МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
КОГНИТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ
(Вычислительные системы)
2002 год Выпуск 172

УДК 11+13+17+519

НАУЧНЫЙ И ФИЛОСОФСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ[1]

Н.В.Белякин, М.Б.Софиенко

В знаменитом романе Томаса Манна "Доктор Фаустус" упоминается некий богослов, который определял религиозность как проявление человеческого интереса к бесконечности [3, с. 117]. Несмотря на некоторую отвлеченность этой формулировки, с ней вполне можно согласиться. Действительно, противоположность земного и небесного, реального и идеального нередко облекается в форму неустранимого противопоставления конечного и бесконечного, когда бесконечное отгораживается пограничным шлагбаумом от всякого конечного, размещаясь по ту сторону от него. При таком методологическом подходе, в сравнении с такой абсолютной бесконечностью, триллион и единица равно ничтожны; а то, что в, свою очередь, триллион, по сравнению с единицей, сильно смахивает на бесконечность, обычно остается (либо умышленно оставляется!) за кадром. Абстрагируясь от конкретного явления и превращаясь в идеальное понятие, идея бесконечного становится как бы могильщиком конечного, что придает всему конечному оттенок онтологической неполноценности.

Тем не менее, уже с конца XIX века понятие абсолютной бесконечности прочно укоренилось в математике, став одновременно и источником многочисленных парадоксов и теоретических

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантом РГНФ № 02-03-18307а.

трудностей, которые, с классических позиций, представляются неразрешимыми. Вот один только пример.

Нынешняя математика склонна рассматривать геометрический отрезок как множество всех его точек, которое, несомненно, следует признать бесконечным. Между тем в теории множеств была построена некая шкала "бесконечных количеств", мощностей или кардинальных чисел. Встает вопрос: какое место на этой шкале занимает данное множество, сколько именно в нем точек? Выяснилось, что искомое количество мы можем, не опасаясь противоречия, просто "назначить" по своему произволу (с некоторыми тривиальными оговорками).

Выходит, мы задали бессмысленный вопрос? Как же так получилось? Представление о геометрическом отрезке несет в себе определенный физический смысл (связанный с непосредственно наблюдаемым феноменом непрерывности). Но когда речь заходит об абстрактном множестве всех точек отрезка как о вполне определенном объекте, это уже результат идеализации, т.е. плод нашей фантазии. Такая фантазия довольно удобна в чисто математических рассмотрениях, но все же она незаметно уводит нас от реальности. Именно этот отрыв от реальности и обнаруживается, когда мы спрашиваем о количестве этих точек.

Поясним сказанное посредством забавной аналогии. Если бы мы спросили древнего грека, видел ли он Зевса, то он, возможно, показал бы нам грозовую тучу. Мы не знаем, что ответил бы тот же грек на новый вопрос: какое отношение к туче имеют истории о любовных похождениях Зевса? Но мы на его месте ответили бы контрвопросом: какое отношение к непрерывности имеет мощность континуума? В обоих случаях мы имеем дело с эффектами неадекватной формализации, которые неизбежно возникают, когда мы пытаемся идеализировать.

Мы сами себя загнали в ситуацию, навязывающую подобные вопросы. Иначе говоря, мы оказались в плену своих идеализаций. Удивляться тут нечему: такова природа любой идеальности.

Но давайте вернемся к разговору о бесконечности. В том же романе "Доктор Фаустус" присутствует (и занимает видное место) альтернативная версия бесконечного, связанная с обиходными представлениями о необозримости и нечеткости. Тут она принимает вид необозримого, но ограниченного времени, которое дьявол предоставляет своему клиенту с таким вот комментарием:

"Неопределенность момента, когда пора задуматься о конце, покрывает туманом и сам предрешенный конец" [3, с. 299]. А ведь и впрямь: мало кто надеется (и хочет) дожить до ста лет. Однако по большей части мы ведем себя так, как если бы наше земное существование было бесконечным, хотя твердо знаем, что оно ограничено. А между тем установка на "жизнь бесконечную" (на том свете) словно накладывает на нас некие оковы, вроде как несводимые к одному лишь ожидаемому посмертному воздаянию. В пояснение этого мы уже сказали, в чем дело, а именно в упомянутой онтологической неполноценности, ущербности, приписываемой конечному.

Однако в обсуждаемом сейчас контексте, альтернативная бесконечность — не противоположность конечного, а лишь его возможный аспект, стало быть, и само понятие конечного радикально изменяет смысл.

