)$.

Отметим две особенности процесса $CF$.

1) До шага $\omega_1$ происходит наполнение (под)формы $M(\omega_0) =$ $= \{m_\gamma | \gamma < \omega_0\}$ объектами совокупности $S(< \omega_1) = \{s_\gamma | \gamma < \omega_1\}$, поскольку всякий объект $s_\gamma$, $\gamma < \omega_1$, вводится в форму $M(\omega_0)$ на шаге $\gamma$ и на всех последующих шагах $\delta, \gamma < \delta < \omega_1$, объект $s_\gamma$ остается в форме $M(\omega_0)$, "находя" в ней себе место. Эту особенность будем формулировать так: в процессе $CF$ форма $M(\omega_0)$ вмещает все объекты совокупности $S(< \omega_1)$, рассматриваемой в качестве потенциальной, становящейся $\omega_1$–последовательности $< s_0, s_1, \ldots, s_\gamma, \ldots >, \gamma < \omega_1$.

2) На шаге $\omega_1$ введенная в $M(\omega_1)$ совокупность объектов $S(\omega_1)$ не вмещается в форму $M(\omega_0)$, причем не вмещается в форму $M(\omega_0)$ и часть этой совокупности, равная $S(< \omega_1)$. Эту особенность будем формулировать так: в процессе $CF$ форма $M(\omega_0)$ не может вместить все объекты совокупности $S(< \omega_1)$, рассматриваемой в качестве актуальной, завершенной $\omega_1$–последовательности $< s_0, s_1, \ldots, s_\gamma, \ldots >$, $\gamma < \omega_1$.

Ясно, что отмеченные особенности характеризуют некоторый квазифизический факт, относящийся к взаимоотношению между формой $M(\omega_0)$ и совокупностью объектов $S(<\omega_1)$ в процессе плотного наполнения $CF$, а именно — в процессе $CF$ (актуальная) совокупность $S(<\omega_1)$ оказывается максимальной совокупностью объектов, потенциально вводимой (до шага $\omega_1$) в форму $M(\omega_0)$. Этот квазифизический факт на $ZF$-языке описывается как теоретико-множественный факт $abs(\omega_0, \omega_1)$ (требуемое определением отношения $abs$ отображение есть тождественное отображение $f : \omega_1 + 1 \to \omega_1 + 1$).

Наконец, "наблюдая" процесс плотного наполнения $CF$, нетрудно, по-видимому, признать естественность принятия квазифизической гипотезы об этом процессе, состоящей в том, что

а) до шага $\omega_1$ в подформу $M(a) = \{m_\gamma | \gamma \in a\}$, $a \subseteq \omega_0$, потенциально вводится некоторая совокупность объектов $S_a \subseteq \subseteq S(<\omega_1)$, которая оказывается максимальной для подформы $M(a)$ (потенциальное введение в $M(a)$ максимальной совокупности объектов $\subseteq S(<\omega_1)$ вынуждается потенциальным введением в $M(\omega_0)$, $\omega_0 \supseteq a$, максимальной для $M(\omega_0)$ совокупности $S(<\omega_1)$, и

б) если до шага $\omega_1$ в подформу $M(a) = \{m_\gamma | \gamma \in a\}$, $a \subseteq \omega_0$, потенциально вводится максимальная для $M(a)$ совокупность объектов $S_a$, а в подформу $M(b) = \{m_\gamma | \gamma \in b\}$, $b \subseteq \omega_0$, потенциально вводится максимальная для $M(b)$ совокупность объектов $S_b$, то $S_a \cap S_b$ есть максимальная совокупность объектов, потенциально вводимая (до шага $\omega_1$) в подформу $\{m_\gamma | \gamma \in a \cap b\}$.

Данная квазифизическая гипотеза на $ZF$-языке описывается как теоретико-множественное утверждение $Abs(\omega_0, \omega_1)$ (разумеется, упоминаемая в п. "а") максимальная для подформы $M(a)$ совокупность объектов $S_a$ такова, что имеет место, в переводе на $ZF$-язык, $abs(a, c)$, где $c = \{\gamma | s_\gamma \in S_a\}$).

Ясно, что мотивировку естественности факта $Abs(\omega_0, \omega_1)$ нетрудно обобщить до мотивировки естественности фактов $Abs(\omega_\alpha, \omega_{\alpha+1})$, $\alpha \geq 0$, а затем — до мотивировки естественности всех фактов $Abs(x, y)$, где $x$ и $y$ — бесконечные множества, для которых выполняется $abs(x, y)$ (заметим, что $abs(x, y)$ влечет вполне упорядочиваемость множеств $x$ и $y$.)

## З а к л ю ч е н и е

Общепризнано, что аксиомы теории множеств $ZF$ характеризуют свойства канторовского (классического) "мира множеств". Поскольку аксиома поглощения $ABS$ удовлетворяет принципу естественности $PN$, а обобщенная континуум-гипотеза $GCH$ доказуема в теории $ZF + ABS$, то $GCH$ истинна в канторовском "мире множеств".

## Л и т е р а т у р а


1. КОЭН П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969. — 347 с.

2. FRAENKEL A.A., BAR-HILLEL Y., LEVY A. Foundations of set theory. — Amsterdam: North-Holland, 1973. — 404 p.

3. FEFERMAN S., FRIEDMAN H.M., MADDY P., STEEL J.R. Does mathematics need new- axioms? //Bull.Simbol.Logic. — 2000. — Vol. 6, № 4. — P. 401–446.

4. КАНОВЕЙ В.Г. Аксиома выбора и аксиома детерминированности. — М.: Наука, 1984. — 65 с.

5. НУДЕЛЬМАН А.С. Об одном индуктивном решении континуум-проблемы //Анализ последовательностей и таблиц данных. — Новосибирск, 1994. — Вып. 150: Вычислительные системы. — С. 197–210.

6. НУДЕЛЬМАН А.С. О возможном решении обобщенной континуум-проблемы //Алгебра и логика. — 1999. — Т. 38, № 4. — С. 409–418.



Поступила в редакцию
28 июня 2002 года