МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ
(Вычислительные системы)
2004 год Выпуск 173

УДК 518.74

О СЛОЖНОСТИ УТВЕРЖДЕНИЙ И СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Е.М. Черепанов

В данной статье продолжено исследование понятия простоты научной теории и методов ее измерения. В отличие от тех подходов, где сложность теории оценивается через сложность класса моделей этой теории, автор предлагает метод измерения сложности множества внелогических аксиом этой теории и соотносит найденное значение сложности со сложностью собственно теории. Показано, что предложенный метод измерения сложности теории более точен. Определено понятие содержательной сложности теории и указаны условия и алгоритм измерения этой разновидности сложности. Предложен метод измерения дескриптивной и содержательной сложности утверждений теории.

1. В 1961 году Н.Гудмен публикует в [5] окончательную версию своего метода измерения структурной простоты множества внелогических терминов теории или системы. Каждому набору терминов соответствует класс интерпретаций этого набора терминов — класс моделей. Н.Гудмен конструирует способ приписывания всякому такому классу интерпретаций числа, которое характеризует простоту (или сложность) этого множества терминов.

Прежде всего, Н.Гудмен оговаривает, что вынужден "ограничить свое исследование лишь очень малой частью проблемы, привлекающей внимание исследователей" [7]. Под "теорией" понимается система утверждений, а он намерен касаться лишь проблемы измерения простоты множества понятий, или словаря терминов, используемых в этих утверждениях. При этом он подчеркивает, что рассмотрению подлежат лишь внелогические термины, причем те из них, которые не определимы в данной системе. Именно эти термины и являются "примитивными" и образуют "экстралогический базис" (или модель) системы. Простота этого "экстралогического базиса" и исследуется в его работах.

Мера простоты, построенная Н.Гудменом, базируется на ясных и вполне приемлемых принципах. В фиксированном языке конечной сигнатуры первого порядка самым простым термином считается одноместный предикат. Двухместный предикат в общем случае является структурно более сложным чем одноместный, трехместный — сложнее, чем двухместный и так далее. Кроме того полагается, что если некоторое фиксированное множество предикатов может быть "заменено"[1] некоторым другим фиксированным множеством предикатов, то сложность исходного множества предикатов не больше сложности второго множества предикатов. Каждый экстралогический термин теории может обладать теми или иными свойствами, выразимыми в логике первого порядка. Из всевозможных свойств, описываемых формулами первопорядковой логики Н.Гудмен выделяет вполне определенные, называемые *релевантными* свойствами. Основная примечательность этих свойств состоит в том, что они позволяют определять исходные термины через более простые. Здесь необходимо уточнить — что это значит "более простые"? Имеется в виду, в первую очередь, структурные характеристики каждого термина. Например, так как предполагается, что одноместный предикат проще двухместного, то свойство, позволяющее определить двухместный предикат через два одноместных, полезное свойство. Симметричный двухместный предикат интуитивно кажется более простым, чем не симметричный. Таким образом различного рода структурные характеристики, такие как количество предикатов нашего словаря, местность

[1] Если рассматривать классы моделей этих двух множеств предикатов, то заменяемость имеет смысл интерпретируемости одного класса моделей в другом.

каждого предиката, а также информация о возможном наборе релевантных свойств каждого предиката (различного рода рефлексивности, симметричность, самополнота как сильная разновидность транзитивности и другое) является важной для создания измерительных стандартов. Такого рода стандартами являются в теории Н.Гудмена *релевантные классы моделей.* Понятие релевантного класса моделей в теории Н.Гудмена является одним из основополагающих. Рассмотрим это понятие.

1.1 Чтобы облегчить последующее изложение, мы сначала определим операцию *сигнатурной суммы* классов моделей, которое в явном виде отсутствует, к сожалению, у Н.Гудмена, хотя и используется им, так сказать, "по умолчанию".

