АНАЛИЗ СТРУКТУРНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ
(Вычислительные системы)
2005 год Выпуск 174

УДК 519.863:519.853.2

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ БИЗНЕС-ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ ВЗАИМНО ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

Ю.А. Устюгов

Введение

В ходе любого бизнес-процесса осуществляется преобразование ресурсов (трудовых, интеллектуальных, материальных, природных, финансовых) в продукцию. В силу этого основной задачей экономико-математического анализа бизнес-процессов является определение условий оптимального применения ограниченных и имеющих определенную стоимость ресурсов. В статье на основе систематизации различных [1–14] подходов в решении указанной задачи сформулирован алгоритм определения и исследования оптимальных решений пары взаимно двойственных экономико-математических задач — исходной задачи линейного программирования и двойственной ей задачи. Алгоритм включает 19 этапов получения оптимальных решений и 10 процедур их экономико-математического исследования. Алгоритм предусматривает решение одной из двух взаимно двойственных задач. Оптимальное решение другой задачи определяется на основе полученного оптимального решения первой задачи. Алгоритм анализа бизнес-процесса нацелен на формирование данных для подготовки решений по его совершенствованию. После определения оптимальных решений пары взаимно двойственных задач, полученных при постоянных значениях параметров модели, проводится исследование устойчивости полученных решений при варьировании значений ее параметров. Анализ чувствительности оптимальных решений взаимно двойственных задач к изменению параметров экономико-математической модели бизнес-процесса иллюстрируется на результатах решения десяти взаимосвязанных оптимизационных экономико-математических задач параметрического линейного программирования. При этом исследована устойчивость оптимальных решений при изменении каждого из шести параметров модели по отдельности и при одновременном изменении двух, трех и четырех параметров.

1. Алгоритм получения оптимальных решений взаимно двойственных экономико-математических задач

Алгоритм определения оптимального решения взаимно двойственных экономико-математических задач предусматривает выполнение следующих этапов.

Этап 1. Определение исходных данных для оптимального решения пары взаимно двойственных задач:

$$n, m, A = ||a_{y}||_{m\times n}, \bar{b}, \bar{c}, \tag{1}$$

где n — число видов выпускаемой продукции; m — число видов используемых ресурсов; $A = ||a_y||_{m\times n}$ — матрица технологических параметров; $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_m)$ — количество запасенных ресурсов i, $i = \overline{1,m}$; $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_j, \ldots, c_n)$ — рыночные цены на продукцию j, $j = \overline{1,n}$.

Этап 2. Построение экономико-математической модели производственного процесса в виде исходной задачи линейного программирования в стандартной форме на основе результатов выполнения этапа 1:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{2}$$

при

$$\sum_{i=1}^{m} a_y x_j \leq b_i,\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $L(\overline{x})$ — выручка от продажи на рынке продукции, произведенной по плану $\overline{x}$. Выражение (3) определяет область $X_{\text{ДР}}$ допустимых решений $\overline{x}$ исходной задачи.

Решение исходной задачи (2)–(3) сводится к составлению такого оптимального плана производства $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_j^*, \ldots$ $\ldots, x_n^*)$, т.е. к отысканию такого набора чисел $x_j^* \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, определяющих оптимальные объемы производства, при реализации которых предприятие получает выручку $L^*_{\max} = L(\overline{x}^*) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j^*$, максимально возможную на заданном множестве исходных данных (1) при строгом соблюдении условий (3).

В ходе выполнения оптимального плана производства $\overline{x}^*$ часть запасенных ресурсов $\overline{b}$, — а именно потребленные ресурсы $\overline{b}_{\text{П}}(\overline{x}^*) = (b_{1\text{П}}, b_{2\text{П}}, \ldots, b_{i\text{П}}, \ldots b_{m\text{П}})$, — преобразуется в рыночные продукты. Оставшаяся часть запасенных ресурсов, — а именно $b_{i\text{О}}(\overline{x}^*) = b_i - b_{i\text{П}}(\overline{x}^*) \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, — составляет неиспользованную часть ресурсов $\overline{b}$ предприятия.

Этап 3. На основании исходных данных (1) и исходной задачи (2)–(3) построить экономико-математическую модель бизнес-процесса в виде двойственной задачи линейного программирования в стандартной форме:

$$S(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \tag{4}$$

при

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \ y_i \geq 0, \ j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

где y_i — стоимость единицы ресурса i, $i = \overline{1,m}$, внутри предприятия; $S(\overline{y})$ — стоимость запасенных ресурсов $\overline{b}$ по ценам $\overline{y}$. Выражение (5) определяет область $Y_{\text{ДР}}$ допустимых решений $\overline{y}$ двойственной задачи.

Оптимальное решение $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_i^*, \ldots, y_m^*)$ двойственной задачи — это такой набор чисел $y_i^* \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, т.е. такое решение $\overline{y}$ из множества допустимых $Y_{\text{ДР}}$, при котором стоимость $S(\overline{y})$ — минимальная из всех возможных $S^*_{\min} = S(\overline{y}^*) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i^*$. Оптимальное решение $\overline{y}^*$ двойственной задачи — система оптимальных внутрипроизводственных оценок y_i^* стоимости ресурсов i, $i = \overline{1, m}$, обеспечивающая неубыточность оптимального производственного плана $\overline{x}^*$, определяемого в результате решения исходной задачи,

$$L^*_{\max} = L_{\max}(\overline{x}^*) = \max_{\overline{x} \in X_{\text{ДР}}} \{L(\overline{x})\} = \max_{\overline{x} \in X_{\text{ДР}}} \sum_{j=1}^{n} c_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \min_{\overline{y} \in Y_{\text{ДР}}} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \min_{\overline{y} \in Y_{\text{ДР}}} \{S(\overline{y})\} = S_{\min}(\overline{y}^*) = S^*_{\min}. \quad (6)$$

При этом предприятию одинаково выгодно продавать на рынке как планово произведенную продукцию $\overline{x}^*$ по рыночным (внепроизводственным) ценам $\overline{c}$, так и производственные ресурсы $\overline{b}$ по внутрипроизводственным ценам $\overline{y}^*$ Именно в этом смысле двойственные оптимальные оценки стоимости ресурсов $\overline{y}^*$ гарантируют рентабельность оптимального плана производства $\overline{x}^*$.

