МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ
(Вычислительные системы)
2004 год Выпуск 173

УДК 519.6

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИСТРИБУТИВНЫХ КОНЕЧНЫХ РЕШЕТОК ПОДМНОЖЕСТВАМИ И ОЦЕНКА ЧИСЛА ПОТЕНЦИАЛОВ ВЫЧИСЛИМОСТИ n-ЭЛЕМЕНТНЫХ СВЕРХЖЕСТКИХ УНАРОВ [1]

А.Г. Пинус

В настоящей работе нас интересует оценка числа неизоморфных представлений конечных дистрибутивных решеток подмножествами конечных множеств. Хорошо известна теорема Стоуна [1] о представлении любой дистрибутивной решетки в виде решетки подмножеств некоторого множества. При этом, если исходная дистрибутивная решетка конечна, то и множество, некоторая совокупность подмножеств которого изоморфна этой решетке, может быть выбрано конечным. Говоря далее о представлении дистрибутивной решетки L на множестве $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (здесь n – некоторое натуральное число), мы будем иметь ввиду изоморфизм α решетки L в решетку всех подмножеств $\langle P(n); \cap, \cup\rangle$ множества n такой, что $\varphi(0) = \phi, \varphi(1) = n$, когда представляемая решетка не одноэлементна, и $\varphi(0) = \varphi(1) = n$ в противном случае. При этом два подобных представления φ_1 и φ_2 будем считать различными, если не существует такой перестановки π множества n, что $\pi' \cdot \varphi_1 = \varphi_2$. Здесь π' биекция $P(n)$ на $P(n)$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 02-01-00258.

индуцированная перестановкой π. Хорошо известно (см., к примеру [2]), что подрешетки решетки $\langle P(n); \cap, \cup \rangle$, включающие в себя множества n и ϕ — суть решетки подалгебр унаров (универсальных алгебр, сигнатура которых содержит лишь одноместные функции), определенных на базовом множестве n. Таким образом, *число $\alpha(n)$ различных представлений дистрибутивных решеток подмножествами множества n, это число различных решеток подалгебр n-элементарных унаров, не сопряженных биекциями основных множеств этих унаров.*

В работе [3] введено понятие потенциала вычислимости универсальной алгебры. Инвариантом потенциала вычислимости алгебры $\mathcal{A}$ выступает полугруппа $Iso\ \mathcal{A}$ внутренних изоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ (изоморфизмов между подалгебрами).

Алгебра $\mathcal{A}$ называется сверхжесткой, если не существует нетривиальных внутренних изоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, т.е. изоморфизмов отличных от тождественных автоморфизмов подалгебр алгебры и от изоморфизмов между её одноэлементными подалгебрами. Таким образом, в случае сверхжесткости $\mathcal{A}$, инвариантом потенциала вычислимости этой алгебры выступает решетка подалгебр $Sub\ \mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{A}$. А поскольку любая подрешетка решетки всех подмножеств множества $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, как замечено выше, выступает в роли решетки подалгебр некоторого унара $\mathcal{A} = \langle n; \sigma \rangle$, то *число $\alpha(n)$ — это число потенциалов вычислимости n-элементных сверхжестких унаров.* Отметим также, что довольно грубая верхняя оценка числа потенциалов вычислимости произвольных n-элементных универсальных алгебр приведена в работе [4].

Укажем ещё на одно значение числа $\alpha(n)$.

Пусть S — подрешетка решетки $\langle P(n); \cap, \cup \rangle$. Будем также считать, что $S = Sub\ \mathcal{A}$ для некоторого унара $\mathcal{A} = \langle n; \sigma \rangle$. Как хорошо известно (см., к примеру, доказательство теоремы о представлениях дистрибутивных решеток в [5]) $S \cong I(\langle M(S); \subseteq \rangle)$, где $I(\langle M(S); \subseteq \rangle)$ — решетка идеалов частично упорядоченного множества $\langle M(S); \subseteq \rangle$ $\vee$-неразложимых элементов решетки S. То есть, $B \in S$ входит в $M(S)$ тогда и только тогда, когда для любых $C_1, C_2 \in S$ равенство $B = C_1 \cup C_2$ влечет одно из равенств: либо $B = C_1$, либо $B = C_2$. Частично упорядоченное множество $\langle A; \leq \rangle$ назовем взвешенным, если на нем задано отображение $\varphi : A \to N \backslash \{0\}$ во множество положительных натуральных чисел. Функцию φ_S на множестве $M(S)$ $\vee$-неразложимых элементов решетки S определим следующим образом