Пусть $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$ — произвольные классы моделей сигнатур $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ соответственно. Мы пишем $\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$, если и только если:

1) $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ — множества сигнатурных терминов Ω_1 и Ω_2 не имеют общих элементов;

2) $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega_3$ — объединение множеств сигнатурных терминов Ω_1 и Ω_2 совпадает с множеством терминов Ω_3;

3) $\mathbf{L}_3 \restriction \Omega_1 = \mathbf{L}_1$ — класс моделей L_1 получен обеднением класса моделей L_3 до сигнатуры Ω_1 или, по другому, если из каждой модели класса моделей L_3 выкинуть все отношения, не соответствующие сигнатуре Ω_1, то мы получим в точности класс моделей L_1;

4) $\mathbf{L}_3 \restriction \Omega_2 = \mathbf{L}_2$ — смысл этого условия аналогичен смыслу условия 3;

5) для любых двух моделей M_1 и M_2, таких что M_1 принадлежит классу моделей L_1 ($M_1 \in \mathbf{L}_1$), а M_2 принадлежит классу моделей L_2 ($M_2 \in \mathbf{L}_2$) и обе эти модели имеют один и тот же носитель $\mathbf{U}$ найдётся модель $M_3 \in \mathbf{L}_3$ такая что $M_3 \restriction \Omega_1 = M_1$ и $M_3 \restriction \Omega_2 = M_2$.

Если $\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$, то мы называем класс моделей $\mathbf{L}_3$ *сигнатурной суммой* классов моделей $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$.

1.2 Перед тем как определить понятие *релевантного класса моделей*, введем для удобства изложения некоторые вспомогательные понятия. Для любого натурального числа n, $n \geq 2$, мы будем называть n-местный предикат P:

— *иррефлексивным*, если и только если

$$\forall x_1 \ldots x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 \neq x_2) \& (x_1 \neq x_3) \& \ldots \& (x_{n-1} \neq x_n));$$

— *избыточным*, если и только если

$$\forall x_1 \ldots x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 = x_2 = \ldots = x_n);$$

— *композиционно рефлексивным*, если и только если

$$\exists x_1 \ldots x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \& (x_1 \neq x_2) \& (x_1 \neq x_3) \& \ldots \& (x_{n-1} \neq x_n)) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists y_1 \ldots y_n)(P(y_1, \ldots, y_n) \& (y_1 = y_2 = \ldots = y_n));$$

— *тотально диверсивным*, если и только если

$$\forall x_1 \ldots x_n ((x_1 \neq x_2) \& (x_1 \neq x_3) \& \ldots \& (x_{n-1} \neq x_n)) \to P(x_1, \ldots, x_n));$$

— *тотально рефлексивным*, если и только если

$$\forall x_1 \ldots x_n (x_1 = x_2 \ldots = x_n \to P(x_1, \ldots, x_n));$$

— *объединенно рефлексивным*, если и только если

$$\forall x_1 \ldots x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \& (x_1 \neq x_2) \& (x_1 \neq x_3) \& \ldots \& (x_{n-1} \neq x_n) \to$$

$$\to P(x_1, x_1 \ldots, x_1) \& P(x_2, x_2, \ldots, x_2) \& \ldots \& P(x_n, \ldots, x_n));$$

— *рефлексивным слева*, если и только если для некоторого фиксированного k

$$\forall x_1 \ldots x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \& (x_1 \neq x_2) \& (x_1 \neq x_3) \& \ldots \& (x_{n-1} \neq x_n) \to$$

$$\to P(x_1, \ldots, x_1) \& P(x_2, \ldots, x_2) \& \ldots \& P(x_k, \ldots, x_k));$$

— *рефлексивным справа*, если и только если для некоторого фиксированного k

$$\forall x_1 \dots x_n (P(x_1, \dots, x_n) \& (x_1 \neq x_2) \& (x_1 \neq x_3) \& \dots \& (x_{n-1} \neq x_n) \to$$

$$\to P(x_k, \dots, x_k) \& P(x_{k+1}, \dots, x_{k+1}) \& \dots \& P(x_n, \dots, x_n));$$

