ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
РАБОТЫ СО ЗНАНИЯМИ:
ОБНАРУЖЕНИЕ, ПОИСК, УПРАВЛЕНИЕ
(Вычислительные системы)

2008 год Выпуск 175

УДК 510.67

МНОГОСОРТНАЯ ЛОГИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА И СЕМАНТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ПОНЯТИЙ [1]

Д.Ю. Власов[2]

1. Многосортная логика первого порядка

В этом разделе напоминаются основные понятия многосортной логики первого порядка [1]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многосортный язык L — это упорядоченная шестерка $\langle S, P, F, \nu, \mu, \kappa \rangle$, где

- S — множество сортов,
- P — множество предикатных символов,
- F — множество функциональных символов,
- $\nu : P \cup F \to \omega$ — отображение местности символов,
- $\mu : \bigcup\limits_{\sigma \in P \cup F} \{\sigma\} \times \nu(\sigma) \to S$ — отображение, сопоставляющее каждому аргументу символа его сорт,
- $\kappa : F \to S$ — отображение, сопоставляющее каждому функциональному символу сорт его значения.

Костанты в дальнейшем рассматриваются как 0-местные функциональные символы.

Для краткости будем опускать символы отображений ν, μ и κ из обозначений многосортного языка и писать просто $L = \langle S, P, F \rangle$.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-04003-НИИО-а), а также DFG project COMO, GZ: 436 RUS 113/829/0-1.

[2]e-mail: vlasov@academ.org

Понятие формулы многосортной логики первого порядка практически такое же, как и понятие формулы логики первого порядка, за исключением одного дополнительного условия: переменные также имеют сорта, и при построении формулы сорт переменных должен сохраняться при подстановках термов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многосортная (S–сортная) структура $\mathcal{M}$ многосортного языка $L = \langle S, P, F\rangle$ это пара: $\mathcal{M} = \langle\{M_s | s \in S\}, \nu\rangle$, где

• $dom(\mathcal{M}) = \{M_s | s \in S\}$ называется носителем или основным множеством структуры $\mathcal{M}$;

• отображение

$$\nu : P \cup F \to \bigcup_{k\in\omega} \bigcup_{(s_1,\dots,s_k)\in S^k} \mathcal{P}(M_{s_1} \times \ldots \times M_{s_k})$$

называется отображением интерпретации символов языка L (здесь $\mathcal{P}(X)$ — обозначение для булеана множества X). Значение $\nu(a), a \in P \cup F$ в дальнейшем будет обзначаться как $a^{\mathcal{M}}$;

• если $p \in P$, то $p^{\mathcal{M}} \subseteq M_{\mu(p,1)} \times \ldots \times M_{\mu(p,n)}$, где $n = \nu(p)$ — местность p, и $p^{\mathcal{M}}$ называется многоместным отношением на носителе $dom(\mathcal{M})$;

• если $f \in F$, то $f^{\mathcal{M}}$ — это график отображения $f^{\mathcal{M}} : M_{\mu(f,1)} \times \ldots \times M_{\mu(f,n)} \to M_{\kappa(f)}$, где $n = \nu(f)$ — местность символа f, и $f^{\mathcal{M}}$ называется многосортной операцией на носителе $dom(\mathcal{M})$.

Определение отношения истинности $\models$ между многосортными структурами и многосортными формулами первого порядка практически не отличается от односортного случая, с единственным ограничением, что переменные сорта s должны интерпретироваться элементами в множестве M_S .

В случае, когда одно из множеств P или F пусто, мы будем опускать его из обозначения для языка: $L = \langle S, P\rangle$ or $L = \langle S, F\rangle$.

2. Семантические системы понятий

Семантические системы понятий (conceptual semantic systems [3]) были введены К.Э. Вольфом для формализации различных пространственно–временных и других, связанных с абстрактным понятием "состояния", явлений в рамках формального анализа понятий [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть M — это множество, для каждого элемента $m \in M$ задан формальный контекст $\mathbb{S}_m = \langle G_m, N_m, I_m \rangle$ и $\mathfrak{B}(\mathbb{S}_m)$ — это соответствующая решетка формальных понятий. Пусть G это некоторое множество и κ такое отображение $\kappa : G \times M \to \bigcup\limits_{m \in M} \mathfrak{B}(\mathbb{S}_m)$, что $\kappa(g,m) \in \mathfrak{B}(\mathbb{S}_m)$.

Тогда четверка $\mathfrak{S} = \langle G, M, \{\mathfrak{B}(\mathbb{S}_m) | m \in M\}, \kappa \rangle$ называется семантической системой понятий , с семантическими шкалами $\{\mathbb{S}_m | m \in M\}$. Элементы множества M называются многозначными атрибутами, элементы множества G называются индексами примеров. Будем писать $m(g) = \kappa(g,m)$ для пары $m \in M$ и $g \in G$, а так же $M(G) = \{m(g) | g \in G\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathfrak{S} = \langle G, M, \{\mathfrak{B}(\mathbb{S}_m) | m \in M\}, \kappa \rangle$ — семантическая система понятий с семантическими шкалами $\mathbb{S}_m = \langle G_m, N_m, I_m \rangle, m \in M$, и пусть $int(c)$ обозначает интент понятия c. Тогда формальный контекст $K(\mathfrak{S}) = \langle G, N, J \rangle$, где $N = \{(m,n) | m \in M, n \in N_m\}$ и $J = \{(g,(m,n)) | n \in int(m(g)), g \in G, m \in M\}$ называется семантически–производным контекстом для $\mathfrak{S}$.

