МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ
(Вычислительные системы)
2004 год Выпуск 173

УДК 53.02+519.7+519.812.2

ОБНАРУЖЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОЙ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ В УСЛОВИЯХ ШУМОВ[1]

П.С. Деменков

Введение

В настоящее время человечеством накоплен огромный объем знаний по всевозможным областям деятельности. Информация, зачастую, хранится в базах данных и естественно возникает проблема их обработки, извлечения знаний из уже имеющихся данных. Knowledge Discovery in Data Bases — одно из интенсивно развивающихся математических направлений, цель которого обеспечение автоматических методов обнаружения знаний в имеющихся данных. В качестве подзадачи в Knowledge Discovery рассматривают возможности обнаружения эмпирических теорий.

Проблема нахождения знаний усугубляется еще и тем, что информация, как правило, получена в условиях шумов: ошибок записи, ошибок в ответах при опросах, ошибок в принятии решений и других случайных модификациях данных. Это приводит к искажению заносимой в базы данных информации. Следовательно, необходимо создание методов способных извлекать знания с учетом наличия шумов.

Цель предлагаемого исследования: обнаружение эмпирической аксиоматической теории в условиях шумов. В работе был

[1]Работа поддержана грантом НШ 2112.2003.1.

рассмотрен случай эмпирической аксиоматической теории, представимой в виде универсальных формул.[2]

В работе показано, что эмпирические аксиоматические теории, построенные по данным без шумов и по данным с шумами особого вида, совпадают. Очевидно, что на практике, в силу ошибок эксперимента, случай нахождения данных без шумов не реализуем. Но поскольку в случае с шумами особого вида доказывается, что эмпирическая аксиоматическая теория, построенная по данным совпадает с эмпирической аксиоматической теорией для идеализированного случая, то на практике нахождение такой теории осуществимо. Ее достаточно построить по имеющимся зашумленным данным.

1. Определение эмпирической аксиоматической теории

Эмпирические аксиоматические теории являются конкретизацией соответствующего понятия, возникающего в логике эмпирических исследований [2]. Но это понятие возникло не только из логики эмпирических исследований, но и из критического анализа основных понятий теории измерений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.Эмпирической аксиоматической теорией будем называть набор $M =< Obs^V, V, W, S >$, где $ObsV$ — измерительная процедура, задающая интерпретацию символов словаря V. Ее применение к произвольному множеству объектов $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ дает формальную конечную конструкцию pr^V, состоящую из символов объектов $a_1, \dots, a_m$, символов словаря V и, возможно, других вспомогательных символов. Эту конструкцию будем называть протоколом наблюдения, проведенного в соответствии с инструкцией Obs^V над множеством объектов A в словаре V. Будем предполагать, что измерительная процедура Obs^V применима к любому множеству объектов A. Это всегда можно сделать введением третьего значения истинности "не определено" для отношений из V. Кроме того, будем предполагать, что измерительная процедура определена настолько

[2]Совокупность универсальных формул можно представить в виде совокупности правил вида $C = (A_1 \& A_2 \& \cdots \& A_k \Rightarrow A_0)$.

подробно, что после предъявления множества объектов A, дальнейший ход измерений, вплоть до получения протокола, определяется однозначно. Таким образом, Obs^V можно определить как отображение, ставящее в соответствие каждому множеству объектов A протокол $pr^V = Obs^V(A)$, где pr^V — протокол наблюдения. Мы специально не будем конкретизировать вид этой формальной конструкции, так как в разных наблюдениях она может быть различной. Единственно, что всегда будет требоваться – это точное определение истинности высказываний в словаре V на pr^V;

$V = \{P_1, \ldots, P_{n_1}\}$ – словарь (сигнатура) наблюдаемых терминов. Будем предполагать, что равенство "=" всегда содержится в V;

$W = \{Q_1, \ldots, Q_{n_2}\}$ – словарь (сигнатура) теоретических терминов. Отношения из W являются теоретическими конструкторами, и идеализацией непосредственно наблюдаемых отношений $P_1, \ldots, P_{n_1}$ словаря $V = \{P_1, \ldots, P_{n_1}\}$. Взаимосвязь отношений теоретического и эмпирического уровня должна осуществляется с помощью правил соответствия;

$S = S^V \cup S^W \cup S^{V \cup W}$ – система аксиом в словаре $V \cup W$. Она включает аксиомы S^V в словаре V наблюдаемых терминов, аксиомы $S^{V \cup W}$, включающие одновременно термины эмпирического и теоретического уровней, определяют правила соответствия [3, 4] между этими уровнями. Эти правила должны выводится из той естественнонаучной теории, в рамках которой описывается измерительная процедура Obs^V. Если правил соответствия нет, то нет и теоретического уровня. Тогда множества W, $S^W \cup S^{V \cup W}$ пусты, и эмпирическая аксиоматическая теория принимает вид: $M = < Obs^V, V, S^V >$.

Будем говорить, что эмпирическая аксиоматическая теория имеет эмпирическую интерпретацию, если выполнены следующие условия: не только правила соответствия выводятся и интерпретируются в рамках рассматриваемой естественнонаучной теории, но и измерительная процедура Obs^V, протоколы наблюдения pr^V, словари V, W и система аксиом S описываются в рамках этой теории. В дальнейшем мы будем рассматривать только эмпирически интерпретируемые эмпирические аксиоматические теории. Понятие эмпирической системы $M =< A, W >$, используемое в теории измерений можно сформулировать в рамках эмпирических аксиоматических теорий следующим образом. Эмпирическая система является неприводимой [5] моделью системы аксиом S^W (примем $S^W = S$). Смысл неприводимости состоит в том, что любые два объекта $a, b \in A$ различимы с помощью отношений из W. Понятием эмпирической системы мы будем пользоваться в этом смысле. Таким образом, эмпирическая система перепишется в терминах эмпирических аксиоматических теорий следующим образом: $M =< Obs^V, V, W, S >$, где $V = \{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{n_1}\}$, $W = \{P_1, \dots, P_{n_1}\}$, (словари V, W совпадают) $S = S^V \cup S^W \cup S^{V \cup W} = S^W = \Sigma$. Вид измерительной процедуры Obs^V и протокола pr^V дадим ниже.

2. Поиск наиболее сильной эмпирической аксиоматической теории

Будем предполагать, что система аксиом Σ представляет собой совокупность универсальных формул (содержащих только кванторы всеобщности) без функциональных символов. В [11] показано, что такая система аксиом Σ может быть логически эквивалентными преобразованиями приведена к совокупности формул вида:

$$C = (A_1 \;\&\; A_2 \;\&\; \cdots \;\&\; A_k \Rightarrow A_0), \tag{1}$$

где $A_j = P_j(x_1^j, \dots, x_{n_j}^j)^{\varepsilon_j}$, $j = 0, \dots, k$, $x_1^0, \dots, x_{n_0}^0, x_1^1, \dots$ $\dots, x_{n_1}^1, \dots, x_1^k, \dots, x_{n_k}^k$ — свободные переменные; $n_0, \dots, n_k$ — местности предикатных символов $P_0, \dots, P_k$; символы $\varepsilon_0, \dots$ $\dots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ означают наличие (0) отсутствие (1) отрицания.