— *самополным относительно всех мест*, если и только если

$$\forall x_1 ... x_n \forall y_1 ... y_n ((P(x_1, ..., x_n) \& P(y_1, ..., y_n) \to P(y_1, x_2, ..., x_n) \&$$

$$\& P(x_1, y_2, x_3, \dots, x_n) \& \dots \& P(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n));$$

— *самополным относительно подпоследовательностей мест*, если и только если для некоторой фиксированной подпоследовательности мест $\langle j_1, \dots, j_k \rangle$

$$\forall x_1 \dots x_n \forall y_1 \dots y_n ((P(x_1, \dots, x_n) \wedge P(y_1, \dots, y_n) \to P(x_1^*, \dots, x_n^*)),$$

где последовательность переменных $x_1^*, \dots, x_n^*$ отличается от последовательности переменных $x_1, \dots, x_n$ тем, что переменные с индексами $\langle j_1, \dots, j_k \rangle$ заменены на переменные $y_{j_1}, \dots, y_{j_k}$;

— *симметричным внутри фиксированной подпоследовательности мест*, если и только если для любой перестановки π индексов фиксированной подпоследовательности мест $\langle j_1, \dots, j_k \rangle$

$$\forall x_1 ... x_n (P(..., x_{j_1}, ..., x_{j_k}, ...) \leftrightarrow P(..., x_{\pi(j_1)}, ..., x_{\pi(j_k)}, ...)).$$

Только что приведённые одиннадцать определений описывают свойства тех многоместных отношений, которые достаточно часто встречаются в научной практике. По этой причине Н.Гудмен использует эти свойства в качестве исходных "кирпичей" для построения своего рода эталонных классов моделей — так называемых "релевантных классов"[2].

[2]На самом деле Гудмен прибегает к ещё нескольким добавочным определениям, позволяющим рассматривать n-местные отношения со специальными типами симметрий, соответствующих специальным подгруппам группы всех перестановок на множестве индексов $1, \dots, n$. Так что фактически в качестве упоминаемой ниже совокупности Γ у Н.Гудмена фигурирует более ши-

Обозначим эту совокупность из одиннадцати вышеуказанных предложений через Г. Обозначим также через $\Phi \subseteq \Gamma$ произвольное (одно из 2^{11} возможных) подмножество предложений. Будем обозначать через $\langle \mathbf{U}, n - \textit{мест.}, \Phi \rangle$ произвольную модель класса моделей, в сигнатуре которого единственный n-местный предикат, удовлетворяющий всем релевантным свойствам из Φ, с носителем U. Если $\Phi = \emptyset$, то вместо $\langle \mathbf{U}, n - \textit{мест.}, \Phi \rangle$ пишем $\langle \mathbf{U}, n - \textit{мест} \rangle$.

Будем говорить, что класс моделей является *релевантным классом*, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

— это класс всех моделей пустой сигнатуры;

— это класс всех моделей вида $\langle \mathbf{U}, n - \textit{мест.} \rangle$ для некоторого $n \geq 1$;

— это класс всех моделей вида $\langle \mathbf{U}, n - \textit{мест.}, \Phi \rangle$ для всякого $n \geq 2$ и произвольной фиксированной совокупности $\Phi \subseteq \Gamma$;

— этот класс есть объединение двух релевантных классов;

— этот класс есть пересечение двух релевантных классов;

— этот класс есть разность двух релевантных классов;

— этот класс есть сигнатурная сумма двух релевантных классов.

1.3 Центральной частью замысла Н.Гудмена является попытка задать на семействе всех релевантных классов $\Im$ числовую функцию $v_G : \Im \to Re$ такую, чтобы $v_G(\mathbf{K})$ можно было рассматривать как числовой показатель сложности класса $\mathbf{K} \in \Im$. Руководящая идея для выбора такой функции заключалась в том, чтобы такая функция удовлетворяла следующему набору интуитивно приемлемых требований. Если обозначить для краткости записи свойство иррефлексивности n-местного предиката через *ирр.*, свойство самополноты — *сам.* и через $[n - \textit{мест.}]$ — класс моделей, в сигнатуре которого один n-местный предикат, то эти требования таковы:

рокое множество, чем указываемое нами. Однако это отличие носит чисто технический характер и не влияет на ход наших рассуждений. С другой стороны, точное следование гудменовскому оригиналу излишне загромоздило бы изложение.