В сущности, дьявол не предлагает герою романа ничего иного, кроме указанного переосмысления бесконечности. И это — как в философском, так и в мировоззренческом аспекте — совсем немало. Ведь так называемый смысл жизни (личной жизни) непременно должен содержать некоторую неисчерпаемость. Это — своего рода сверхзадача, возвышающаяся над "пошлыми" достижениями обыденного существования.

Так вот: альтернативная бесконечность дает принципиальную возможность придать качество неисчерпаемости ограниченному отрезку земного бытия.

А поскольку мировоззренческая установка есть своего рода стратегия индивидуального отношения к жизни на поведенческом уровне, то дьявольский дар имеет значение не только для чистого, но и для практического разума, что, собственно, и демонстрируется текстом романа. Однако не будем далее развивать этот сюжет, а сосредоточимся на основной теме статьи.

Слыша слово "бесконечность", мы невольно воображаем нечто столь огромное, что и сказать нельзя. Но почему же обязательно огромное? Ведь гораздо более характерным проявлением бесконечности является абсолютная точность; с нашей точки зрения, именно в этом заключается изначальный дефект классической (канторовской) теории множеств и основанной на ней математики.

Разумеется, добросовестное математическое доказательство обязано быть безусловно четким объектом. Но это касается лишь его формы, но не содержания.

А последнее, рассматриваемое при соотнесении его с реальностью, вовсе не обязано быть четким. Более того, четкость в этом случае даже не всегда желательна.

В математике мы иногда сталкиваемся с результатами, которые верны для идеальных объектов, но полностью теряют силу при малейшем отклонении от идеальности. Примером может служить теорема о "парадоксальном" разбиении шара, в которой доказывается нечто невозможное на уровне физической реальности. Но эта теорема и не претендует на физический смысл. Однако, бывают и менее безобидные прецеденты.

Если в рамках физической теории мы пользуемся математическим аппаратом, рассчитанным на идеальную точность, то мы можем столкнуться, например, с такой ситуацией.

Так называемые фундаментальные уравнения физики обратимы, т.е. не зависят от направления времени. Теоретически, любой процесс мог бы пойти в обратном направлении. При таких обстоятельствах необратимость распространения тепла воспринималась почти так же, как иррациональные числа во времена Пифагора. Но если мы снимем на кинопленку, как сгорает спичка или рождается ребенок, и прокрутим этот фильм задом наперед, то увиденное нами — тоже физически возможно? Обычно физики выкручиваются так: это возможно, но с исчезающе малой вероятностью. Возникает вопрос, что же такое "исчезающе малая вероятность" и в каком отношении она находится к статистике? Это просто доведенная до абсурда идеализация. Ясно, что речь идет не об объяснении мира, а просто о спасении определенного миропонимания.

Отметим, что эта проблема тесно связана с проблемой времени, рассматриваемой И.Пригожиным [4]. Самого *времени*, а не временной шкалы или соответствующей координатной оси (каковыми его привыкли подменять физики–теоретики). Время по Пригожину — это, прежде всего, различие между прошлым и будущим, а его-то и не улавливает классическая наука. Однако подробно останавливаться на этом в данной статье мы не будем, поскольку это — предмет отдельной публикации.

Уже из рассмотренных примеров естественно может возникнуть потребность осмыслить неточность не как отклонение от чего–то точного, а как некую "неточность в себе" и научиться обращаться с ней без ущерба для математической строгости. В этой связи приведенное выше высказывание дьявола из романа обращает на себя внимание. Возникает вопрос: можно ли построить математическую теорию альтернативной бесконечности? До недавнего времени это считалось невозможным. Соответствующая теория была, однако, разработана чешским математиком П.Вопенкой [5].

Так в математический обиход вошли "запретные", принципиально не уточняемые понятия: куча, горизонт, неразличимость, сохранив при этом характерные черты присущей им нечеткости. В итоге нашему взору предстала формализованная система, органично и непринужденно соотносящаяся с реальностью. Об этой теории и пойдет речь.

Представление о бытовой бесконечности, выраженное в таких фразах, как "звездам в небе нет числа" и т.п. до последнего времени находилось вне математики. Причиной тому как раз и была присущая ему неустранимая нечеткость. Нагляднее всего это демонстрировал известный парадокс кучи или, скажем,понятие маленького числа. Такие понятия вступают в конфликт с известным принципом математической индукции, который неприменим к нечетким свойствам натуральных чисел. Поэтому формализация феномена нечеткости необходимо подразумевает какие–то разумные ограничения по использованию этого принципа [1]. Лучше всего это делать в контексте теории множеств.