Этап 4. Определить: какую из пары взаимно двойственных задач (исходную или двойственную) легче решить? Например, проще решать ту задачу, где меньше число переменных или неизвестные параметры экономико-математической модели находятся не в ее ограничениях (3), (5), а в ее целевой функции (см. § 3). При этом в последующем нужно будет решать только одну из двух взаимно двойственных задач, а оптимальное решение другой задачи можно получить на основе полученного оптимального решения первой задачи. Если принято решение: «решать исходную задачу», то перейти к выполнению этапа 5. В противном случае — перейти к выполнению этапа 12.

Этап 5. Получить оптимальное решение $\overline{x}^*$ исходной задачи графическим путем (при $n \geq 2$), аналитически, симплекс-методом или с помощью ЭВМ.

Этап 6. Получить максимальное значение целевой функции исходной задачи $L^*_{\max}$, подставив оптимальное решение $\overline{x}^*$ в формулу (2).

Этап 7. Определить на основе оптимального решения исходной задачи $\overline{x}^*$ в стандартной форме оптимальное решение

$\overline{x}^*_{\text{КФ}}$ исходной задачи в канонической форме $\overline{x}^*_{\text{КФ}} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, \ldots, x_j^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*, \ldots, x_{n+i}^*, \ldots, x_{n+m}^*)$, при этом значения m дополнительных неотрицательных переменных x_{n+i}^* определяются по формуле $x_{n+i}^* = b_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$.

Этап 8. Проанализировать оптимальное решение исходной задачи и определить:

- подмножество J_Π положительных компонент исходной задачи $x_j^* > 0$, $j \in J_\Pi$ и $x_{n+i}^* > 0$, $i \in J_\Pi$, которому соответствует подмножество нулевых компонент $y_{m+j}^* = 0$, $j \in J_\Pi$ и $y_i^* = 0$, $i \in J_\Pi$ оптимального решения двойственной задачи в канонической форме $\overline{y}^*_{\text{КФ}} = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_i^*, \ldots, y_m^*, y_{m+1}^*, y_{m+2}^*, \ldots, y_{m+j}^*, \ldots, \ldots, y_{m+n}^*)$; при этом значения n дополнительных неотрицательных переменных y_{m+j}^* определяются по формуле $y_{m+j}^* = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j, \quad j = \overline{1,n}$;
- подмножество J_0 нулевых компонент исходной задачи $x_j^* = 0$, $j \in J_0$ и $x_{n+i}^* = 0$, $i \in J_0$, которому соответствует подмножество положительных компонент $y_{m+j}^* > 0$, $j \in J_0$ и $y_i^* > 0$, $i \in J_0$ двойственной задачи в канонической форме $\overline{y}^*_{\text{КФ}}$.

Определение подмножеств J_Π и J_0 осуществляется по следующим правилам:

- для подмножества J_Π : если $x_j^* > 0$, то $y_{m+j}^* = 0$, при этом стоимость $S_{j\Pi}$ потребленных ресурсов при производстве единицы продукции j равна ее рыночной стоимости, т.е. $S_{j\Pi} = c_j$; если $x_{n+i}^* > 0$, то $y_i^* = 0$, при этом $b_i > b_{i\Pi}$, $b_{iO} > 0$;
- для подмножества J_0 : если $x_j^* = 0$, то $y_{m+j}^* > 0$, при этом $S_{j\Pi} > c_j$; если $x_{n+i}^* = 0$ то $y_i^* > 0$, при этом $b_i = b_{i\Pi}$, $b_{iO} = 0$.

Этап 9. Получить оптимальное решение $\overline{y}^*$ двойственной задачи путем решения системы уравнений:

$$y_i^* = 0, \; i \in J_\Pi; \; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j, \; j \in J_\Pi. \tag{7}$$

Оптимальные цены $\overline{y}^*$ на ресурсы i, $i = \overline{1,m}$, характеризуют скорость изменения максимальной выручки предприятия $L^*_{\max}$ при изменении запаса ресурса i на одну единицу $(\Delta b_i = 1)$. При этом существенным является то, что цена y_i^* на ресурс i выражается в единицах ценности выпускаемой продукции, т.е. единицах измерения критерия оптимальности $L_{\max}^*$ исходной задачи.

Компоненты y_i^* оптимального решения $\overline{y}^*$ имеют предельный характер, определяют верхний предел цен y_i^* на ресурс i, $i = \overline{1,m}$, которые предприятие согласно заплатить за дополнительные количества Δb_i ресурса i. При этом сохраняется оптимальное решение $\overline{y}^*$ двойственной задачи и рентабельность производства, что обеспечивает оптимальность решений $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$ пары взаимно двойственных задач.

Этап 10. Получить минимальное значение целевой функции двойственной задачи $S_{\min}^*$, подставив оптимальное решение $\overline{y}^*$ в формулу (4). Убедиться в том, что $S_{\min}^* = L_{\max}^*$, где значение $L_{\max}^*$ — результат выполнения этапа 6.

Этап 11. Определить оптимальное решение двойственной задачи в канонической форме $\overline{y}_{\text{КФ}}^*$ на основе оптимального решения двойственной задачи $\overline{y}^*$ в стандартной форме.

Далее выполняется заключительный этап алгоритма (этап 19).

$\Rightarrow$ Переход с этапа 4, когда решено, что найти оптимальное решение двойственной задачи $\overline{y}^*$ проще, чем определить оптимальное решение $\overline{x}^*$ исходной задачи. При этом считается, что после нахождения $\overline{y}^*$ оптимальное решение исходной задачи $\overline{x}^*$ будет определено с использованием $\overline{y}^*$ без решение исходной задачи. Заметим, что взаимно двойственные задачи имеют оптимальные решение $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$, когда одна из задач имеет оптимальное решение или области допустимых решений этих задач одновременно являются непустыми множествами.

Этап 12. Получить оптимальное решение $\overline{y}^*$ двойственной задачи графическим путем (при $n \leq 2$), аналитически, симплекс-методом или с помощью ЭВМ.