$$\varphi_S(B) = |B \backslash \bigcup_{C \in M(S) \& C \subset B} C|.$$

Таким образом, взвешенное частично упорядоченное множество $\langle M(S); \subseteq, \varphi_S \rangle$ однозначно определяется решеткой S. Обратно, пусть $\langle A; \leq, \varphi \rangle$ некоторое конечное взвешенное частично упорядоченное множество такое, что $\sum\limits_{a \in A} \varphi(a) = n$. Тогда существует решетка S — подрешетка решетки $\langle P(n); \cap, \cup \rangle$ такая, что взвешенные частично упорядоченные множества $\langle A; \leq, \varphi \rangle$ и $\langle M(S); \leq, \varphi_S \rangle$ изоморфны. Действительно, пусть $\{B_a | a \in A\}$ — разбиение множества n такое, что $|B_a| = \varphi(a)$ для любого $a \in A$.

Определим совокупность $\{C_a | a \in A\}$ подмножеств множества n, полагая $C_a = \bigcup\limits_{b \in A, b \leq a} B_a$ и пусть S — подрешетка решетки $\langle P(n); \cap, \cup \rangle$, порожденная совокупностью $\{C_a | a \in A\}$. Непосредственно замечается , что $M(S) = \{C_a | a \in A\}$ и $\langle M(S); \subseteq, \varphi_S \rangle \cong$ $\cong \langle A; \leq, \varphi \rangle$. При этом подрешетка S решетки $\langle P(n); \cap, \cup \rangle$ определяется последним условием однозначно, с точностью до перестановки множества n. На языке унара $\mathcal{A}$ подмножества, входящие в $M(S)$, суть однопорожденные подалгебры алгебры $\mathcal{A}$, а разбиение $\{B_C | C \in M(S)\}$ — это разбиение, соответствующее эквивалентности $\sim_{\mathcal{A}}$ на множестве n — эквивалентности, порожденной квазипорядком $\leq_{\mathcal{A}}$ на множестве n, определенным следующим образом: $i \leq_{\mathcal{A}} j$ тогда и только тогда, когда $\langle i \rangle_{\mathcal{A}} \subseteq \langle j \rangle_{\mathcal{A}}$, где $\langle i \rangle_{\mathcal{A}}$ – подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, порожденная элементом i.

Очевидно и обратное: любой квазипорядок на n-элементном множестве однозначно (с точностью до своего автоморфизма) соответствует взвешенному частично упорядоченному множеству $\langle k; \leq, \varphi \rangle$, где $k \leq n$ и $\sum\limits_{i \in k} \varphi(i) = n$. Таким образом, *число $\alpha(n)$ совпадает с числом типов изоморфизма n-элементных квазипорядков и совпадает с числом типов изоморфизма k-элементных ($k \leq n$) взвешенных частичных порядков суммарного веса равного n.*

И, наконец, *число $\alpha(n)$ совпадает с числом n-элементных сверхжестких мультиорграфов с раскрашенными дугами попарно неэквивалентных относительно программных перемещений на них (подробнее см.* [6]).

Через $\alpha^m(n)$, где $1 \leq m \leq n$, обозначим число различных представлений дистрибутивных решеток подмножествами n-элементного множества, минимальное непустое подмножество которых имеет мощность m.

Тогда

$$\alpha(n) = \sum_{1 \leq m \leq n} \alpha^m(n), \ \alpha^n(n) = 1, \alpha(1) = 1. \tag{1}$$

Итак, пусть S — подрешетка решетки $\langle P(n); \cap, \cup \rangle$ и $B \in S$, $B = m = min\{|C| \ |C \in S\}$. Через S_1 обозначим совокупность $\{C \in S| \ C \supseteq B\}$, а через D максимальное дизъюнктивное с B подмножество из S. При этом $\bigcap\limits_{C \in S_1} C = B$. Заметим, что пара $\langle S_1, D \rangle$ однозначно определяет подрешетку S. Действительно, для любого $A \subseteq n \quad A \in S \Leftrightarrow$ либо $A \in S_1$, либо существует $C \in S_1$ такое, что $A = C \bigcap D$.

Таким образом, число $\alpha^m(n)$ не превышает числа представлений решеток типа S_1 (подрешеток решетки $\langle P(n); \cap, \cup \rangle$ с единственным непустым минимальным подмножеством мощности m), помноженного на число возможных выборов подмножества D (с учетом того, что $D = \emptyset$, либо $D \bigcap B = \emptyset$ и $|D| \geq m$).