Далее мы будем предполагать, что система аксиом представляет собой совокупность формул вида (1), которые будем называть правилами.

В случае $k = 2$ мы имеем дело с законом транзитивности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Бинарное отношение R транзитивно на множестве S если $\forall a, b, c \in S\,((aRb) \;\&\; (bRc)) \Rightarrow aRc$.

Задача тестирования систем аксиом Σ на заданной эмпирической системе M состоит в следующем.

Проанализируем задачу поиска наиболее сильной эмпирической теории. Что можно сказать об истинности системы аксиом Σ на эмпирической системе M, опираясь только на логический анализ? Можно сказать, во-первых, что правило $C = (A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_k \Rightarrow A_0)$ может быть истинным на эмпирической системе только потому, что посылка правила всегда ложна. На самом деле, как мы покажем, это означает, что на эмпирической системе истинно некоторое логически более сильное "подправило", связывающее между собой атомы посылки. Во-вторых, правило C может быть истинно на эмпирической системе только потому, что некоторое его логически более сильное подправило, содержащее только часть посылки и то же заключение истинно на эмпирической системе потому, что фактически на эмпирической системе истинна некоторая система подправил данной системы аксиом, из истинности которой в свою очередь следует истинность системы аксиом. Какие из подправил будут фактически истинны на эмпирической системе мы заранее не знаем, но все такие подправила вместе с самой системой аксиом Σ мы будем считать гипотезами для проверки на эмпирической системе.

Из логики и методологии науке хорошо известно, что те из гипотез следует считать законами, которые при одинаковой их подтвержденности на экспериментальных данных наиболее фальсифицируемы, просты и/или содержат наименьшее число параметров. В нашем случае все эти свойства, которые обычно трудно точно определить, следуют из определения логической силы высказывания. "Подправило" является одновременно и логически более сильным высказыванием, чем само правило и более фальсифицируемым, так как содержит более слабую посылку и, следовательно, применимо к большему объему данных и тем самым в большей степени подвержено фальсификации; и более простым, так как содержит меньшее число атомарных высказываний, чем правило; и включает меньшее число "параметров", так как лишние атомарные высказывания тоже можно считать параметрами "подстройки" высказывания под данные.

Почему же закон должен быть наиболее фальсифицируемым, простым и содержать наименьшее число параметров? Разные авторы придерживаются разных мнений на этот счет, либо не объясняют этого вообще. Очевидно одно, что это нужно для того, что бы максимально близко приблизиться к реальным данным и наиболее точно отразить реальные зависимости в данных, а не наши гипотезы о них. В нашем случае для гипотез вида (1) мы можем более точно ответить на этот вопрос. Так как все описанные свойства закона вытекают из логической силы высказывания, то поиск логически более сильных "подправил", истинных на эмпирической системе, позволяет нам не только проверить гипотезу об истинности системы аксиом, но и решить принципиально более важную задачу: выяснить, а какова на самом деле та наиболее сильная (логически) теория, вытекающая из этих правил, которая описывает наши данные и возможно лежит в основании неизвестного нам закона их порождения? Решение этой задачи обнаружения закона в данных или, что тоже самое, поиска сильнейшей теории в данных как раз и требует нахождения среди всех правил вида (1) логически наиболее сильных (среди истинных на эмпирической системе). Именно такие правила в соответствии с существующими представлениями следует считать законами эмпирической системы.

Поэтому задача обнаружения сильнейшей эмпирической теории в данных сводится, таким образом, к задаче обнаружения всех законов в данных. Докажем это утверждение формально.

Для дальнейших рассмотрений необходимо выделить фрагмент языка первого порядка $L(\Sigma)$, содержащий только внелогические символы системы аксиом Σ. Сигнатурой $\Im(\Sigma)$ языка $L(\Sigma)$, будем называть набор $\Im(\Sigma) =< P_1, \ldots, P_k >$, где $P_1, \ldots, P_k$ — все предикатные символы, встречающиеся в аксиомах Σ; $n_1, \ldots, n_k$ — местности соответствующих предикатных символов; $X(\Sigma) =< x_1, \ldots, x_m >$ — множество всех свободных переменных, входящих в Σ; $U(\Sigma)$ — множество всех атомарных формул (атомов) вида $P(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in X(\Sigma)$, входящих в аксиомы из Σ; $\Re(\Sigma)$ — множество утверждений языка $L(\Sigma)$, полученное замыканием множества $U(\Sigma)$ относительно логических операций $\&, \vee, \neg$. На элементах булевой алгебры $\Re(\Sigma)$ определено тождество утверждений. Будем предполагать, что логические константы И $\equiv A \vee \neg A$ и Л $\equiv A \& \neg A$ всегда принадлежат $\Re(\Sigma)$. Так как число переменных и атомарных формул конечно, то и алгебра $\Re(\Sigma)$ конечна.

Пусть у нас есть некоторая эмпирическая система $M = < A, W >$, где A — основное множество эмпирической системы, а $W = < P_1, \ldots, P_k >$, $k > 0$ — множество предикатов, определенных на A. Каждый предикат P_j местности n_j определяет подмножество $P \subseteq A_1 \times \ldots \times A_{n_j} = A$ наборов объектов, на которых он истинен. Под истинностью системы аксиом Σ на эмпирической системе M будем понимать стандартное определение истинности высказываний на моделях.

Выясним из истинности каких логически более сильных "подправил" на эмпирической системе M следует истинность самого правила. Тем самым мы получим определение "подправил" и определение закона для эмпирической системы M.

ТЕОРЕМА 1.[3] *Правило $C = (A_1 \& A_2 \& \cdots \& A_k \Rightarrow A_0)$ логически следует (в исчислении высказываний) из любого правила вида:*

1. $A_{i_1} \& A_{i_2} \& \ldots \& A_{i_h} \Rightarrow \neg A_{i_0}$,
где $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_h}, A_{i_0}\} \subset \{A_1, \ldots, A_k\}$, $0 < h < k$, *т.е.* $(A_{i_1} \& \ldots \& A_{i_h} \Rightarrow \neg A) \vdash \neg(A_1 \& \ldots \& A_k) \vdash (A_1 \& \ldots \& A_k \Rightarrow A_0)$;

2. $A_{i_1} \& A_{i_2} \& \ldots \& A_{i_h} \Rightarrow A_0$,
где $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_h}\} \subset \{A_1, \ldots, A_k\}$, $0 < h < k$, *т.е.* $(A_{i_1} \& \ldots \& A_{i_h} \Rightarrow A_0) \vdash (A_1 \& \ldots \& A_k \Rightarrow A_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подправилом некоторого правила C будем называть любое из логически более сильных правил вида 1 или 2, определенных в теореме 1 для правила C.