Этап 13. Получить минимальное значение целевой функции двойственной задачи $S_{\min}^*$, подставив оптимальное решение $\overline{y}^*$ в формулу (4).

Этап 14. Определить на основе оптимального решения двойственной задачи $\overline{y}^*$ в стандартной форме оптимальное решение двойственной задачи в канонической форме $\overline{y}_{\text{КФ}}^*$.

Этап 15. Проанализировать оптимальное решение $\overline{y}^*_{\text{КФ}}$ двойственной задачи и определить:

• подмножество $I_{\text{П}}$ положительных компонент двойственной задачи $y_i^* > 0$, $i \in I_{\text{П}}$ и $y^*_{m+j} > 0$, $j \in I_{\text{П}}$, которым соответствует подмножество нулевых компонент $x^*_{n+i} = 0$, $i \in I_{\text{П}}$ и $x_j^* = 0$, $j \in I_{\text{П}}$ оптимального решения исходной задачи в канонической форме $\overline{x}^*_{\text{КФ}}$;

• подмножество I_0 нулевых компонент двойственной задачи $y_i^* = 0$, $i \in I_0$ и $y^*_{m+j} = 0$, $j \in I_0$, которому соответствует подмножество положительных компонент $x^*_{n+i} > 0$, $i \in I_0$ и $x_j^* > 0$, $j \in I_0$ оптимального решения исходной задачи в канонической форме $\overline{x}^*_{\text{КФ}}$.

Определение подмножеств $I_{\text{П}}$ и I_0 осуществляется по следующим правилам:

• для подмножества $I_{\text{П}}$: если $y_i^* > 0$, и $x^*_{n+i} = 0$, при этом $b_i = b_{i\text{П}}$, $b_{i\text{О}} = 0$; если $y^*_{m+j} > 0$, то $x_j^* = 0$, при этом $S_{j\text{П}} > c_j$;

• для подмножества I_0 : если $y_i^* = 0$, то $x^*_{n+i} > 0$, при этом $b_i > b_{i\text{П}}$, $b_{i\text{О}} > 0$; если $y^*_{m+j} = 0$, то $x_j^* > 0$, при этом $S_{j\text{П}} = c_j$.

Этап 16. Получить оптимальное решение $\overline{x}^*$ исходной задачи путем аналитического решения уравнений:

$$x_j^* = 0,\ j \in I_{\text{П}};\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i,\ i \in I_{\text{П}}. \tag{8}$$

Этап 17. Получить максимальное значение целевой функции исходной задачи $L^*_{\max}$, подставив оптимальное решение $\overline{x}^*$ в формулу (2). Убедиться в том, что $L^*_{\max} = S^*_{\min}$.

Этап 18. Определить на основе оптимального решения $\overline{x}^*$ исходной задачи в стандартной форме оптимальное решение данной задачи в канонической форме $\overline{x}^*_{\text{КФ}}$.

Этап 19 (заключительный). Выполнить экономико-математическое исследование (см.§ 2) полученных оптимальных решений пары взаимно двойственных задач в стандартной форме $\overline{x}^*$, $L^*_{\max}$, $\overline{y}^*$, $S^*_{\min}$ и канонической форме $\overline{x}^*_{\text{КФ}}$, и $\overline{y}^*_{\text{КФ}}$.

2. Алгоритм экономико–математического исследования оптимальных решений взаимно двойственных задач

Экономико–математический анализ оптимальных решений пары взаимно двойственных задач является одним из основных этапов экономико-математического моделирования [14] и преследует две цели. Первая цель — дать экономическую интерпретацию полученных оптимальных решений:

$$\overline{x}^*,\ \overline{x}^*_{\text{КФ}},\ L^*_{\max}, \overline{y}^*,\ \overline{y}^*_{\text{КФ}},\ S^*_{\min}. \tag{9}$$

Вторая цель — исследовать чувствительность полученных оптимальных решений (9) к новым ограничениям и к изменению внутренних $(A, \overline{b}, n, m)$ и внешних $(\overline{c})$ параметров модели (см.§ 3) анализируемого бизнес-процесса.

Алгоритм экономико-математического исследования оптимальных решений пары взаимно двойственных задач предусматриваем последовательное выполнение следующих процедур.

→ *1. Анализ оптимального решения $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_j^*, \ldots, \ldots, x_n^*)$ исходной задачи в стандартной форме.* Компоненты решения $\overline{x}^*$ выражаются в единицах продукции j и определяют оптимальные объемы x_j^* производства продукции j, обеспечивающие максимум выручки предприятия $L^*_{\max}$ при продаже по рыночным ценам c_j, $j = \overline{1,n}$, выпущенной по оптимальному плану $\overline{x}^*$ продукции, произведенной при ресурсах $\overline{b}$. Любое иное решение $\overline{x} \neq \overline{x}^*$ приводит к неравенству $L_{\max}(\overline{x}^*) > L_{max}(\overline{x})$, т.е. к уменьшению выручки $L_{\max}$ предприятия. Оптимальное решение $\overline{x}^*$ — это, в конечном счете, оптимальное распределение запасенных ресурсов $\overline{b}$ между n способами производства.

ПРИМЕР 1. Оптимальное решение исходной задачи $\overline{x}^* = (0, 30, 10, 0)$ означает: лишь в результате производства продукции 2 в количестве $x_2^* = 30$ единиц, продукции 3 в количестве $x_3^* = 10$ единиц и непроизводстве продукции 1 и 4 предприятие будет иметь максимальную выручку $L^*_{\max} = 150$ ден.ед. от продажи продукции оптимального плана $\overline{x}^*$ по ценам рынка $\overline{c} = (3, 4, 3, 1)$.

→ *2. Анализ оптимального решения $\overline{x}^*_{\text{КФ}}$ исходной задачи в канонической форме.* Решение $\overline{x}^*_{\text{КФ}}$ включает оптимальные значения основных переменных x_j^* в решении $\overline{x}^*$ и оптимальные значения дополнительных переменных x_{n+i}^*, выраженных в единицах продукции j и определяемых на основе оптимального решения исходной задачи в стандартной форме $\overline{x}^*$ и исходных параметров (1). Оптимальные значения дополнительных переменных x_{n+i}^* исходной задачи определяют количества $b_{i0}(\overline{x}^*)$ ресурсов i, $i = \overline{1, m}$, оставшихся на предприятии после выполнения оптимального плана $\overline{x}^*$. Для дефицитных ресурсов эти величины равны нулю, для недефицитных — больше нуля. По сути оптимальные значения дополнительных переменных x_{n+i}^* определяют превышение запасов ресурсов над их оптимальными потребностями.