— если релевантный класс моделей $\mathbf{K} = [1 - \textit{мест.}]$, то $v_G(K) = 1$;

— если $\mathbf{K} = [1 - \textit{мест.}]$, а $\mathbf{L}$ — произвольный релевантный класс непустой сигнатуры, содержащий хотя бы одну модель, не все отношения которой логические[3], то $v_G(\mathbf{K}) \leq v_G(\mathbf{L})$;

— если $\mathbf{K} = [2 - \textit{мест.}]$, $\mathbf{L} = [2 - \textit{мест.}; \textit{ирр.}]$, то $v_G(\mathbf{K}) = v_G(\mathbf{L}) + 1$;

— если $\mathbf{K} = [2 - \textit{мест.}; \textit{ирр.}; \textit{сам.}]$, $\mathbf{L} = \langle 1 - \textit{мест.} \rangle$, то $v_G(\mathbf{K}) = 2v_G(\mathbf{L})$;

— если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — произвольные релевантные классы и класс $\mathbf{K}$ *заменим* классом $\mathbf{L}$, то $v_G(\mathbf{K}) \leq v_G(\mathbf{L})$;

— если $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ — произвольные релевантные классы и $\mathbf{K} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$, то $v_G(\mathbf{K}) = v_G(\mathbf{L}_1) + v_G(\mathbf{L}_2)$;

— если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — произвольные релевантные классы, то $v_G(\mathbf{K}) \leq v_G(\mathbf{K} \cup \mathbf{L})$;

— если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — произвольные релевантные классы, то $v_G(\mathbf{K} \cap \mathbf{L}) \leq v_G(\mathbf{K})$;

— если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — произвольные релевантные классы, то $v_G(\mathbf{K}) < v_G(\mathbf{L}) \Rightarrow v_G(\mathbf{L}) = v_G(\mathbf{L} \setminus \mathbf{K})$;

— если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — произвольные релевантные классы, то $v_G(\mathbf{K}) \leq v_G(\mathbf{L}) \Rightarrow v_G(\mathbf{K} \cup \mathbf{L}) = v_G(\mathbf{L})$;

— если $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — произвольные релевантные классы, то $v_G(\mathbf{K}) < v_G(\mathbf{K} \cup \mathbf{L}) \Rightarrow v_G(\mathbf{K} \cup \mathbf{L}) = v_G(\mathbf{L})$.

Для примера приведем теоремы, устанавливающие значения сложности для некоторых релевантных классов:

— $v_G([n - \textit{мест.}, \textit{ирр.}]) = 2n - 1$;

— $v_G([n - \textit{мест.}, \textit{ирр.}, \textit{сам.}]) = n$;

— $v_G([n - \textit{мест.}]) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=0}^{k} \dfrac{(-1)^l l(2k-1)(k-l)^n}{l!(k-l)!}$.

Таким образом, каждому релевантному классу моделей приписывается числовое значение сложности. Значение сложности произвольного класса моделей можно оценить через значение сложности минимального по объему релевантного класса моделей, которому оцениваемый класс принадлежит, а именно, под

---

[3]Гудмен называет *логическим* всякое отношение, явно определимое в терминах равенства.

сложностью $v_G(\mathbf{I})$ произвольного класса моделей **I** конечной предикатной сигнатуры предлагается понимать сложность наименее сложного релевантного класса, всё ещё охватывающего этот класс:

$$v_G(\mathbf{I}) = min\{v_G(\mathbf{K})|\mathbf{K} \supset \mathbf{I}, \mathbf{K} - \textit{релевантный класс моделей}\}.$$

Технические детали подробно изложены Н.Гудменом в его позднейшей работе "The Structure of Appearance" [5]. Современное изложение основных принципов подхода Н.Гудмена можно найти в статье автора "Сложность "экстралогического базиса системы" по Гудмену и сложность научной теории" [3]. Данный подход позволяет оценить значение сложности класса моделей произвольной теории первого порядка конечной сигнатуры.