Как легко видеть любое подправило также имеет вид (1). Обозначим через $SSub(\Sigma)$ множество всех подправил, вместе с самими правилами, системы аксиом Σ.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если некоторое подправило правила C истинно на эмпирической системе M, то и само правило C истинно на M.*

[3]Доказательство теорем 1–4 приведено в дипломной работе Деменкова П.С. (Обнаружение эмпирической аксиоматической теории в условиях шумов). НГУ, Новосибирск, 2003 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Законом эмпирической системы $M = = <A, W>$ будем называть любое, истинное на M правило C вида (1), для которого каждое его подправило уже не истинно на M.

В результате проведенных преобразований задача тестирования систем аксиом сводится к следующей задаче.

ТЕОРЕМА 2. *Совокупность всех законов эмпирической системы является сильнейшей эмпиричес кой теорией данных представленных эмпирической системой* $M = <A, W>$.

Таким образом, задача обнаружения сильнейшей эмпирической теории сводится к задаче обнаружения всех законов на эмпирической системе.

3. Понятие эксперимента (протокола). Определение закона на множестве всех возможных экспериментов

Свяжем проверку истинности системы аксиом на эмпирической системе M с конкретными конечными экспериментами, на которых эта истинность проверяется, и тем самым сделаем проверку истинности конструктивной. Под интерпретацией языка $L(\Sigma)$ на эмпирической системе $M = <A, W>$ будем понимать два отображения: а) интерпретацию сигнатурных символов $I(M) : \Im(\Sigma) \to W$, ставящему в соответствие каждому сигнатурному символу $P_j \in \Im(\Sigma)$, $j = 1, ..., k$, местности n_j некоторый предикат P_j из W той же местности, и б) интерпретацию переменных $I : X(\Sigma) \to X(A)$, ставящему в соответствие взаимнооднозначно всем свободным переменным $X(\Sigma) = <x_1, ..., x_m>$ языка $L(\Sigma)$ переменные по основному множеству A эмпирической системы M, представленные набором $X(A) = <x_1, \dots, x_m>$. Под состоянием $s : X(A) \to A$ будем понимать отображение набора переменных $X(A) = <x_1, ..., x_m>$ в набор объектов $<a_1, ..., a_m>$ из A (не все объекты обязательно различны). Множество всех возможных состояний обозначим через S. Таким образом мы задали измерительную процедуру Obs^V эмпирической аксиоматической теории.

Определим формальный вид протокола наблюдения pr^V через понятие эксперимента.

Определим неформально что такое эксперимент. Эксперимент состоит в том, чтобы при заданной интерпретации $I(M) : \Im(\Sigma) \to W$ предикатных символов и заданной интерпретации I переменных, выбрать из основного множества A некоторый набор объектов $< a_1, ..., a_m >$ и подставить их вместо переменных $< x_1, ..., x_m >$. Далее определить значения истинности всех атомарных формул на $< a_1, ..., a_m >$.

Эксперимент определим как набор

$$Exp(s) = Exp(I(M)I(X(\Sigma)), s) = \\ =<< a_1, ..., a_m >, I(M)I(X(\Sigma))s >,$$

где $s \in S$, $s(X(A)) =< a_1, ..., a_m >$; $I(M)I(X(\Sigma))s$ — суперпозиция интерпретации $I(M)$ предикатных символов, интерпретации $I(X(\Sigma))$ переменных и состояния s. Поскольку для данной эмпирической системы M интерпретации $I(M)$, $I(X(\Sigma))$ предикатных символов и переменных фиксированы, то эксперимент также будем обозначать через $Exp(s)$. Запись $<< a_1, \ldots$ $\ldots, a_m >, I(M)I(X(\Sigma))s >$, как и в случае моделей, означает, что значения истинности атомарных высказываний на объектах набора $< a_1, ..., a_m >$ определены. Таким образом, запись $<< a_1, ..., a_m >, I(M)I(X(\Sigma))s >$ представляет собой набор значений истинности всех атомарных высказываний на объектах из $< a_1, ..., a_m >$. Например, для $W = \{\sim\}$ и объектов $< a, b, c >$

$$<< a, b, c >, I(M)I(X(\Sigma))s >=< (a \sim a) = \text{И}, \\ (b \sim b) = \text{И}, \quad (c \sim c) = \text{И}, \ (a \sim b) = \text{Л}, \ (a \sim c) = \text{И}, \\ (b \sim c) = \text{И}, (b \sim a) = \text{Л}, (c \sim a) = \text{И}, (c \sim b) = \text{Л} > .$$

Отождествим понятие эксперимента с понятием протокола наблюдения эмпирической аксиоматической теории $Exp(s) = = pr^V = Obs^V(A)$.

Будем предполагать, что порядок атомарных отношений в наборе $<< a, b, c >, I(M)I(X(\Sigma))s >$ всегда фиксирован, поэтому, если взять только набор значений истинности <И, И, И, Л, И, И, Л, И, Л> или будем говорить бинарный вектор ε для соответствующего эксперимента, то этот вектор будет однозначно характеризовать результаты эксперимента. Этот вектор можно представить как вершину девятимерного двоичного куба $\{0, 1\}^9$.

Полученный вектор $\varepsilon(Exp(s))$ будем называть значением эксперимента $Exp(s)$.

Пусть у нас есть некоторый эксперимент $Exp(s)$ множество значений которого представляет собой двоичный куб E. Рассмотрим взаимосвязь куба E и булевой алгебры $\Re(\Sigma)$. Как известно, любое утверждение из $\Re(\Sigma)$ есть дизъюнкция элементарных конъюнкций атомов или их отрицаний из $U(\Sigma)$. Следовательно, во-первых, значение истинности любого утверждения $A \in \Re(\Sigma)$ на эксперименте $Exp(s)$ определено и вычисляется по правилам алгебры высказываний, во-вторых, любому утверждению $A \in \Re(\Sigma)$ соответствует некоторое подмножество $E(A) \subseteq E$ векторов, на котором (и только на котором) оно истинно. Так как И $\equiv A \vee \neg A$ и Л $\equiv A \wedge \neg A$ всегда принадлежат $\Re(\Sigma)$, то всему множеству E и пустому подмножеству $\emptyset$ вершин так же соответствуют некоторые высказывания из $\Re(\Sigma)$. Поэтому, фактор алгебра $\Re(\Sigma)/_{\equiv}$ высказываний и множество всех подмножеств двоичного куба E изоморфны соответственно относительно логических операций на $\Re(\Sigma)/_{\equiv}$ и теоретико-множественных операций на E. Каждому бинарному вектору $\varepsilon(Exp(s))$ =<И, И, И, Л, И, И, Л, И, Л>$\in E$, представляющему собой результаты некоторого эксперимента, будет соответствовать при таком изоморфизме элементарная конъюнкция $(a \sim a)$ & $(b \sim b)$ & $(c \sim c)$ & & $\neg(a \sim b)$ & $(a \sim c)$ & $(b \sim c)$ & $\neg(b \sim a)$ & $(c \sim a)$ & & $\neg(c \sim b) \in \Re(\Sigma)$, описывающая результаты соответствующего эксперимента, которую будем обозначать через $A(Exp(s))$.