ПРИМЕР 2. Для условий примера 1 оптимальное решение исходной задачи в канонической форме $\overline{x}_{\text{КФ}}^* = (0, 30, 10, 0, 0, 200, 0)$ означает: оптимальное решение исходной задачи в стандартной форме имеет вид: $\overline{x}^* = (0, 30, 10, 0)$, т.е. включает первые четыре компоненты $\overline{x}_{\text{КФ}}^*$. Значения остальных трех компонент $x_5^* = 0$, $x_6^* = 200$, $x_7^* = 0$ определяют: ресурсы 1 и 3 — в дефиците, ресурс 2 — в избытке. При этом после реализации оптимального плана $\overline{x}^*$, т.е. оптимального потребления запасенных ресурсов $b_1 = 80$, $b_2 = 480$, $b_3 = 130$, ресурсы 1 и 3 будут использованы полностью, а ресурс 2 — лишь частично, т.е. $b_{2\text{П}} = 280$ *ед.*, а его остаток $b_{20} = 480 - 280 = 200$ *ед.*

→ *3. Определение максимального значения целевой функции исходной задачи* — выручки $L_{\max}^*$, которая выражается в денежных единицах и определяется оптимальным решением $\overline{x}^*$ по формулу (2) с учетом рыночных цен $\overline{c}$.

→ *4. Анализ оптимального решения $\overline{y}^*$ двойственной задачи в стандартной форме.* Компоненты решения $\overline{y}^*$ выражаются в единицах измерения целевой функции исходной задачи, т.е. в денежных единицах, определяют оптимальные внутрипроизводственные цены y_i^* на ресурсы i, $i = \overline{1, m}$, обеспечивающие минимум затрат $S_{\min}^*$ на запас ресурсов $\overline{b}$ и неубыточность оптимального производственного плана $\overline{x}^*$.

Оптимальные внутрипроизводственные цены $\overline{y}^*$ на ресурсы определяют их дефицитность и ценность. Использованный полностью запасенный ресурс b_i при выполнении оптимального плана $\overline{x}^*$, т.е. когда $b_i = b_{i\Pi}$, $b_{i0} = 0$, дефицитен и имеет положительную оптимальную внутрипроизводственную цену $y_i^* > 0$.

При превышении запаса ресурсов b_i над потребленным $b_{i\Pi}$ в ходе выполнения оптимального плана $\overline{x}^*$, т.е. при $b_i > b_{i\Pi}$, не полностью использованный запасенный ресурс b_i.при выполнении оптимального плана $\overline{x}^*$ является недефицитным и имеет нулевую внутрипроизводственную цену $y_i^* = 0$, при этом $x_{n+i}^* = b_{i0}$, $i \in [1, m]$. Наличие остатка $b_{i0} > 0$ свидетельствует о том, что при реализации оптимального плана $\overline{x}^*$ невыгодно использовать весь запасенный на предприятии ресурс b_i, выгодно конвертировать в готовую продукцию плана $\overline{x}^*$ лишь часть этого ресурса $b_{i\Pi} = b_i - b_{i0}$.

Результат работы предприятия зависит не только от количества запасенных ресурсов $\overline{b}$, но и от их распределения в соответствии с оптимальным планом производства $\overline{x}^*$. Реализация плана $\overline{x}^*$ не лимитирована недефицитными ресурсами $i \in [1, m]$. Недефицитные ресурсы i, для которых $y_i^* = 0$, имеют нулевую ценность.

Дефицитность ресурса i определяется способностью приносить дополнительный доход, увеличивать максимум выручки $L^*_{\max}$ а мера его влияния на $L^*_{\max}$ измеряется его положительной оптимальной внутрипроизводственной ценой y_i^*. При этом: чем больше значение y_i^* получилось в результате оптимального решения взаимно двойственных задач при анализе бизнес-плана, тем ресурс i более дефицитен.

Оптимальные цены на ресурс $\overline{y}^*$ позволяют не просто качественно оценить влияние каждого ресурса $i \in [1, m]$ на максимальный объем выручки $L^*_{\max}$, но и количественно взвесить относительную ценность каждого ресурса i, его вклад в увеличение максимума $L^*_{\max}$. Так, если полученная в ходе анализа бизнес-процесса внутрипроизводственная цена y_i^* дефицитного ресурса i мала, то значительному увеличению запаса данного ресурса будет соответствовать небольшое увеличение максимума выручки $L^*_{\max}$. Если же в ходе анализа бизнес-процесса внутрипроизводственная оптимальная цена ресурса y_i^* оказалась большой, то в этом случае даже незначительному увеличению запаса данного ресурса i будет соответствовать существенное увеличение максимальной выручки $L^*_{\max}$. Ценность такого ресурса велика.

Например, при дифференциации трудовых ресурсов по квалификации в оптимальном решении $\overline{y}^*$ каждая группа трудовых ресурсов (менеджеры, инженерно–технические работники, вспомогательный персонал) будет иметь свою ценность, т.е. оптимальные цены y^*_i, $i \in [1, m]$. Анализ этих цен может привести к выводу: незначительное увеличение вспомогательного персонала может дать больший прирост выручки предприятия, чем дополнительное привлечение основного персонала.

Заметим, что в оценке ценности ресурса i по величине его оптимальной цены y^*_i, $i \in [1, m]$ можно убедиться не только при увеличении запаса b_i ресурса i, но и при его уменьшении. В последнем случае скорость уменьшения величины $L^*_{\max}$ будет определяться той же ценностью данного ресурса y^*_i.

Оптимальные внутрипроизводственные цены запасенных ресурсов $\overline{y}^*$ гарантируют рентабельность выполнения оптимального плана $\overline{x}^*$. Всякий неоптимальный план — убыточен. В оптимальном плане предусматривается производство лишь неубыточной продукции j, для которой $x^*_j > 0$, при этом в вычислении убыточности и неубыточности продукции $j \in [1, n]$ используются оптимальные внутрипроизводственные цены y^*_i на ресурсы.