Прежде всего, следует заметить, что понятие четкости само по себе является нечетким и не имеет однозначного смысла. Поэтому давайте просто зафиксируем в уме какой–то неопределенно мыслимый уровень четкости, не подлежащий конкретизации, и будем апеллировать к нему, подразделяя различные совокупности объектов на четкие и нечеткие. При этом будем иметь дело лишь с такими совокупностями, элементы которых можно корректно помыслить все сразу как одновременно данные. Разумеется, что совокупности не обязательно должны задаваться путем непосредственного предъявления их элементов, их можно задавать посредством тех или иных свойств, которыми эти элементы обладают. Но поскольку, очевидно, одну и ту же совокупность можно описывать с помощью разных свойств, то представление о четкости лучше соотносить именно со свойствами, т.е. встать на интенциональную точку зрения. Таким образом, будем считать некую совокупность четкой, если для нее имеется четкое описание.

Вместе с тем, как увидим далее, мысленно зафиксированный уровень четкости накладывает неявные ограничения на запас допустимых к рассмотрению свойств, что впрочем, происходит и в классической математике. Однако мы, в отличие от последней, предположим, что запас допустимых к рассмотрению свойств достаточно обширен, чтобы порождать как четкие, так и нечеткие совокупности. Те и другие в дальнейшем будем называть классами (нечеткие — собственными классами, а четкие — множествами). Нас будут специально интересовать такие классы, которые сами являются четкими, но содержат нечеткие подклассы (разумеется, допустимые к рассмотрению). В качестве наводящего примера можно привести множество книг в данном книжном шкафу, из которого можно выделить нечеткую подсовокупность "интересных" книг. На этом основании данное множество, очевидно, классически конечное, признается бесконечным в альтернативном смысле.

Именно это мы и имели в виду ранее, говоря об альтернативной бесконечности как аспекте конечного. Однако для того, чтобы отправляясь отсюда, построить содержательную теорию альтернативной бесконечности и, в частности, определиться с тем, что мы будем называть альтернативно-конечными множествами, нам удобнее будет перейти от совокупностей к так называемым "спискам" объектов, т.е. к упорядоченным совокупностям особого рода.

Предварительно проделаем один мысленный эксперимент. Представим себе длинный дощатый забор и помыслим такую возможную ситуацию: кто-то по своему усмотрению раскрасит одну часть досок в черный цвет, а другую — в ярко-красный, но так, что оба эти цвета будут представлены. Интуитивно мы заранее убеждены, что при всякой такой раскраске будет существовать самая первая и самая последняя красная доска. (На этом основании, сам забор мы признаем четкой совокупностью досок, независимо от его длины.)

Ориентируясь на эту интуицию, назовем упорядоченный класс объектов конечным в альтернативном смысле, если выполнено условие: всякий непустой допустимый подкласс этой совокупности есть множество, имеющее в данном упорядочении первый и последний элемент. Надо еще убедиться, что мы имеем право предполагать существование таких конечных совокупностей (а также совокупностей, не являющихся таковыми).

Для этого продолжим наш мысленный эксперимент. Допустим, наш забор состоит всего лишь из пяти досок, и некто раскрашивает их в трудно различимые оттенки синего и голубого цветов. Тогда совокупность голубых досок, очевидно, будет нечетко заданной. На каком основании можно утверждать о существовании первой и последней голубой доски?

Легко подсчитать, что существует всего 30 способов раскрашивания, так что интересующая нас совокупность голубых досок в любом случае совпадает с одним из этих способов, каковые можно перечислить в виде обозримого списка четко заданных способов раскрашивания.

Однако, если забор будет состоять не из пяти, а скажем, из 200 досок, то такой список мы можем лишь помыслить. Ссылка на то, что он осуществим в принципе, не отменяет очевидного факта, что в реальности такой список существовать не может, и мы имеем полное право признать его не существующим. В то же время мы не можем опираться на нашу зрительную способность различать разницу между синим и голубым, как это было в случае с красным и черным. Поэтому, если забор длинный, то предположение насчет существования первой и последней голубой доски есть всего лишь далеко заходящая идеализация, от которой позволительно отказаться.