Определим для эмпирической системы M множество всех возможных экспериментов $Exp = \{Exp(s) \mid s \in S\}$. Определим для эмпирической системы M множество всех возможных экспериментов $Exp = \{Exp(s) \mid s \in S\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 .Формула $C \in \Re(\Sigma)$ истинна на $Exp(s)$ (будем писать $Exp(s) \models C$), тогда и только тогда, когда при определенном в эксперименте $Exp(s)$ наборе значений истинности $\varepsilon(Exp(s))$, формула C истинна. Иначе говоря, формула $C \in \Re(\Sigma)$ истинна на $Exp(s)$, если $\varepsilon(Exp(s)) \in E(C)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Формула $C \in \Re(\Sigma)$ истинна на Exp тогда и только тогда, когда она истинна на каждом эксперименте $Exp(s) \in Exp$.

ЛЕММА 1. *Формула* $C \in \Re(\Sigma)$ *истинна на эмпирической системе* M *(при классическом понимании истинности высказываний на моделях) тогда и только тогда, когда она истинна на* Exp.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Система аксиом Σ истинна на Exp тогда и только тогда, когда каждая аксиома из Σ истинна на Exp.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Законом на Exp будем называть любое истинное на Exp правило C вида (1), каждое подправило которого уже не истинно на Exp.

ТЕОРЕМА 3. *Правило* C *вида* (1) *является законом эмпирической системы* $M =< A, W >$ *тогда и только тогда, когда оно является законом на* Exp.

В результате задача переформулируется следующим образом:

Для множества правил $SSub$ определить, какие из них являются законами на Exp. После этого проверить для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из $SSub$, являющееся законом на Exp.

4. События и вероятности событий

Сделаем следующий шаг обобщения: будем предполагать, что объекты для экспериментов выбираются некоторым случайным образом из основного множества A эмпирической системы как из генеральной совокупности объектов. Это позволит нам ввести вероятность на множестве экспериментов, не меняя пока определения эксперимента как некоторого "фрагмента" эмпирической системы. Определим вероятность m на E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Вероятностью на E будем называть отображение $m : E \to [0, 1]$, удовлетворяющее условиям:

1. $\sum_{\varepsilon \in E} m(\varepsilon) = 1$;

2. $m(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) = \varepsilon\} = \emptyset$.

Смысл условия 2 определения вероятности 9 объясняется леммой 3. Он состоит в том, что вероятность должна быть согласована с истинностью высказываний: если высказывание A тождественно истинно на M, то его вероятность должна быть равна 1, если же оно тождественно ложно, то его вероятность должна быть равна 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Событием в эксперименте $Exp(s)$ будем называть любое подмножество $E(A) \subseteq E$, $\varepsilon(Exp(s)) \in E(A)$, $A \in \Re(\Sigma)$. Вероятностью m события $E(A)$ будем называть величину $m(E(A)) = \sum_{\varepsilon \in E} m(\varepsilon)$.

Будем говорить, что в результате эксперимента $Exp(s)$ произошло событие $E(A)$ или событие A, если $\varepsilon(Exp(s)) \in E(A)$. Событие A является элементом булевой алгебры $\Re(\Sigma)$, которую так же будем называть булевой алгеброй событий. Вероятность m индуцирует вероятность на булевой алгебре $\Re(\Sigma)$.

ЛЕММА 2. *Функция* $n(A) = m(E(A))$, $A \in \Re(\Sigma)$, *определенная на* $\Re(\Sigma)$, *является вероятностью на* $\Re(\Sigma)$, *т.е. для любых* $A, B \in \Re(\Sigma)$ *функция* n *удовлетворяет следующим аксиомам* [6] ($\vdash$ — *доказуемость в исчислении высказываний*):

1) $n(A \vee B) + n(A \& B) = n(A) + n(B)$;
2) $n(\neg A) = 1 - n(A)$;
3) *если* $\vdash A \equiv B$, *то* $n(A) = n(B)$;
4) *если* $\vdash A$, *то* $n(A) = 1$.

Но не только при выводимости высказывания его мера должна быть равна 1. Из условия 2 определения вероятности 9 следует, что и при истинности высказывания А на эмпирической системе M, оно должно иметь вероятность равную 1.

ЛЕММА 3. *Для любого высказывания* $\models A \in \Re(\Sigma)$ *выполнены следующие условия*:

1. $M \models A \Leftrightarrow n(A) = 1$;
2. $M \models \neg A \Leftrightarrow n(A) = 0$;

5. Определение вероятностного закона на эксперименте

Введем определение вероятностного закона путем обобщения понятия закона на вероятностный случай. Сделаем это так, что бы понятие закона на Exp было частным случаем этого более общего определения.

Вспомним определение закона на Exp. Законом на Exp является истинное на Exp правило все подправила которого ложны на Exp. Можно иначе переформулировать понятие закона на Exp. Законами являются такие правила, истинные на Exp, которые нельзя более упростить и/или логически усилить, сохраняя их истинность. Это свойство неупрощаемости позволяет сформулировать его не только в терминах истинности но и вероятности и тем самым перекинуть мост между детерминированным и вероятностным случаями.

ТЕОРЕМА 4. *Для правила* $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ *вида* (1) *следующие два условия эквивалентны:*

1) *правило* C *является законом на* Exp;

2 а) *условная вероятность* $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ *правила определена (т.е.* $n(A_1\&...\&A_k) > 0$) *и равна 1*;

б) *условная вероятность* $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ *правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.*

Теорема 4 дает нам эквивалентное определение закона на Exp в терминах вероятностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Вероятностным законом на Exp в детерминированном случае (для вероятностей удовлетворяющих определению 9) будем называть правило $C = (A_1\& \ldots \&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1), удовлетворяющее условиям:

1) условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена (т.е. $n(A_1\&...\&A_k) > 0$) и равна 1;

2) условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Вероятностный закон на* Exp *в детерминированном случае является законом эмпирической систем* M.

Задача тестирования систем аксиом теперь сводится к задаче обнаружения вероятностных законов в детерминированном случае.

Задача: Проверить для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из $SSub$, являющейся вероятностным законом в детерминированном случае на Exp.

6. Обобщение понятия вероятностного закона и эксперимента для тестирования систем аксиом в условиях шумов

Определение эксперимента $Exp(s)$, как некоторого "фрагмента", эмпирической системы не включает в себя всех видов случайностей, которые могут быть в эксперименте. Пока что определение вероятности 9 в силу условия 2 исключает возможность искажения значений истинности предикатов. Чтобы обобщить понятие эксперимента на случай, когда возможны ошибки измерения, шумы или ошибки в ответах испытуемого необходимо ввести все эти случайные искажения в эксперимент.