С математической точки зрения компоненты y^*_i, $i \in [1, m]$ оптимального решения двойственной задачи $\overline{y}^*$ определяют влияние количества b_i запасенного ресурса i на величину оптимального значения целевой функции исходной задачи. В связи с этим появляется возможность исследовать чувствительность к изменениям компонент $\overline{b}$ величины максимума выручки $L^*_{\max}$ через значения компонент y^*_i оптимального решения $\overline{y}^*$. При этом практический интерес представляет определение допустимого диапазона изменения количества $b_i \in [b_{i\min}, b_{i\max}]$ запасенного ресурса $i \in [1, m]$, при котором оптимальное решение двойственной задачи $\overline{y}^*$, — а значит и оптимальное решение исходной задачи $\overline{x}^*$, — сохраняются. Оптимальные внутрипроизводственные цены на ресурсы позволяют рассчитать рациональные нормы замены для взаимозаменяемых ресурсов.

Таким образом, оптимальные решения $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$ взаимно увязывая различные внешние и внутренние параметры и экономико-математические характеристики анализируемого бизнес-процесса, позволяют исследовать чувствительность экстремальных значений целевых функций исходной задачи $L^*_{\max}$ и двойственной задачи $S^*_{\min}$ к изменениям исходных данных, а значит и к запасенным ресурсам $\overline{b}$.

ПРИМЕР 3. Для условий примеров 1–2 оптимальное решение двойственной задачи в стандартной форме $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (4/3,\ 0,\ 1/3)$ означает, что ресурсы 1 и 3 дефицитны, их оптимальные внутрипроизводственные цены в денежных единицах $y_1^* = 4/3$, $y_3^* = 1/3$ и увеличение запасов $b_1 = 80, b_3 = 130$ на одну единицу приведет к росту максимальной выручки $L^*_{\max}$ на $4/3$ и $1/3$ денежных единиц соответственно. Следовательно наибольшим инновационным потенциалом для анализируемого бизнес-процесса обладает первый ресурс: его потенциал ($y_1^* = 4/3$) в четыре раза выше чем у третьего ресурса ($y_3^* = 1/3$). Ресурс 2 недефицитен, он в избытке, увеличение данного ресурса на единицу не изменит максимальную выручку $L^*_{\max}$ так как не использованы оставшиеся 200 единиц ресурса 2, и поэтому его оптимальная цена $y_2^* = 0$.

→ *5. Анализ оптимального решения* $\overline{y}^*_{\text{КФ}}$ *двойственной задачи в канонической форме.* Решение $\overline{y}^*_{\text{КФ}}$ включает оптимальные значения основных переменных y_i^* (оптимальное решение двойственной задачи в стандартной форме $\overline{y}^*$) и оптимальные решения дополнительных переменных y^*_{m+j}, выраженных в единицах измерения целевой функции исходной задачи, т.е. в денежных единицах. Последние определяются на основе оптимального решения двойственной задачи в стандартной форме и исходных параметров модели (1). Оптимальные значения дополнительных переменных двойственной задачи y^*_{m+j} определяют превышение затрат на производство единицы продукции j над их рыночной ценой c_j. Другими словами, оптимальные значения дополнительных переменных двойственной задачи y^*_{m+j} определяют степень нерентабельности производства продукции j, $j = \overline{1,n}$, соответственно.

ПРИМЕР 4. Для условий примеров 1–3 оптимальное решение двойственной задачи в канонической форме $\overline{y}^*_{\text{КФ}} = (4/3, 0, 1/3, 7, 0, 0, 29/3)$ означает, что оптимальное решение двойственной задачи в стандартной форме имеет вид $\overline{y}^* = (4/3, 0, 1/3)$, т.е. включает первые три компоненты $\overline{y}^*_{\text{КФ}}$. Из значений остальных четырех компонент: $y_4^* = 7$, $y_5^* = 0$, $y_6^* = 0$, $y_7^* = 29/3$ следует, что производство продукции 1 и 4 убыточно, отсюда $x_1^* = 0$, $x_4^* = 0$, и степень нерентабельности способов производства 1 и 4: $y_4^* = 7$, $y_7^* = 29/3$. То, что $y_5^* = 0$, $y_6^* = 0$, говорит о нулевой нерентабельности, т.е. рентабельности способов производства продукции 2 и 3. В связи с этим, их производство предусматривается в оптимальном плане: $x_2^* = 30$, $x_3^* = 10$.

→ *6. Определение минимального значения целевой функции двойственной задачи* — расходов $S^*_{\min}$ на запас $\overline{b}$ ресурсов i, $i \in \overline{1, m}$, выраженных в денежных единицах. Величина $S^*_{\min}$ определяется по формуле (7) оптимальными внутрипроизводственными ценами на ресурсы y_i^* (оптимальным решением $\overline{y}^*$).

ПРИМЕР 5. Для условий примеров 1–4 минимальные расходы на запас ресурсов $S^*_{\min} = 4/3 \cdot 80 + 0 \cdot 480 + 1/3 \cdot 130 = 150$. Равенство максимального значения $L^*_{\max}$ целевой функции исходной задачи минимальному значению $S^*_{\min}$ целевой функции двойственной задачи подтверждает оптимальность решений $\overline{x}^* = (0, 30, 10, 0)$ и $\overline{y}^* = (4/3, 0, 1/3)$ взаимно двойственных задач.

→ *7. Исследование возможности увеличения максимальной выручки $L^*_{\max}$ предприятия за счет увеличения запасов дефицитных ресурсов при постоянных рыночных ценах $\overline{c}$ и при одновременном изменении этих факторов* (приведено в § 3).