Таким образом, забор из 200 досок дает нам наглядное представление о четкой, но бесконечной (в альтернативном смысле) совокупности. А если досок всего 5, то его можно считать альтернативно-конечным. Стало быть, конечность или бесконечность некоторой совокупности ставится в зависимость от принятого уровня четкости и соответственно от запаса допустимых свойств.

Итак, если мы отталкиваемся от разрешающей способности нашего зрения и от физической возможности перебора всех возможных подсовокупностей, то число 5 будет конечным, а число 200 — уже бесконечным. Но ведь в таком контексте и на том же основании число 30 (ранее упомянутое как список способов раскрашивания) едва ли разумно признавать конечным, поскольку 2^{30} — это несколько больше миллиарда. Однако это свидетельствует лишь о том, что признание числа конечным зависит только от контекста, в каком мы его используем. Например, в случае, когда речь идет о раскрашивании забора, 30 досок и 30 способов раскрашивания — это два качественно разных числа.

Аналогичное затруднение возникает и во многих других ситуациях, имеющих гораздо более близкое отношение к математике. Например, объединение двух или трех множеств естественно считать множеством, потому что дизъюнкция двух или трех четких свойств тоже, вроде бы, является четким свойством. Разумеется, коль скоро число 200 мы считаем бесконечным, то объединение двухсот множеств — уже не множество. Но, как говаривал Козьма Прутков, где начало того конца, которым оканчивается начало?

Естественно полагать, что если мы объединяем n множеств, где n — конечное число, то в итоге мы вновь получаем множество, т.е. четкую совокупность. Вместе с тем, ясно, что при возрастании n четкость должна убывать. И поскольку, как уже отмечалось, сама четкость есть нечеткая категория, то выходит, что принятый нами с самого начала уровень четкости тоже надо мыслить как нечто нечеткое. Более тщательный анализ показывает, что, если мы согласимся признать множеством объединение двух множеств, то в результате мы вынуждены будем согласиться, что, коль скоро n — конечное число, то таковым же будет 2^n.

Иными словами, наводящие примеры с интересными книгами или с окраской короткого забора теперь уже не вписываются в теорию, выстроенную нами, отправляясь от подсказанных ими интуиций. Прежде всего, это значит, что наш запас допустимых свойств существенно сузился по сравнению с исходными бытовыми представлениями, но, как видим, все же остался значительно шире, чем это де-факто имеет место в классической математике.

Заметим, что согласно теоретико-множественной манере изложения каждое натуральное число отождествляется с множеством всех предыдущих натуральных чисел, так что конечные натуральные числа определяются на общих основаниях с конечными множествами. Мимоходом стоит напомнить, что любые математические объекты легко представимы посредством множеств (или классов). Предыдущие рассмотрения вплотную подвели нас к центральному понятию альтернативной теории множеств — понятию горизонта. Неформально говоря, горизонт — это то, к чему устремляются конечные натуральные числа, постепенно теряя свою четкость (в пределах заранее установленного уровня).

Тем не менее, если какой-нибудь класс математических объектов полностью располагается перед горизонтом, он признается четким, т.е. (в данном случае) *конечным множеством*. Принцип математической индукции, соотнесенный только с конечными числами, выполняется для всех допустимых свойств.

В силу сказанного выше это означает, что бесконечные натуральные числа находятся далеко за пределами возможности нашего конструирования. Однако, в отличие от классической математики, они все же признаются существующими, и некоторые ограниченные варианты математической индукции для них сохраняются. Этого вполне достаточно, чтобы законы элементарной арифметики распространить и на бесконечные числа.

Другое, более тонкое отличие от классической математики, заключается в следующем. Весь натуральный ряд (включая и бесконечные числа) отнюдь не совпадает с классическим натуральным рядом.

Представление о нем возникает, исходя из следующих соображений. Давайте вообразим себе некоего фантастического наблюдателя, острота зрения которого неизмеримо превосходит нашу. Тогда математический мир, лежащий перед его горизонтом, т.е. мир конечных множеств (в его понимании), будет подобен нашему миру конечных множеств, только гораздо шире. В нем будут содержаться и такие множества, которые для нас являются бесконечными. Этот мир вместе с нашим горизонтом мы и примем в качестве универсума альтернативной теории множеств. Вернее, в качестве универсума множеств, потому что запас допустимых классов у этого воображаемого супер-наблюдателя необходимо должен быть у́же нашего запаса допустимых классов.