Известно [7], что в языке первого порядка и, значит, в определенных в языке первого порядка экспериментах, можно ввести несколько типов случайностей.

1. Случайности, связанные со случайным выбором стимулов или их случайным поступлением из генеральной совокупности (случайность на области [7]).

2. Случайности, вызывающие ошибки в определении значений истинности атомарных высказываний и связанные с ошибками измерения, ошибками в ответах испытуемого, шумами прибора или шумами, воздействующими на испытуемого (случайность на множестве возможных миров [7]).

В этих случаях вероятность может вводиться, вообще говоря, различным образом [7] как вероятность на "области" в первом случае, или на множестве "возможных миров" как во втором случае. Определение вероятности 9 является примером вероятности на "области", так как учитывает только случайности, связанные со случайным выбором стимулов, но, в силу свойства 2 определения 9, определено для экспериментов, которые являются "фрагментами" эмпирических систем и, следовательно, не содержат случайностей вида 2. Чтобы учесть оба типа вышеприведенных случайностей необходимо одновременно обобщить определение вероятности и эксперимента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Вероятностью на E назовем отображение $m : E \to [0,1]$, удовлетворяющее условиям:

1) $\sum_{\varepsilon \in E} m(\varepsilon) = 1$.

Для "детерминированных" экспериментов, должно быть выполнено так же следующее условие:

2) $m(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \{Exp(s) \mid \varepsilon(Exp(s)) = \varepsilon\} = \emptyset$.

Эксперимент определим как набор

$$Exp(s) = F << a_1, ..., a_m >, I(M)I(X(\Sigma))s >,$$

где F — случайное отображение $F : E \to E$. В случае, когда F — тождественное отображение будем говорить, что мы имеем "детерминированный" эксперимент, для которого должно быть выполнено условие 2 определения 12.

Например, в эксперименте с проверкой транзитивности случайное отображение F можно задать следующим образом. Рассмотрим отображение $\xi(a,b,c) = (\Re(a,b), \Re(b,c), \Re(a,c))$, где $\Re(a,b) = 1$ если $(a < b)$ и 0 иначе. Каждая компонента тройки может принимать противоположное значение с не нулевой вероятностью. 1 переходит в 0 с вероятностью α, а 0 переходит в 1 с вероятностью β $(1 > \alpha, \beta > 0)$. Таким образом, мы ввели двоичный шум в теорию с проверкой транзитивности. Кроме того, шум будем считать независимым. Этот шум назовем независимым случайным двоичным.

"Детерминированный" эксперимент совпадает со старым определением эксперимента. Данное определение эксперимента $Exp(s)$ представляет собой случайно искаженный функцией F "фрагмент" эмпирической системы. Характеристики функции F как случайного отображения полностью определяются вероятностью m. Определение вероятности n остается прежним.

Для экспериментов, определенных в определении 11 с различными типами случайностей уже нельзя требовать истинности аксиом на Exp. Поэтому определение закона на Exp теряет свой смысл. Эквивалентное определение вероятностного закона, данное в теореме 4, для которого должно быть выполнено условие $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$, так же теряет смысл, в силу того, что условная вероятность не может быть равна 1 в экспериментах с шумами. Поэтому необходимо ввести обобщение этого определения путем удаления условия, которое не может быть выполнено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Вероятностным законом на Exp будем называть правило $C = (A_1\&...\&A_k \Rightarrow A_0)$ вида (1), удовлетворяющее условию: условная вероятность $n(A_0/A_1\&...\&A_k)$ правила определена и строго больше условных вероятностей каждого из его подправил.

Покажем, что в результате удаления условия $n(A_0/A_1\&...\&A_k) = 1$ из определения 11 вероятностного закона для детерминированного случая, мы ничего не потеряли из существа определения закона.

Вспомним, что именно свойство неупрощаемости позволило нам сформулировать определение вероятностного закона в детерминированном случае. Посмотрим на теорему 4 с точки зрения неупрощаемости закона. В вероятностных терминах свойство неупрощаемости закона звучит уже несколько иначе: для правила, истинного на M, для которого условная вероятность равна 1, неупрощаемость правила означает, что если мы возьмем любое логически более сильное его подправило, то его условная вероятность строго уменьшится и станет строго меньше 1, т.е. вероятностный закон на Exp в детерминированном случае нельзя упростить, не уменьшив существенно его условную вероятность. Поэтому два эквивалентных определения закона, сформулированных в теореме 4 могут быть переформулированы в терминах неупрощаемости закона, только одно из них для значения истинности, а другое для условной вероятности. Из этой переформулировки видно, что для понятия закона важны не сама истинность, вероятность или то, что условная вероятность равна 1, а невозможность его упрощения с сохранением этих Оценок (истинности, вероятности и т.д.). Это дает возможность дать более общее определение закона для правил вида (1), охватывающее как детерминированный, так и вероятностный случай.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14 (определение закона). Законом является такое правило C вида (1), характеризуемое некоторой оценкой, что его нельзя "упростить" (логически усилить в соответствии с теоремой 1) не уменьшив существенно этой оценки.

Эквивалентность двух различных определений закона с точки зрения данного определения закона для двух различных видов оценок — оценки истинности и оценки условной вероятности равной 1 доказана в теореме 4. При переходе от определения 11 вероятностного закона в детерминированном случае к определению 13 вероятностного закона мы заменили оценку закона с условной вероятности равной 1 на просто оценку условной вероятности, оставаясь в рамках определения закона 14.

Условная вероятность, используемая в теореме 4 и определениях 11 и 13 как оценка закона, интересна не только тем, что это вероятность, а еще и тем, что она является оценкой предсказательной силы закона, являющейся наиболее важной характеристикой законов вообще. Понятие закона всегда, прежде всего, связывается с его способностью предсказывать, поэтому переход от характеристики закона в терминах истинности, принятой в философской логике и связанной с принципом фальсифицируемости, к характеристике закона в терминах предсказания является не просто уходом от старой парадигмы, а переходом к более естественному определению закона. Теорема 4 в этом случае означает, что для детерминированного случая, который характеризует возможность предсказания в случае отсутствия шумов, определения закона через истинность и условную вероятность совпадают. Но если мы имеем стохастический случай, когда правила не истинны на M, определение Закона через истинность теряет свой смысл, а определение закона, основанное на условных вероятностях, сохраняет свой смысл.

7. Тестирование систем аксиом в условиях шумов

Процесс получения результатов некоторого эксперимента можно разделить на два этапа — получение результатов эксперимента в "чистом" виде, как "фрагмента" эмпирической системы, а затем получение результатов реального эксперимента "добавлением" шумов. Выделение этих двух этапов можно сделать, введя две вероятностных меры для значений экспериментов — вероятностную меру в детерминированном и стохастическом случаях. Первая их них Dm будет удовлетворять дополнительному требованию 12 для вероятностей в детерминированном случае, а вторая Sm будет вероятностной мерой в общем случае, как определено в определении 11.