2. Концептуальное богатство подхода Н.Гудмена к измерению сложности множества внелогических понятий теории было признано большинством как его критиков, так и сторонниками этого подхода. Следует отметить один факт. Если мы имеем две конкурирующих гипотезы — h_1 и h_2, одинаково хорошо согласующиеся с опытными данными, то для выбора простейшей из этих двух гипотез достаточно оценить простоту внелогических терминов каждой из гипотез. И этого по сути уже достаточно для оказания предпочтения одной из них. Потому что вопрос о способе формулировки этих гипотез является вопросом об удобстве и понятности, т.е. этот вопрос носит сугубо прагматический характер. Тем не менее для практикующих исследователей эти аспекты устройства теории могут иметь существенное значение. С более простой в этом контексте теорией легче работать. Метод Н.Гудмена позволяет оценить значение сложности целого класса теорий, как равносильных, так и различающихся между собой логической силой теорий. Логически более сильная теория является и более содержательной теорией. В прагматическом отношении она и более сложна. Использование метода Н.Гудмена указанным выше способом приводит нас к тому, что в большинстве случаев мы будем приписывать таким теориям одно и то же значение сложности.

Пусть, например, S_1 и S_2 две элементарных теории в языке, содержащем два одноместных предикатных символа P и Q.

Пусть S_1 не имеет внелогических аксиом, а единственная внелогическая аксиома теории S_2 — это формула

$$\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)).$$

Очевидно, что теория S_2 является более содержательной, чем теория S_1 и класс моделей теории S_2 является подклассом класса моделей теории S_1, а вместе с тем они имеют одинаковое значение сложности. Этот пример и показывает, что мера сложности по Н.Гудмену позволяет оценивать сверху структурную сложность целого класса теорий, в случае когда они имеют одни и те же внелогические термины. Необходимо также отметить один важный аспект подхода Н.Гудмена. Этот метод, используемый вышеуказанным образом, позволяет оценивать сверху значение сложности не собственно теории, а класса моделей этой теории. Естественным является желание различать сложность класса моделей теории и сложность самой теории, что позволит отличать по сложности различные по содержательной силе теории.

Попытаемся применить аналогичные методу Н.Гудмена соображения к множеству внелогических аксиом теории.

3. Каждое утверждение теории носит содержательный характер. Термины, используемые в утверждениях теории, могут отличаться между собой относительно их содержательности. Ясно, что двухместный термин теории содержательнее одноместного, трехместный термин содержательнее двухместного и т.д. В том же отношении порядка они располагаются и по их степени сложности и поэтому, если мы хотим оценить содержательную сложность какого-либо утверждения, необходимо учитывать содержательную (а в данном случае она и структурная) сложность каждого термина, используемого в утверждении. Однако одно и тоже содержание может быть передано множеством эквивалентных (относительно вывода) предложений. Естественно полагать, что самое простое из всех эквивалентных утверждений то, в котором используется минимальное количество слов. Оценка значения сложности этого утверждения и будет характеризовать содержательную сложность этого множества предложений.

Пусть L — язык первого порядка конечной сигнатуры Ω и T — произвольная аксиоматическая теория этого языка. Рассмотрим произвольное утверждение ψ теории T. Пусть $\Phi =$

$= \{\phi_1, \dots, \phi_n, \dots\}$ — множество всех эквивалентных ψ относительно вывода формул и пусть ψ_1 и ψ_2 формулы из множества формул Φ.

Будем полагать *структурно более простой* из этих двух формул ту, которая содержит наименьшее количество вхождений предикатов (под количеством вхождений предикатов в формулу будем понимать здесь возможное количество использований каждого предиката). Это вполне естественное, как было сказано выше, предположение. Естественно также полагать при этом, что чисто логические средства (скобки, логические символы и т.д.), являющиеся общими для всех теорий первого порядка, в учет не принимаются.