Очевидно также, что решетка S_1 однозначно определяется множеством B и подрешеткой $S_2 = \{C \bigcap (n \backslash B)| \ C \in S_1\}$ решетки $\langle P(n \backslash B); \cap, \cup \rangle$ и, значит, число представлений решеток типа S_1 подрешетками решетки $\langle P(n); \cap, \cup \rangle$ равно $\alpha(n - m)$. При этом число возможных выборов подмножества D в множестве $n \backslash B$ равно $1 + \sum\limits_{m \leq k \leq n-m} C^k_{n-m}$. Здесь C^l_r — традиционно число сочетаний из r по l и $C^l_r = 0$ при $l > r$. Таким образом, имеет место неравенство

$$\alpha^m(n) \leq \alpha(n - m) \Big[1 + \sum_{m \leq k \leq (n-m)} C^k_{n-m} \Big]. \tag{2}$$

Равенство (1) и оценка (2) позволяют получить оценку числа $\alpha(n)$ числом $\beta(n)$

$$\alpha(n) \le \beta(n), \tag{3}$$

где $\beta(n)$ определяется следующими рекурентными формулами:

$$\begin{gathered}\beta(1) = 1,\ \beta^n(n) = 1, \beta(n) = \sum_{1 \le m \le n} \beta^m(n), \\ \beta^m(n) = \beta(n-m)\Big[1 + \sum_{m \le k \le n-m} C^k_{n-m}\Big].\end{gathered} \tag{4}$$

С помощью формул (4) и неравенства (3) оценим значения числа $\alpha(n)$ при малых n. Непосредственные вычисления по формулам (4) дают следующие результаты: $\beta(1) = 1$, $\beta(2) = 3$, $\beta(3) = 14$, $\beta(4) = 120$, $\beta(5) = 1995$.

Тем самым, $\alpha(1) \le 1$, $\alpha(2) \le 3$, $\alpha(3) \le 14$, $\alpha(4) \le 120$, $\alpha(5) \le 1995$.

В то же время, непосредственный подсчет числа различных представлений дистрибутивных решеток подмножествами множества n, как числа попарно неизоморфных взвешенных частично упорядоченных k-элементных множеств, $1 \le k \le n$, с суммарным весом равным n дает следующие числа: $\alpha(1) = 1$, $\alpha(2) = 3, \alpha(3) = 9, \alpha(4) = 35, \alpha(5) = 141$.

Рекурентные формулы (4) позволяют дать некоторую грубую верхнюю оценку порядка роста числа $\alpha(n)$ на основе неравенств

$$\Big[1 + \sum_{m \le k \le n-m} C^k_{n-m}\Big] \le 2^{n-m}.$$

Действительно, тогда

$$\beta(n) \le \beta(n-1) \cdot 2^{n-1} + \beta(n-2) \cdot 2^{n-2} + \ldots + \beta(2) \cdot 2^2 + \beta(1) \cdot 2.$$

Отсюда

$$\beta(n) \le \beta(1) \cdot (2^{n-1} + 1)(2^{n-2} + 1) \ldots (2+1) \le 2^{n^2/2}.$$

То есть, $\alpha(n) \le 2^{n^2/2}$.

С другой стороны, грубую нижнюю оценку числа $\alpha(n)$ можно получить, оценивая число m–элементных частичных порядков при $m \le n$.

Действительно, начиная с одноэлементного множества и переходя от $(m-1)$–элементных частично упорядоченных множеств к m–элементным добавлением к уже построенным (в рассматриваемом процессе множествам) либо наименьшего нового элемента, либо нового элемента, несравнимого с элементами построенных ранее множеств, получаем, что

$$\alpha(n) \ge 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^n - 1.$$

При этом очевидно, что при $n \ge 3$, $\alpha(n) \ge 2^n$.

Таким образом, *оценку роста числа* $\alpha(n)$ *дают следующие неравенства*: при $n \ge 3$, $2^n < \alpha(n) < 2^{n^2/2}$.

В заключение приведем оценку минимальной мощности сигнатуры сверхжесткого унара $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$ для представления фиксированной 0–1–подрешетки S решетки $\langle P(n; \cap, \cup)\rangle$ решеткой подалгебр унара $\mathcal{A}$. Пусть $\langle M(S); \subseteq, \varphi_S\rangle$ — взвешенное частично упорядоченное множество, соответствующее решетке S указанным выше образом.

Нижней валентностью $r(a)$ элемента a из частично упорядоченного множества $\langle A; \le\rangle$ назовем число нижних покрытий этого элемента в $\langle A; \le\rangle$. Для любого $C \in V(S)$ через $l(C)$ обозначим $[\log_2 m(C)]^*$, где $m(C)$ — число $D \in M(C)$ таких, что взвешенные множества $\langle\{P \in M(S) |\ P \subseteq C\}; \subseteq, \varphi_S\rangle$ и $\langle\{P \in M(S) |\ P \subseteq D\}; \subseteq, \varphi_S\rangle$ изоморфны, а $[\alpha]^* = \alpha$ для целых, отличных от нуля чисел α и $[\alpha]^* = [\alpha + 1]$ для иных действительных чисел α.