Введение двух вероятностных мер позволит нам ввести вероятностную модель шумов. Вернемся к определению эксперимента из определения 11

$$Exp(s) = F << a_1, ..., a_m >, I(M)I(X(\Sigma))s > .$$

Мы можем рассматривать получение результата стохастического эксперимента в два этапа: сначала получение результата детерминированного эксперимента при состоянии s в соответствии со значениями истинности на эмпирической системе и вероятностной мерой Dm, а затем применение случайного преобразования F значений истинности в результате шумов, ошибок, точности приборов и т.д. в соответствии с вероятностной мерой Sm. Приведем соответствующие определения.

Определим переход от значений $Exp(s)$ детерминированного эксперимента, представленного некоторыми наборами в двоичном кубе E, к значению стохастического эксперимента, в соответствии с действием шумов, ошибок, неточностей и т.д. как действие случайной функции $F : E \to E$. Отображение F есть некоторое случайное взаимнооднозначное отображение $F : E \to E$. Вероятностные характеристики этого отображения и, соответственно модель шумов, задаются соотношением двух вероятностей Dm и Sm. При этом вероятность Sm — есть вероятность реальных экспериментов, а Dm — вероятность гипотетического "идеального" эксперимента на эмпирической системе.

Вернемся к задаче тестирования систем аксиом. Теоремой 4 и следствием 2 для вероятностей Dm эта задача была решена и сведена к задаче: "Проверить для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из $SSub$, являющейся Вероятностным законом в детерминированном случае на Exp". Можно ли доказать аналогичные теоремы в стохастическом случае для вероятностей Sm? К сожалению, в общем случае это принципиально невозможно ввиду огромного разнообразия возможных моделей шумов, ошибок испытуемых, моделей приборов и т.д. Тем не менее, большой опыт решения практических задач, а так же модельные эксперименты [8-13], ссылка на эксперименты (модельные и с испытуемыми) показывают, что понятие вероятностного закона устойчиво относительно большого числа типов шумов. Устойчивость относительно шумов означает, что если некоторое множество правил $\{C_i\}$ являются вероятностными законами в детерминированном случае, то это же самое множество правил является вероятностными законами и в стохастическом случае. Тем самым решение задачи тестирования систем аксиом в стохастическом случае сводилось бы так же к решению задачи: "Проверить для каждой ли аксиомы из Σ есть подправило из $SSub$, являющейся вероятностным законом в детерминированном случае на Exp", за исключением проверки условия, что условные вероятности вероятностных законов равны 1. Последнее условие в стохастическом случае не может быть выполнено и должно быть заменено на величину равную (1-δ), где δ — оценка уровня шумов. Оценку уровня шумов можно получить в процессе эксперимента, например, время, от времени предъявляя случайно совершенно одинаковые стимулы [14].

Эти рассуждения ставят следующую проблему: определить какие вероятности и модели шумов сохраняют множество вероятностных закономерностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Назовем сохраняющими моделями шумов те пары вероятностей Sm, Dm которые сохраняют, содержащиеся в них вероятностные законы (т.е. множество вероятностных законов для вероятностей Sm и Dm одинаково).

Если мы ограничим себя рассмотрением только сохраняющих моделей шумов, то задача тестирования систем аксиом в стохастическом случае сводится к следующей задаче:

Для тестирования системы аксиом Σ в стохастическом случае для сохраняющих моделей шумов необходимо проверить для каждой ли аксиомы из S есть подправило из $SSub$, являющееся вероятностным законом на Exp.

Таким образом, для решения задачи тестирования системы аксиом в стохастическом случае необходимо знать (либо проверить машинным моделированием) является ли модель шумов сохраняющей или нет. Поэтому данная работа ставит проблему: определить множество сохраняющих моделей шумов.

8. Устойчивость эмпирической теории к двоичному шуму с параметром λ

Предположим, что у нас есть эксперимент $Exp(s) = =<< a_1, ..., a_m >, I(M)I(X(\Sigma))s >$ и вероятность для детерминированного случая Dm. Определим шумы, задающие случайное преобразование $F : E \to E$. Предположим, что каждое атомарное высказывание, значение которого получается в эксперименте, подвергается воздействию независимой и одинаково распределенной двузначной случайной величины Λ, принимающей значение 1 с вероятностью $\lambda > 0.5$ и 0 с вероятностью $1 - \lambda$.

Если значения эксперимента представить как двоичный вектор $< 1, 1, 0, ..., 0, 1 >$, где 1 — истина, а 0 — ложь, то преобразование $F : E \to E$ примет вид:

$$< 1, 1, 0, ..., 0, 1 > \Rightarrow < \lambda_1 1,\ \lambda_2 1,\ \lambda_3 0, ..., \lambda_{n-1} 0,\ \lambda_n 1 >,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ — различные независимые случайные величины, имеющие распределение Λ. Эксперимент с преобразованными значениями атомарных высказываний обозначим через $FExp(s)$. Пусть Sm — вероятность, удовлетворяющая определению 11, для случайно преобразованного эксперимента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Эмпирическая аксиоматическая теория устойчива к шуму, если множества вероятностных законов для эксперимента $Exp(s)$ с вероятностью Dm и эксперимента $FExp(s)$ с вероятностью Sm совпадают.

ТЕОРЕМА 5. *Эмпирическая аксиоматическая теория устойчива к двоичному шуму с параметром λ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что правило $C = (A_1 \& ... \& A_k \Rightarrow A_0)$ является вероятностным законом для эксперимента $Exp(s)$ тогда и только тогда, когда оно является вероятностным законом для эксперимента $FExp(s)$. В стохастическом эксперименте $FExp(s)$ правило $\lambda^* C$ примет вид $(\lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k \Rightarrow \lambda_0^* A_0)$, где $\lambda_1^*, ..., \lambda_k^*$, λ_0^* — случайные величины из множества $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, если литера $A_1, ..., A_k, A_0$ не содержит отрицания, либо случайные величины из множества $1 - \lambda_1$, $1 - \lambda_2, ..., 1 - \lambda_n$, если литера содержит отрицание.

Надо доказать, что правила $C = (A_1 \& ... \& A_k \Rightarrow A_0)$ и $\lambda^* C = (\lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k \Rightarrow \lambda_0^* A_0)$ одновременно либо являются, либо не являются вероятностными законами. Докажем это последовательностью эквивалентных преобразований. Пусть правило $\lambda^* C$ является вероятностным законом. Тогда

$$n(\lambda_0^* A_0 / \lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k) > n(\lambda_0^* A_0 / \lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k) \qquad (2)$$

для подправила $(\lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k \Rightarrow \lambda_0^* A_0)$ правила λ^* вида 2 теоремы 1.