Установим отношение сложности между двумя такими формулами. Для этого необходимо каждой формуле сопоставить число, характеризующее ее сложность.

Основные принципы установления такого соответствия будут следующими. Во-первых, будем полагать, что сложность утверждения зависит от сложности входящих в него терминов и, во-вторых, что сложность утверждения зависит от количества входящих в него терминов. Таким образом, будем учитывать два фактора — содержательность, а следовательно и сложность каждого термина и экономичность предложения в целом.

Самый простой способ приписать значение сложности формуле аксиоматической системы — способ, аналогичный оценке сложности класса интерпретаций множества внелогических терминов по Гудмену. Согласно этому способу будем полагать, что если $\{P^{j_1}_{i_1}, \dots, P^{j_m}_{i_m}\}$ есть множество всех вхождений предикатов в формулу ϕ и если обозначить через $v_G(P^{j_k}_k)$ значение сложности класса моделей, в сигнатуре которого единственный предикат $P^{j_k}_k$, то значение сложности формулы ϕ можно определить следующим образом: $v_f(\phi) = \sum_{k=i_1}^{i_m} v_G(P^{j_k}_k)$.

Таким образом, из двух эквивалентных формул, с помощью предложенной процедуры измерения, всегда можно выбрать структурно более простую. Наименьшая по сложности формула из всего множества формул Φ и будет характеризовать *содержа-*

тельную сложность каждого из этих утверждений. Здесь необходимо указать отличительные характеристики понятия содержательной сложности для прояснения дальнейшего изложения. Для этого необходимо определить некоторые понятия.

4. Пусть L — язык сигнатуры Ω и пусть T — элементарная теория в этом языке, $A \subseteq T$ есть множество внелогических аксиом, порождающих теорию $T = Th(A)$.

Важным случаем консервативных расширений элементарной теории является так называемое расширение теории с помощью определений или *дефинициальное* расширение. Определим это понятие. Рассмотрим два типа расширений элементарной теории.

Расширения первого типа. Пусть $T_1^{\Omega_1}$ — аксиоматическая система сигнатуры Ω_1; $x_1, \ldots, x_n$ — различные переменные из множества V переменных языка; Ψ формула теории $T_1^{\Omega_1}$ такая, что множество свободных переменных этой формулы

$$FV(\Psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Образуем теорию $T_2^{\Omega_2}$ добавлением к $T_1^{\Omega_1}$ нового n-местного символа P $(P \notin R_1)$ и новой нелогической аксиомы

$$\forall x_1 \ldots x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Psi(x_1, \ldots, x_n)),$$

которую назовем *определяющей аксиомой* для P. Здесь и дальше для краткости пишем $X \leftrightarrow Y$ вместо $X \to Y \& Y \to X$.

Назовем теорию $T_2^{\Omega_2}$ *расширением* $T_1^{\Omega_1}$ *первого типа.*

Расширения второго типа. Пусть $T_1^{\Omega_1}$ — аксиоматическая система сигнатуры Ω_1; $x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2$ — различные переменные из V; Ψ формула теории $T_1^{\Omega_1}$ такая, что $FV(\Psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n, y_1\}$ и выполняются следующие условия:

(i) $\forall x_1 \ldots x_n \exists y_1 \Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1) \in T(\Omega_1)$;

(ii) $\forall x_1 \ldots x_n \forall y_1 y_2 (\Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1) \& \Psi(x_1, \ldots, x_n, y_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 = y_2)$.