Тогда, *для любой* 0–1–*подрешетки* S *решетки* $\langle P(n); \cap, \cup\rangle$ *существует сверхжесткий унар* $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$, *мощность сигнатуры* σ *которого не превышает числа*

$$\max_{C \in M(S), |C|>1} \left(\max\left(1, \left[\frac{r(C)}{\varphi_S(C)}\right]\right) + l(C)\right),$$

и такой, что $Sub\ \mathcal{A} = S$.

Действительно, пусть $C \in M(S)$ такова, что $|C| \ne 1$ и функция $\max\left(1, \left[\frac{r(C)}{\varphi_S(C)}\right]\right) + l(C)$ на нем достигает максимума. Пусть для $1 \leq i \leq r(C)$ множества D_i являются нижними покрытиями C в $\langle M(S); \subseteq \rangle$, $C \setminus \bigcup\limits_{1 \leq i \leq r(C)} D_i = \{c_1, \dots, c_{\varphi(C)}\}$. Пусть так же $d_i \in D_i \setminus \bigcup\limits_{1 \leq j \leq r(C), i \neq j} D_i$.

Пусть $K_j \subseteq l(C)$ — попарно различные подмножества для $1 \leq j \leq m(C)$ и $B_1, \dots, B_{m(C)}$ — суть те $D \in M(S)$, что взвешенные частично упорядоченные множества $\langle \{P \in M(S) | P \subseteq D\}; \subseteq, \varphi_S \rangle$ и $\langle \{P \in M(S) | P \subseteq C\}; \subseteq, \varphi_S \rangle$ изоморфны и при этом $C = B_k$.

Функции $g_i(x)$, $h_l(x)$ сигнатуры σ при $1 \leq i \leq l(C)$, $1 \leq l \leq \max\left(1, \left[\frac{r(C)}{\varphi_S(C)}\right]\right)$ определим на множестве $\{c_1, \dots, c_{\varphi(C)}\}$ следующим образом: $g_i(c_j) = c_{j+1(mod \varphi_S(C))}$ для $i \in K_i$ и $g_i(c_j) = c_j$ - в противном случае; $h_l(c_j) = d_{(l-1)\varphi_S(C)+j(mod r(C))}$.

Поступая аналогичным образом для каждого $C \in M(S)$, если $|C| \neq 1$ и определяя $g_i(x) = h_l(x) = x$ для $x \in C$ таких, что $|C| = 1$, получаем алгебру $\mathcal{A} = \langle n; \sigma \rangle$, число сигнатурных функций которой не превышает указанной границы $\max\limits_{C \in M(S), |C| \neq 1} \left(\max\left(1, \left[\frac{r(C)}{\varphi_S(C)}\right]\right) + l(C)\right)$.

Без труда проверяется, что $\mathcal{A}$ — сверхжесткий (за счет наличия в сигнатуре функций h_l) унар и что $Sub\mathcal{A} = S$ (за счет наличия в сигнатуре функций g_i). С другой стороны, столь же нетрудно заметить достижимость этой нижней оценки мощности сигнатуры сверхжестких унаров с заданной решеткой подалгебр.

В качестве открытых вопросов отметим, наконец, проблему точного нахождения порядка роста числа $\alpha(n)$ и оценку числа потенциалов вычислимости произвольных n–элементных унаров.

Литература

1. STONE M.H. The theory of representations for boolean algebras// Trans.Amer.Math.Soc. - 1936. - Vol.40. - P.37-117

2. ПИНУС А.Г. Внутренние изоморфизмы и условно рациональная эквивалентность унарам и полям// Алгебра и теория моделей. - Новосибирск: Изд–во НГТУ, 1997. - С.131–142.

3. ПИНУС А.Г., ЖУРКОВ С.В. О шкалах потенциалах вычислимости конечных алгебр// Математические модели в информатике. – Новосибирск, 2002. – Вып.169: Вычислительные системы. – С.26–38.

4. ПИНУС А.Г. Об условно рационально эквивалентных алгебрах// Структурные и сложностные проблемы вычислимости. – Новосибирск,1999. –Вып.165: Вычислительные системы. – С.3–30.

5. ГРЕТЦЕР Г. Общая теория решеток. – М.: Наука,1982.

6. ПИНУС А.Г. Программные перемещения на графах и программная эквивалентность последних// Доклады АН ВШ России. – 2004. – №1(2). – С.28–35.

Поступила в редакцию
23 декабря 2004 года