→ *8. Исследование возможности увеличения максимальной выручки $L^*_{\max}$ предприятия за счет увеличения номенклатуры* n (введения нового $(n+1)$-го способа производства) *выпускаемой продукции.*

Оптимальные внутрипроизводственные цены на ресурсы $\overline{y}^*$ — мера целесообразности введения в номенклатуру производства новой продукции. Действительно, если известны технологические параметры нового $(n+1)$-го способа производства a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = n+1$, и стоимость c_{n+1} единицы продукции $j = n+1$

на рынке, то, зная оптимальное решение $\overline{y}^*$ двойственной задачи при номенклатуре, включающей n видов продукции (оптимальные внутрипроизводственные цены y_i^* на ресурсы i, $i = \overline{1,m}$), можно дать ответ на вопрос о целесообразности введения новой продукции $(n+1)$-го вида в номенклатуру производимой предприятием продукции.

Так, если расходы на производство единицы новой продукции $(n+1)$-го вида выше ее рыночной цены c_{n+1}, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{in+1} \cdot y_i^* > c_{n+1}$, то новую продукцию $(n+1)$-го виде нецелесообразно вводить в номенклатуру производства предприятия. В результате $x_{n+1}^* = 0$, при этом прежде найденное оптимальное решение $\overline{x}^*$ для случая n видов продукции сохраняется: $\overline{x}_{(n)}^*$. В противном случае, если прибыль превышает затраты, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{in+1} \cdot y^* > c_{n+1}$, то новую продукцию $(n+1)$-го вида целесообразно ввести в оптимальную программу производства, но при этом оптимальное решение исходной задачи изменится $\overline{x}_{(n+1)}^* \neq \overline{x}_{(n)}^*$. В этом случае будет оптимально производить вместо $x_{j(n)}^*$ единиц продукции j $x_{j(n+1)}^*$ единиц этой продукции.

Другими словами, наряду с оптимальным решением $\overline{x}_{(n)}^*$, при котором максимальный объем выручки предприятия $L_{max}^* = L_{max}(\overline{x}_{(n)}^*)$, существует другое оптимальное решение $\overline{x}_{(n+1)}^*$ с большим максимальным значением целевой функции исходной задачи $L_{\max}(\overline{x}_{(n+1)}^*)$, т.е. $L_{\max}(\overline{x}_{(n+1)}^*) > L_{\max}(\overline{x}_{(n)}^*)$. Последнее говорит о целесообразности введения новой $(n+1)$-й продукции в номенклатуру производимой предприятием продукции.

→ 9. Исследование возможности увеличения максимальной выручки $L_{\max}^*$ предприятия за счет разумной частичной продажи либо приобретения ресурсов в зависимости от соотношения их оптимальных внутрипроизводственных $\overline{y}^*$ и рыночных $\overline{q}$ цен.

Ресурсы предприятия $\overline{b}$ могут пополняться (закупаться на рынке) при развитии производства (в ходе инновационного процесса) или продаваться на рынке. Эффективность указанных операций с ресурсами определяется в ходе сопоставления оптимальных внутрипроизводственных цен $\overline{y}^*$ на них с рыночными ценами на эти ресурсы $\overline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_m)$.

Если y_i^* — оптимальная внутрипроизводственная цена единицы ресурса $i \in [1, m]$, а q_i — рыночная цена единицы этого же ресурса, то при $y_i^* > q_i$ предприятию выгодно дополнительно приобрести небольшое количество Δb_i этого ресурса, не меняющее оптимальное решение двойственной задачи, т.е. величину y_i^*. При этом расходы на закупку ресурса i, т.е. $q_i \Delta b_i$, и возникающее при этом увеличение максимума выручки $\Delta L_{\max}^* = y_i^* \Delta b_i$ при $q_i < y_i^*$, $i \in [1, m]$, соотносятся следующим образом: $q_i \Delta b_i < < y_i^* \Delta b_i$. Вывод: если оптимальная внутрипроизводственная цена y_i^* на ресурс i, $i \in [1, m]$, выше его рыночной цены q_i, то рентабельно приобрести дополнительное количество Δb_i данного ресурса.

В противоположном случае, когда $y_i^* < q_i$, $i \in [1, m]$, предприятию выгодно избавиться от части ресурса i на величину Δb_i. При этом доход от продажи ресурса $q_i \Delta b_i$ превысит возникающее при этом снижение максимума $L_{\max}^*$ выручки предприятия от продажи продукции оптимального плана $\overline{x}^*$ по рыночным ценам $\overline{c}$, т.е. при $q_i > y_i^*$ справедливо неравенство: $q_i \Delta b_i > y_i^* \Delta b_i$.

Рациональное применение описанной выше процедуры с ресурсами i обеспечивает дополнительный доход предприятию в размере $\Delta L_{\max}^* = \Delta b_i |y_i^* - q_i|$, $i \in [1, m]$.

→ *10. Исследование влияния новых ограничений на полученные оптимальные решения пары взаимно двойственных задач* $\overline{x}^*$ *и* $\overline{y}^*$ предполагает подстановку решений $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$ в новое ограничение. Если новое ограничение на оптимальных решениях $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$ выполняется, то данное ограничение является избыточным. В противном случае пару взаимно двойственных задач нужно решать заново. Аналогично исследуется чувствительность оптимальных решений $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$ к устранению части ограничений, при которых они получены. При этом пассивные ограничения (они не участвуют в определении чисел $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$) не влияют на решения $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$ и изъятие этих ограничений из рассмотрения не меняет оптимальных решений. Активные ограничения существенны, так как непосредственно определяют оптимальные решения $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$. При изъятии из рассмотрения активных ограничений требуется заново определять оптимальные решения взаимно двойственных задач.

3. Исследование чувствительности оптимальных решений взаимно двойственных задач к изменению параметров бизнес–процесса

После определения оптимальных решений взаимно двойственных задач, полученных при постоянных значениях параметров модели, проводится исследование устойчивости полученных решений при варьировании значений её параметров. Исследование чувствительности оптимальных решений взаимно двоичных задач к изменению параметров экономико–математической модели бизнес–процесса проиллюстрируем на результатах решения десяти взаимосвязанных оптимизационных экономико–математических задач параметрического линейного программирования. При этом выполнен анализ устойчивости оптимальных решений при изменении каждого из шести параметров модели по отдельности и при одновременном изменении двух, трех и четырех параметров.