Образуем теорию $T_2^{\Omega_2}$ добавлением к $T_1^{\Omega_1}$ нового n-местного функционального символа f $(f \notin F_1)$ и новой нелогической аксиомы:

$$\forall x_1 \ldots x_n \forall y (y = f(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Psi(x_1, \ldots, x_n, y)),$$

которую назовем *определяющей аксиомой* для f. Будем называть выражение (i) *условием существования*, а выражение (ii) — *условием единственности* для f, а теорию $T_2^{\Omega_2}$ — *расширением второго типа.*

Указанные определяющие аксиомы для P и f называются так же *явными определениями* n–местного предикатного символа P и n–местного функционального символа f соответственно.

Теория $T_2^{\Omega_2}$ называется *расширением теории с помощью определений* (*дефинициальным расширением* теории $T_1^{\Omega_1}$), если $T_2^{\Omega_2}$ получается из $T_1^{\Omega_1}$ конечным числом расширений первого и второго типа.

В связи с необходимостью сопоставления различных теорий относительно друг друга необходимо уточнить некоторые, используемые в дальнейшем термины.

Пусть T и S – произвольные элементарные теории конечных предикатных сигнатур. Будем говорить, что теория T *определяет* теорию S, если и только если существует теория V такая, что она является одновременно дефинициональным расширением теории T и консервативным расширением теории S.

Пусть Σ — класс всех элементарных теорий конечных предикатных сигнатур и пусть $S_1, S_2 \in \Sigma$.

Тогда, если S_1 определяет S_2, а S_2 определяет S_1, то мы говорим, что теории S_1 и S_2 являются *переопределениями* друг друга и будем писать $S_1 \sim S_2$.

Пусть $f : \Sigma \to Re$ – произвольная числовая характеристика теорий из Σ. Мы тогда и только тогда называем f *содержательной* характеристикой (или с-*характеристикой*), когда для любых $S_1, S_2 \in \Sigma$, если $S_1 \sim S_2$, то $f(S_1) = f(S_2)$.

В любом другом случае f называется *дескриптивной* характеристикой (или d-*характеристикой*).

Таким образом, если f есть числовая характеристика сложности, то будем различать две разновидности структурной сложности.

5. Определим содержательную сложность произвольного предложения ψ множества Φ следующим образом:

$$v_c(\psi) = min\{v_f(\phi_i),\ \text{где}\ \phi_i \in \Phi\}.$$

Предложенная процедура измерения содержательной сложности утверждения сталкивается с определенными трудностями. В случае, когда элементарная теория разрешима (это означает, что существует алгоритм, позволяющий по любому выражению ϕ теории T узнавать, является ли ϕ теоремой T или нет) можно построить необходимый алгоритм с конечным перебором формул. Например, если n_ϕ есть гёделевский номер формулы ϕ, то в силу того, что естественная гёделевская нумерация является монотонной относительно структурной сложности формул, вполне естественно, что эквивалентные формуле ϕ относительно вывода и более простые в нашем смысле формулы будут иметь меньший гёделевский номер. Это означает, что искомая формула вычислима за конечное число шагов. В общем же случае нахождение формулы с наименьшим количеством предикатов и эквивалентной относительно вывода данной является задачей алгоритмически не разрешимой. Тем не менее, важен факт, что формула, использующая наименьшее количество вхождений предикатов существует.

Как уже было сказано, каждая теория есть некоторая система утверждений. Все богатство утверждений теории, вся ее содержательная часть задается множеством внелогических аксиом.

Пусть L — язык конечной сигнатуры Ω и T — аксиоматическая система, порождаемая формулой ϕ (если аксиоматическая система задается конечным множеством аксиом, берем их конъюнкцию), т.е. дедуктивное замыкание формулы ϕ есть T или $T = Th(\phi)$.

Пусть также $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ — предполагаемое множество всех эквивалентных относительно вывода формул, порождающих аксиоматическую систему T.

Аналогичным образом, как в случае с содержательной сложностью отдельного предложения, определяем содержательную сложность теории T как $v_c(T) = min\{v_f(\phi_i),\ \text{где } \phi_i \in \Phi\}$.