Распишем это неравенство:

$$n(\lambda_0^* A_0/\lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k) = \frac{n(\lambda_0^* A_0 \& \lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k)} >$$

$$> n(\lambda_0^* A_0/\lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k) = \frac{n(\lambda_0^* A_0 \& \lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k)}.$$

Рассматривая значения литер $A_0, A_1, ..., A_k$, как точку в двоичном кубе, мы можем заменить операцию конъюнкции на умножение. Тогда получим следующее эквивалентное неравенство:

$$\frac{n(\lambda_0^* A_0 \bullet \lambda_1^* A_1 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_1^* A_1 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)} > \frac{n(\lambda_0^* A_0 \bullet \lambda_2^* A_2 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_2^* A_2 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}.$$

Это неравенство легко преобразуется эквивалентным образом в силу независимости случайных величин λ как между собой так и относительно литер $A_1, ..., A_k, A_0$:

$$\frac{n(\lambda_0^* A_0 \bullet \lambda_1^* A_1 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_1^* A_1 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)} =$$

$$= \frac{n(\lambda_0^* \bullet \lambda_1^* \bullet ... \bullet \lambda_k^* \bullet A_0 \bullet A_1 \bullet ... \bullet A_k)}{n(\lambda_1^* \bullet ... \bullet \lambda_k^* \bullet A_1 \bullet ... \bullet A_k)} >$$

$$> \frac{n(\lambda_0^* A_0 \bullet \lambda_2^* A_2 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_2^* A_2 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)} =$$

$$= \frac{n(\lambda_0^* \bullet \lambda_2^* \bullet ... \bullet \lambda_k^* \bullet A_0 \bullet A_2 \bullet ... \bullet A_k)}{n(\lambda_2^* \bullet ... \bullet \lambda_k^* \bullet A_2 \bullet ... \bullet A_k)}.$$

Если два события A, B независимы, то $n(A \& B) = n(A)n(B)$. Так как операция является конъюнкцией, то $n(A \bullet B) = n(A)n(B)$. Отсюда получаем следующее эквивалентное преобразование неравенства:

$$\frac{\lambda_0^* \bullet \lambda_1^* \bullet ... \bullet \lambda_k^* \, n(A_0 \bullet A_1 \bullet ... \bullet A_k)}{\lambda_1^* \bullet ... \bullet \lambda_k^* \, n(A_1 \bullet ... \bullet A_k)} >$$

$$> \frac{\lambda_0^* \bullet \lambda_2^* \bullet ... \bullet \lambda_k^* \, n(A_0 \bullet A_2 \bullet ... \bullet A_k)}{\lambda_2^* \bullet ... \bullet \lambda_k^* \, n(A_2 \bullet ... \bullet A_k)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(A_0 \bullet A_1 \bullet ... \bullet A_k)}{n(A_1 \bullet ... \bullet A_k)} > \frac{n(A_0 \bullet A_2 \bullet ... \bullet A_k)}{n(A_2 \bullet ... \bullet A_k)}.$$

Но последнее неравенство и есть то что нам требуется доказать, а именно вероятностное неравенство аналогичное неравенству (2) но только относительно правила C, а не правила $\lambda^* C$. Так как последнее неравенство было получено эквивалентными преобразованиями, то обратное так же верно, т.е. если неравенство (2) выполнено для правила C, то оно будет выполнено и для правила $\lambda^* C$. Справедливость аналогичного неравенства относительно других подправил вида 2 теоремы 1 доказывается аналогично. Таким образом справедливость теоремы относительно подправил вида 2 доказана.

Для завершения доказательства теоремы необходимо доказать аналогичное неравенство для подправил вида 1 теоремы 1.

Рассмотрим неравенство

$$n(\lambda_0^* A_0/\lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k) > n(\neg\lambda_1^* A_1/\lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k) \qquad (3)$$

Распишем его аналогичным образом. Отрицание $\neg\lambda_1^* A_1$ равно $(1 - \lambda_1^*)A_1$. Но поскольку сама случайная функция λ_1^* есть либо λ_1 , либо $1 - \lambda_1$ в зависимости от наличия либо отсутствия отрицания у атома A_1 , то обозначение случайной величины $\neg\lambda_1^*$ можно оставить тем же самым, а именно λ_1^*. Поэтому мы получим неравенства

$$n(\lambda_0^* A_0/\lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k) = \frac{n(\lambda_0^* A_0 \& \lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_1^* A_1 \& ... \& \lambda_k^* A_k)} >$$

$$> n(\lambda_1^* A_1/\lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k) = \frac{n(\lambda_1^* A_1 \& \lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_2^* A_2 \& ... \& \lambda_k^* A_k)}.$$

Заменим операцию конъюнкции на операцию умножения

$$\frac{n(\lambda_0^* A_0 \bullet \lambda_1^* A_1 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_1^* A_1 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)} > \frac{n(\lambda_1^* A_1 \bullet \lambda_2^* A_2 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_2^* A_2 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}.$$

Проведем серию эквивалентных преобразований

$$\frac{n(\lambda_0^* A_0 \bullet \lambda_1^* A_1 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_1^* A_1 \bullet ... \bullet \lambda_k^* A_k)} =$$

$$= \frac{n(\lambda_0^* \bullet \lambda_1^* \bullet \ldots \bullet \lambda_k^* \bullet A_0 \bullet A_1 \bullet \ldots \bullet A_k)}{n(\lambda_1^* \bullet \ldots \bullet \lambda_k^* \bullet A_1 \bullet \ldots \bullet A_k)} >$$

$$> \frac{n(\lambda_1^* A_1 \bullet \lambda_2^* A_2 \bullet \ldots \bullet \lambda_k^* A_k)}{n(\lambda_2^* A_2 \bullet \ldots \bullet \lambda_k^* A_k)} =$$

$$= \frac{n(\lambda_1^* \bullet \lambda_2^* \bullet \ldots \bullet \lambda_k^* \bullet A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_k)}{n(\lambda_2^* \bullet \ldots \bullet \lambda_k^* \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_k)}.$$

Отсюда получаем следующие эквивалентные преобразования

$$\frac{\lambda_0^* \bullet \lambda_1^* \bullet \ldots \bullet \lambda_k^*\, n(A_0 \bullet A_1 \bullet \ldots \bullet A_k)}{\lambda_1^* \bullet \ldots \bullet \lambda_k^*\, n(A_1 \bullet \ldots \bullet A_k)} >$$

$$> \frac{\lambda_1^* \bullet \lambda_2^* \bullet \ldots \bullet \lambda_k^*\, n(A_1 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_k)}{\lambda_2^* \bullet \ldots \bullet \lambda_k^*\, n(A_2 \bullet \ldots \bullet A_k)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_0^* n(A_0 \bullet A_1 \bullet \ldots \bullet A_k)}{n(A_1 \bullet \ldots \bullet A_k)} > \frac{\lambda_1^* n(A_0 \bullet A_2 \bullet \ldots \bullet A_k)}{n(A_2 \bullet \ldots \bullet A_k)}.$$

Так как $\lambda_0^* = \lambda_1^* = \lambda$, то мы получаем требуемое неравенство, так как последнее неравенство и есть то что нам требуется доказать. Аналогичное доказательство можно провести для остальных подправил вида 1 теоремы 1. □

Так же может быть доказан следующий факт, что если транзитивность $C = ((a < b)\ \&\ (b < c) \Rightarrow (a < c))$ является вероятностным законом для эксперимента $Exp(s)$ в детерминированном случае с вероятностью Dm, То она является вероятностным законом для эксперимента $FExp(s)$ в стохастическом случае с вероятностью Sm в том случае, если неравенства для условных вероятностей в детерминированном случае для подправил вида 1 выполнены с превышением на величину $(\frac{1}{\lambda} - 1)$.