Рассмотрим задачу линейного программирования на максимум (2)–(3) при условиях: $m = 2$, $n = 2$ и двух дополнительных ограничениях на объемы производства: $x_1 - x_2 \le d_1$, $x_2 \le d_2$, позволяющих учесть результаты анализа спроса на продукцию 1 и продукцию 2 на рынке. Экономико–математическая модель, определенная в виде исходной задачи в стандартной форме в выражениях (2)–(3), в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$L(\overline{x}) = L(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max \tag{10}$$

при

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ &\qquad x_1 - x_2 \le d_1,\ x_2 \le d_2,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{11}$$

В таблице в строке 1 приведены результаты оптимального решения исходной задачи (10)–(11) при следующих исходных данных

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = 0.8,\ a_{12} = 0.5,\ a_{21} = 0.4,\ a_{22} = 0.8; \\ &b_1 = 400,\ b_2 = 365; \\ &d_1 = 100,\ d_2 = 350; \\ &c_1 = 16,\ c_2 = 14. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Т а б л и ц а

№ п/п	Направление экономико-математического параметрического исследования	Оптимальное решение		Максимум целевой функции			Изменение области допустимых решений								Изменение параметров целевой функции	
							Изменение параметра b_1		Изменение параметра b_2		Изменение параметра d_1		Изменение параметра d_2			
		x_1^*	x_2^*	$L(\overline{x}^*)$	$c_2x_1^*$	$c_2x_2^*$	b_1	А/П	b_2	А/П	d_1	А/П	d_2	А/П	c_1	c_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	Определить исходное оптимальное решение $\overline{x}_1^*$	312.5	300.0	9200.0	5000.0	4200.0	400.0	А	365.0	А	100.0	П	350.0	П	16.0	14
2	Определить оптимальное решение $\overline{x}_2^*$ при увеличении параметра b_1	370.8	270.8	9724.0	1932.8	3784.2	⋆ до 432.1	А	365.0	А	100.0	А	350.0	П	16.0	14
3	Определить оптимальное решение $\overline{x}_3^*$ при увеличении параметра b_2	281.2	350.0	9303.2	4483.2	4900.0	400.0	А	⋆ до 392.5	А	100.0	П	350,0	А	16.0	14
4	Определить диапазон изменения параметра d_1 при сохранении решения $\overline{x}_1^* = \overline{x}_4^*$	312.5	300.0	9200.0	5000.0	4200.0	400.0	А	365.0	А	⋆ от 12.5 до 500.0	П	350.0	П	16.0	14
5	Определить диапазон изменения параметра d_2 при сохранении решения $\overline{x}_1^* = \overline{x}_5^*$	312.5	300.0	9200.0	5000.0	4200.0	400.0	А	365.0	А	100.0	П	⋆ от 300.0 до 456.2	П	16.0	14
6	Определить диапазон изменения параметра c_1 при сохранении решения $\overline{x}_1^* = \overline{x}_6^*$	312.5	300.0	от 6387.5 до 11200.0	от 2187.5 до 7000.0	4200.0	400.0	А	365.0	А	100.0	П	365.0	П	⋆ от 7.0 до 22.4	14
7	Определить диапазон изменения параметра c_2 при сохранении решения $\overline{x}_1^* = \overline{x}_7^*$	312.5	300.0	от 8000.0 до 14600.0	5000.0	от 3000.0 до 9600.0	400.0	А	365.0	А	100.0	П	350.0	П	16.0	⋆ от 10 до 32
8	Определить оптимальное решение $\overline{x}_8^*$ при одновременном увеличении параметров b_1 и b_2	450.0	350.0	12100.0	7200.0	4900.0	⋆ до 535.0	А	⋆ до 460.0	А	100.0	А	350.0	А	16.0	14
9	Определить оптимальное решение $\overline{x}_9^*$ при одновременном увеличении параметров b_1, b_2 и d_1	850.0	350.0	18500.0	13600.0	4900.0	⋆ до 855.0	А	⋆ до 620.0	А	⋆ до 500.0	А	350.0	А	16.0	14
10	Определить оптимальное решение $\overline{x}_{10}^*$ при одновременном увеличении параметров b_1, b_2, d_1 и d_2	956.2	456.2	21687.5	15300.0	6387.5	⋆ до 993.1	А	⋆ до 747.4	А	⋆ до 500.0	А	⋆ до 465.2	А	16.0	14

Результаты исследования чувствительности оптимального решения исходной задачи (10)-(12) к изменению её параметров приведены в таблице в строках 2–10. В таблице

- в столбце 1 приводится номер задачи;
- в столбце 2 указаны цели исследования при решении задач 1–10;
- в столбцах 3–4 представлены оптимальные решения задач 1–10;
- в столбце 5 приведены максимальные значения целевой функции в задачах 1–10;
- в столбцах 6 и 7 указан вклад в общий доход производства продукции 1 и 2 соответственно;
- в столбцах 8,10,12,14 приведены значения параметров b_1, b_2, d_1, d_2 модели анализируемого бизнес-процесса (определяют область допустимых решений);
- в столбцах 9,11,13,15 отмечен статус ограничений (11) модели (в случае активности — А, в случае пассивности — П);
- в столбцах 16 и 17 приведены значения параметров c_1 и c_2 целевой функции модели анализируемого бизнес-процесса.

В строках таблицы приведены конечные результаты оптимального решения:

- в строке 2 — задачи 2 (увеличивается значение параметра b_1),
- в строке 3 — задачи 3 (увеличивается значение параметра b_2),
- в строке 4 — задачи 4 (увеличивается значение параметра d_1),
- в строке 5 — задачи 5 (увеличивается значение параметра d_2),
- в строке 6 — задачи 6 (увеличивается значение параметра c_1),
- в строке 7 — задачи 7 (увеличивается значение параметра c_2),
- в строке 8 — задачи 8 (одновременно увеличиваются значения параметров b_1 и b_2),
- в строке 9 — задачи 9 (одновременно увеличиваются значения параметров b_1, b_2 и d_1),

• в строке 10 — задачи 10 (одновременно увеличиваются значения параметров b_1, b_2, d_1 и d_2).

В ходе экономико-математического параметрического исследования значения величин x_1, x_2, d_1, d_2 измеряются в единицах продукции 1 и 2, значения величин $c_1, c_2, L(x)$, — а значит и $c_1 x_1^*$, $c_2 x_2^*$, — измеряются в денежных единицах.