Очевидно, что если оценивать содержательную сложность и отдельного предложения и теории в целом предложенным образом, то такая мера будет устойчивой относительно дефиниициальных расширений этой теории и следовательно это *с–характеристика.*

Пусть ψ произвольная формула из множества формул Φ, таких, что $T = Th(\psi)$. Будем полагать числовую характеристику $v_d(T) = v_f(\psi)$ *дескриптивной* характеристикой теории T, так как значение этой характеристики зависит от формулы $\psi \in \Phi$. Действительно, пусть ψ_1 и ψ_2 формулы из множества формул Φ и $v_f(\psi_1) \leq v(\psi_2)$. Тогда $v_d(Th(\psi_1)) \leq v_d(Th(\psi_2))$.

Отметим одно немаловажное свойство предлагаемой меры сложности.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Пусть S_1 и S_2 две равносильные теории. Тогда если $v_f(S_1) < v_f(S_2)$, то $v_G(S_1) \leq v_G(S_2)$, где v_G есть дескриптивная характеристика сложности по Н.Гудмену.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно. Если теория теория S_2 получена дефиницииальным расширением теории S_1, то теория S_2 будет содержать определяемые в ней термины, которых нет в S_1. В этом случае утверждение очевидным образом справедливо и если $v_f(S_1) < v_f(S_2)$, то и $v_G(S_1) < v_G(S_2)$. Если же отличие этих теорий состоит лишь в том, что в S_1 более простая аксиоматика, тогда $v_f(S_1) < v_f(S_2)$ и $v_G(S_1) = v_G(S_2)$.

Таким образом, показано, что оценка структурной сложности содержания теории есть более точная оценка. Легко показать, что обратное не верно. То есть из того, что $v_G(S_1) < v_G(S_2)$, не следует, что $v_f(S_1) < v_f(S_2)$, например, в случае, когда в аксиоматике S_1 очень громоздкая формула.

Учитывая сказанное, процедура выбора простейшей из двух альтернативных и равносильных гипотез S_1 и S_2 должна выглядеть следующим образом:

— если $v_G(S_1) < v_G(S_2)$, то выбираем S_1;

— если $v_G(S_1) = v_G(S_2)$, то сравниваем $v_f(S_1)$ и $v_f(S_2)$ и выбираем простейшую.

6. Предложенный способ измерения сложности формул теории позволяет оценить значение сложности как отдельного утверждения первопорядковой теории, так и теории в целом. Кроме того, мы можем различать эквивалентные утверждения по их дескриптивной сложности. Минимальное по значению сложности утверждение из всех эквивалентных утверждений характеризует содержательную сложность этого множества утверждений. Предлагаемый метод оценки дескриптивной сложности теории является в рассмотренном выше контексте более точным.В связи с этим еще раз отметим следующее обстоятельство. Сложность теории и сложность класса моделей этой теории, по мнению автора, являются различными понятиями. Оценка сложности теории через сложность класса моделей этой оказывается достаточно грубой, что показывает приведенный выше пример. Это происходит потому, что в свою очередь сложность класса моделей теории мы оцениваем сверху значением сложности класса интерпретаций внелогических терминов этой теории.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С., ЕРШОВ Ю.Л., САМОХВАЛОВ К.Ф. Введение в логику и методологию науки.– М., 1994.

2. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика. М., 1979.

3. ЧЕРЕПАНОВ Е.М. Сложность "экстралогического базиса системы" по Гудмену и сложность научной теории //Модели когнитивных процессов. – Новосибирск, 2001.– Вып.168: Вычислительные системы. – С.108–125.

4. GOODMAN N. Axiomatic Measurement of Simplicity// The Journal of Philosophy. – 1955. – Vol.LII, № 24. – P.709–722.

5. GOODMAN N. The Structure of Apperance. 3 ed. – Boston: Harward University Press., 1966.

6. GOODMAN N. Test of Simplicity//Sience.– 1958. – Vol.128, № 3331. – P. 1064-1069.

7. GOODMAN N. Recent Developments in the Theory of Simplicity // Philosophy and Phenomenological Research. – 1959.– № 19. – P. 429—446.

Поступила в редакцию
3 декабря 2004 года