9. Устойчивость эмпирической теории к независимому случайному двоичному шуму с параметрами α и β

Предположим, что у нас есть эксперимент $Exp(s) = \,=<< a_1, ..., a_m >, I(M)I(X(\Sigma))s >$ и вероятность для детерминированного случая Dm. Определим шумы, задающие случайное преобразование $F : E \to E$. Предположим, что каждое атомарное высказывание, значение которого получается в эксперименте, подвергается воздействию независимой и одинаково распределенной двузначной случайной величины Υ, переводящей 1 в 0 с вероятностью α и 0 в 1 с вероятностью β $(\alpha, \beta \in (0,1))$. Если значения эксперимента представить как двоичный вектор $< 1, 1, 0, ..., 0, 1 >$, где 1 — истина, а 0 — ложь, то преобразование $F : E \to E$ примет вид:

$$< 1, 1, 0, ..., 0, 1 > \Rightarrow < \gamma_1 1,\ \gamma_2 1,\ \gamma_3 0, ..., \gamma_{n-1} 0,\ \gamma_n 1 >,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ — различные независимые случайные величины, имеющие распределение Υ. Эксперимент с преобразованными значениями атомарных высказываний обозначим через $FExp(s)$. Пусть Sm - вероятность, удовлетворяющая определению 11, для случайно преобразованного эксперимента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Бинарное отношение $\succcurlyeq$ полно тогда и только тогда, когда $\forall a, b \in S$ либо $a \succcurlyeq b$, либо $b \succcurlyeq a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Бинарное отношение является отношением безразличия, если $\forall a, b \in S \quad a \sim b \Leftrightarrow ((a \succcurlyeq b) \cap (b \succcurlyeq a))$.

Транзитивность $\succcurlyeq$ влечет транзитивность $\sim$.

Для трех элементов $a, b, c \in S$ существует ровно три возможности:

1) ни одна из трёх пар не находится в отношении безразличия;

2) только одна пара находится в отношении безразличия;

3) все три пары находятся в отношении безразличия.

(Случай, когда две пары в отношении безразличия, а одна нет, не имеет места в силу транзитивности отношения безразличия.)

ТЕОРЕМА 6. *Эмпирическая аксиоматическая теория, содержащая только правила вида $A_1 \& A_2 \Rightarrow A_0$, устойчива к независимому случайному двоичному шуму, если отношение $\succcurlyeq$ — полное и вероятность тройки без пары в отношении безразличия по крайней мере в 2 раза выше, чем у тройки с одной парой в отношении безразличия.*

Если $\succcurlyeq$ — линейный порядок, тогда $a \sim b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = b$, т.е. только равенство элементов может быть отношением безразличия. В этом случае, если элементы появляются с равными вероятностями, условие теоремы 6 действительно выполняется. Следовательно, такая эмпирическая теория с транзитивным отношением будет устойчива к независимому случайному двоичному шуму.

Заключение

В работе получены условия устойчивости эмпирической аксиоматической теории к двоичному шуму с параметром λ и независимому случайному двоичному шуму. Это позволяет обнаруживать эмпирическую аксиоматическую теорию, представимую правилами вида $C = (A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_k \Rightarrow A_0)$ для случая двоичного шума с параметром λ. Кроме того при рассмотрении теорий представимых правилами вида $C = (A_1 \& A_2 \Rightarrow A_0)$ доказана устойчивость к независимому случайному двоичному шуму с параметрами (α, β). Таким образом, найдя множество законов по реальным эмпирическим данным мы можем утверждать, что построенные законы совпадают с действительными, в том случае, когда данные зашумлены этими двумя типами шумов.

Автор выражает благодарность своим научным руководителям Гончарову С.С. и Витяеву Е.Е. за постановку задачи и помощь в проведенном исследовании.

Литература

1. ВИТЯЕВ Е.Е. Обнаружение закономерностей // Методы анализа данных. – Новосибирск, 1991. – Вып.138: Вычислительные системы. – С.26-60

2. ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф., СВИРИДЕНКО Д.И. Логика эмпирических исследований. – Новосибирск, 1978. – 66 с.

3. КАРНАП Р. Философские основания физики. – М.: Прогресс, 1971. – 387 с.

4. PZELECKI M. The logic of empirical theories. – London: Routledge Kogan Paul, 1969.– 109 p.

5. ПФАНЦАГЛЬ И. Теория измерений.– М.: Мир, 1976. – 248 с.

6. FENSTAD J.I. Representation of probabilities defined on first order languages // J.N.Crossley, ed., Sets, Models and Recursion Theory: Proceedings of the Summer School in Mathematical Logic and Tenth Logic Colloguium (1967). P.156-172.

7. HALPERN J.Y. An analysis of first-order logics of probability // Artificial Intelligence. – 1990. – Vol.46. – P.311-350.

8. ВИТЯЕВ Е.Е. Семантический подход к созданию баз знаний. Семантический вероятностный вывод наилучших для предсказания ПРОЛОГ-программ по вероятностной модели данных. // Логика и семантическое программирование. – Новосибирск, 1992. – Вып.146: Вычислительные системы. – С.19-49.

9. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания // Эмпирическое предсказание и распознавание образов. – Новосибирск,1976. – Вып.67: Вычислительные системы. – С. 54-68.

10. ВИТЯЕВ Е.Е., МОСКВИТИН А.А. Введение в теорию открытий. Программная система DISCOVERY. // Логические методы в информатике. – Новосибирск, 1993. – Вып.148: Вычислительные системы. – С.117-163.

11. ВИТЯЕВ Е.Е., ЛОГВИНЕНКО А.Д. Метод тестирования систем аксиом. // Теория вычислений и языки спецификаций. – Новосибирск, 1995. – Вып.152: Вычислительные системы. – С.119-139.

12. ВИТЯЕВ Е.Е., МОСКВИТИН А.А. ЛАДА — программная система логического анализа данных // Методы анализа данных. Новосибирск,1985. – Вып.111: Вычислительные системы. – С.38-58.

13. ВИТЯЕВ Е.Е. Логико-операциональный подход к анализу данных // Комплексный подход к анализу данных в социологии. Тр. Института Социологических исследований АН. – М., 1989. – С. 113-122.

14. LOGVINENKO A.D., DETH W., VITYAEV E.E. We can order stimuli even when we are not able to see them: An evidence in favour of fuzzy sensory threshold, Perception and Psychophysics, 1997.

Поступила в редакцию
9 апреля 2004 года