Это легко понять: никакое допустимое для нас свойство, в котором участвует понятие нашего горизонта, не может быть допустимым для супернаблюдателя, иначе мы сразу придем к противоречию. По этой причине, кстати, некоторые свойства, в которых задействованы кванторы по переменным классам, имеют неодинаковый смысл "для нас" и "для него", хотя основные факты, вытекающие из логической структуры этих определений, конечно, сохраняются, а фактически только они и могут фигурировать в наших математических рассуждениях.

Тем не менее, особый интерес представляют те свойства, смысл которых не зависит от положения горизонта. Таковыми, например, являются свойства, заданные "элементарными" формулами, в которых вообще не упоминаются классы (только множества). Требуется лишь, чтобы длины этих формул были конечными числами. Подразумевается при этом, что все переменные, — и свободные, и связанные, — пробегают весь универсум множеств. Эти свойства не обязаны быть четкими, но являются почти такими, поскольку у любого множества они выделяют подкласс, который тоже является множеством (в силу сохранения для этих свойств принципа индукции за горизонтом). Теперь мы подходим к центральной аксиоме альтернативной теории множеств — аксиоме экстраполяции за горизонт. Смысл ее таков: если некое элементарное (в вышеуказанном смысле) суждение выполняется для любых множеств, лежащих перед горизонтом, то оно будет выполняться на некотором протяжении и за горизонтом. Аргументация простая: горизонт не занимает в мире четкого положения и поэтому ничто четкое не может сразу перестать существовать за горизонтом. (Если точнее, то за аксиому принимается чуть более сильное утверждение: каждую уходящую к горизонту последовательность множеств можно продолжить до списка, длина которого есть бесконечное натуральное число.)

Эта аксиома является основным рабочим инструментом данной теории. В частности, с ее помощью можно легко промоделировать феномен непрерывности, например, в связи с движением, непрерывность которого представляется примерно так же, как это имеет место при демонстрации фильмов. Стоит заметить, что при таком подходе устраняются знаменитые парадоксы Зенона Элейского.

Вообще, в этой теории легко воспроизводятся все математические средства, задействованные в точном естествознании. Сверх того, открывается возможность преодоления некоторых трудностей, возникающих в современной теоретической физике. Например, — уже затронутый выше вопрос о том, как совместить обратимость фундаментальных уравнений физики и существование необратимых процессов. Поскольку никакая физическая величина не может иметь абсолютно точного значения, то никакую, даже механическую систему (вернее, процесс ее работы) нельзя абсолютно точно обратить вспять. Скажем, если горизонтально летящая частица многократно отражается от стенок, то в какой-то, нечетко определимый момент времени ее движение перестает быть горизонтальным, по той причине, что абсолютной горизонтальности не бывает. Ввиду неопределенности момента, когда это произойдет, и неконтролируемости самого характера отклонения, разговоры об обратимости в данной связи теряют смысл и мы имеем право говорить о спонтанности, о бифуркации и т.п.

Так что, по-видимому, альтернативная математика имеет серьезные методологические преимущества и не только для естествознания. На наш взгляд, идея альтернативной теории бесконечного, избавленная от излишней математизированности, может сыграть важную роль в гуманитарных науках, ввиду изначальной нечеткости их терминов [2]. Связь с вышеописанной проблематикой очевидна. Интересно проследить последствия этого подхода в точном естествознании и философии, в частности для кантовской этики и теологии. Примером могут служить рассуждения Канта о морали как причине самой себя. Можно сказать, что описанная перемена взглядов на бесконечность существенно меняет философскую картину мира.

Литература

1. БЕЛЯКИН Н.В. Логика неформализуемости //Мышление, когнитивные науки, искусственный интеллект. — М.: изд. Центрального совета философских (методологических) семинаров при Президиуме АН СССР. — 1988.

2. БЕЛЯКИН Н.В., СОФИЕНКО М.Б. Альтернатива бесконечному регрессу //Современная логика. Материалы 6-й общероссийской конференции 22–24 июня 2000 г. в С.-Петербурге. — С.-Петербург: изд-во С.-Петербургского университета, 2000.

3. МАНН Т. Доктор Фаустус. Собр. соч. в 10 томах, том 5. — М.: Худ. лит-ра, 1960.

4. ПРИГОЖИН И., СТЕНГЕРС И. Порядок из хаоса. — М.: Прогресс, 1986.

5. VOPENKA P. Uvod do matematiky v alternativnej teorii mnozin. — Bratislava, 1989.

Поступила в редакцию
17 марта 2003 года