Звездочкой ($\star$) в столбцах 8,10,12,14,16 и 17 отмечены элементы таблицы, в которых представлены границы предельно допустимых изменений отдельных параметров исследуемой в задачах 1–10 модели анализируемого бизнес-процесса. Так в задаче 2 (см.строку 2) изменение значения параметра b_1 от величины 400 до 432.1 привело к смене оптимального решения $\overline{x}_1^* = (312.5; 300.0) \to \overline{x}_2^* = (370.8; 270.8)$. В задаче 3 (см.строку 3) увеличение значения параметра b_2 от величины 365 до 392.5 привело к смене оптимального решения $\overline{x}_1^* \to \overline{x}_3^* = (281.2; 350.0)$. В задаче 8 (см.строку 8) одновременное увеличение параметра b_1 от значения 400 до величины 535 и параметра b_2 от величины 365 до значения 460 привело к смене оптимального решения $\overline{x}_1^* \to \overline{x}_8^* = (450; 350)$. В задаче 9 (см.строку 9) одновременное увеличение трех параметров модели — параметра b_1 от величины 400 до значения 855, параметра b_2 от величины 365 до значения 620 и параметра d_1 от значения 100 до величины 500 — привело к изменению оптимального решения $\overline{x}_1^* \to \overline{x}_9^* = (850; 350)$. В задаче 10 (см. строку 10) одновременное увеличение четырех параметров модели — параметра b_1 от значения 400 до величины 993.1, параметра b_2 от значения 365 до величины 747.4, параметра d_1 от значения 100 до величины 500 и параметра d_2 от значения 350 до величины 456.2 — привело к изменению оптимального решения $\overline{x}_1^* \to \overline{x}_{10}^* = (956.2; 456.2)$.

Данные таблицы подтверждают важный вывод: изменение запаса дефицитного ресурса всегда меняет оптимальное решение экономико-математической задачи. Так, результаты решения задач 1–3 и 8-10 показывают, что оптимальное решение задачи 1 меняется (оно чувствительно к изменению параметров экономико-математической модели) при увеличении значений параметров b_1, b_2, d_1, d_2, определяющих область допустимых решений $X_{\text{др}}$, до указанных выше величин. При этом значение максимума целевой функции, равное 9200 в задаче 1, возрастает (см.таблицу): в задаче 3 до величины 9383.2, в задаче 2 до величины 9724, в задаче 6 до величины 11200, в задаче 8 до величины 12100, в задаче 7 до 14600, в задаче 9 до величины 18500 и в задаче 10 до величины 21687.5. Изменение величины $L(\overline{x}^*)$ в задачах 6 и 7 связано с изменением значения параметра c_1 в задаче 6 от 7.0 до 22.4 и параметра c_2 в задаче 7 от 10.0 до 32.0.

Исследование чувствительности оптимального решения $\overline{x}_1^*$ к изменению параметров c_1, c_2, d_1, d_2 в задачах 4–7 позволило найти диапазон их допустимых изменений, при которых $\overline{x}_1^* = \overline{x}_4^* = \overline{x}_5^* = \overline{x}_6^* = \overline{x}_7^*$, т.е. оптимальное решение $\overline{x}_1^*$ задачи 1 не меняется. Так изменение параметра $d_1 \in (12.5; 500]$ в задаче 4, параметра $d_2 \in (300; 456.2]$ в задаче 5, параметра $c_1 \in (7; 22.4]$ в задаче 6 и параметра $c_2 \in (10; 32]$ в задаче 7 не меняет оптимальное решение $\overline{x}_1^*$. Другими словами, оптимальное решение $\overline{x}_1^*$ не чувствует изменение параметров c_1, c_2, d_1, d_2 в указанных диапазонах.

Литература

1. ЛОПАТНИКОВ Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. 5-е изд.,перераб. и доп. — М.: Дело,2003. — 520 с.

2. Экономико-математический энциклопедический словарь/ Гл.ред. Данилов-Данильян. - М.: Большая Российская энциклопедия: Изд.дом «ИНФРА-М», 2003. - 688 с.

3. ШАПКИН А.С., МАЗАЕВА Н.П. Математические методы и модели исследования операций: Учебник. - М.: Изд.торг.корп. «Дашков и К°», 2004. - 400 с.

4. Количественные методы в экономических исследованиях: Учебник для вузов/ Под ред. М.В.Грачёвой, Л.Н.Фадеевой, Ю.Н.Черемных. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. -791 с.

5. КУЗНЕЦОВ Б.Т. Математика: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000). 2-е изд.,перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 719 с.

6. КОСОРУКОВ О.А., МИЩЕНКО А.В. Исследование операций: Учебник/ Под ред. Н.П.Тихомирова. - М.: Экзамен, 2003. - 448с.

7. КРАСС М.С., ЧУПРЫНОВ Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании: Учебник. 3-е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 688 с.

8. ОРЕХОВ Н.А., ЛЁВИН А.Г., ГОРБУНОВ Е.А. Математические методы и модели в экономике: Уч.пособие для вузов/ Под ред. Н.А.Орехова. – М,: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 302 с.

9. ОРЛОВА И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач. – М.: Вузовский учебник, 2004. – 144 с.

10. КРАСС М.С., ЧУПРЫНОВ Б.П. Математика для экономистов: Учеб.пособие для студентов вузов по экономическим специальностям (060400, 060500, 060600, 351200). – СПб.: Питер, 2004. – 464 с.

11. ДОРОХИНА Е.Ю., ХАЛИКОВ М.А. Моделирование микроэкономики: Учеб.пособие / Под ред. Н.П.Тихомирова. – М.: Экзамен. – 2003. – 224 с.

12. БЕРЕЖНАЯ Е.В., БЕРЕЖНОЙ В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб.пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.

13. ФРОЛЬКИС В.А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2002. – 320 с.

14. УСТЮГОВ Ю.А. Методологические аспекты экономико-математического моделирования// Математические методы в прикладных исследованиях: Сб. научных трудов. Вып.2. – Новосибирск: НГУЭУ, 2005. – С.111-134.

Поступила в редакцию
30 декабря 2005 года