Решеткой формальных понятий для семантической системы понятий $\mathfrak{S}$ называется решетка поняий соответствующего семантически–производного контекста $K(\mathfrak{S})$ и обозначается как $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Семантическая система понятий $\mathfrak{S} = \langle G, M, \{\mathfrak{B}_m | m \in M\}, \kappa \rangle$ называется однозначной, если для любой пары элементов $g_1, g_2 \in G$, из того, что для каждого $m \in M$ верно $\kappa(g_1, m) = \kappa(g_2, m)$, следует $g_1 = g_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для любой семантической системы понятий $\mathfrak{S}$ существует такая однозначная семантическая система понятий $\mathfrak{S}'$, что решетки формальных понятий $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что если определить $\mathfrak{S}'$ как систему $\mathfrak{S}$, в которой для каждого класса одинаковых строк, различающихся только индексами, все кроме одной строки вычеркнуты, то для решеток формальных понятий $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ и $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}')$ одни и те же подмножества множества $N = \{(m,n)|m \in M, n \in N_m\}$ (в обозначениях определния семантически-производного контекста) будут задавать интенты понятий соответствующих решеток. $\square$

В сиду этого утверждения далее мы будем расматривать только однозначные семантические системы понятий.

3. Связь многосортных структур и семантических систем понятий

Зафиксируем семейство формальных контекстов $\mathbb{K}_s, s \in S$ вместе с множеством их индексов $K = \langle\{\mathbb{K}_s|s \in S\}, S\rangle$ и будем называть такие семейства S–индексированными семействами формальных контекстов. Индексы $s \in S$ в дальнейшем будут интерпретироваться как символы сортов. Также введем следующее обозначение: $\mathfrak{B}(K) = \{\mathfrak{B}(\mathbb{K}_s)|s \in S\}$.

Множество всех S–сортных структур языка L с носителем $\mathfrak{B}(K)$ будут обозначаться как $Str(\mathfrak{B}(K), L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\mathfrak{S} = \langle G, M, \{\mathfrak{B}_m|m \in M\}, \kappa\rangle$ – некоторая систематическая система понятий. Мы говорим, что система $\mathfrak{S}$ является системой над K, если $\{m_1, \dots, m_k\} = M \subset S$ и $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}(\mathbb{K}_m)$ для каждого $m \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\mathfrak{S} = \langle G, M, \{\mathfrak{B}_m|m \in M\}, \kappa\rangle$ – это систематическая система понятий над K и $M = \{m_1, \dots, m_n\}$. Определим ассоциированное с $\mathfrak{S}$ M–сортное n–арное отношение $Rel(\mathfrak{S})$, определенное на $\{\mathfrak{B}_{m_1} \dots \mathfrak{B}_{m_n}\}$, следующим образом:

- сорт переменной x_i этого отношения — это m_i для каждого $i \leq n$;
- для каждого кортежа $(c_1, \dots, c_n) \in \mathfrak{B}_{m_1} \times \dots \times \mathfrak{B}_{m_n}$, будем считать,что $(c_1, \dots, c_n) \in Rel(\mathfrak{S}) \Leftrightarrow \exists g \in G \;\; \forall i \leq n \;\; \kappa(g, m_i) = c_i$.

Если задано множество семантических систем понятий $\Sigma = \{\mathfrak{S}|j \in J\}$ над K, где $\mathfrak{S}^j = \langle G^j, M^j, \{\mathfrak{B}^j_m|m \in M^j\}, \kappa^j\rangle$, то мы будем считать, что соответствующие отношения $Rel(\mathfrak{S}^j)$ образуют S–сортную структуру $\mathcal{M}_\Sigma$ предикатного S–сортного языка

$L_\Sigma = \langle S, \{Pr_{\mathfrak{S}^j} | j \in J\}\rangle$ с носителем $\{\mathfrak{B}(\mathbb{K}_s) | s \in S\}$, в которой каждая систематическая система понятий $\mathfrak{S}^j$ является интерпретацией предикатного символа $Pr_{\mathfrak{S}^j}$ местности $\nu(Pr_{\mathfrak{S}^j}) = |M^j|$, с сортами переменных $\mu(Pr_{\mathfrak{S}^j}, i) = m_i^j$, где $\{m_1^j, \ldots, m_{|M^j|}^j\} = M^j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Множество Σ семантических систем понятий над K будем называть семантической понятийной структурой над K. Класс всех семантических понятийных структур над K обозначааеться $CSS(K)$ и называется семантическим понятийным классом над K.

Таким образом, в предыдущем определении мы построили отображение i из понятийного класса над K в класс всех S–сортных структур предикатного языка с носителем $\mathfrak{B}(K)$: $i : CSS(K) \to \bigcup\limits_{L=\langle S,P\rangle} Str(\mathfrak{B}(K), L)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Для каждого S-сортного отношения p с носителем $\mathfrak{B}(K)$, построим семаническую систему понятий $Css(p) = \langle G^p, M^p, \{\mathfrak{B}(\mathbb{K}_m) | m \in M\}, \kappa^p\rangle$ следующим образом:

- $M^p = \{m_i | i \le \nu(p)\}$ где $m_i = \mu(p, i)$,
- $G^p = p$,
- $\kappa^p(g, m_i) = c \Leftrightarrow g = (c_1, \ldots, c_n) \wedge c_i = c$.

Будем говорить, что две семантические системы понятий $\mathfrak{S}^1$ и $\mathfrak{S}^2$ (где $\mathfrak{S}^i = \langle G^i, M, \{\mathfrak{B}_m | m \in M\}, \kappa^i\rangle, i \in \{1, 2\}$) являются неразличимыми, если сущестует биективное отображение $\varphi : G_1 \to G_2$ такое что $\kappa^1(g^1, m) = \kappa^2(\varphi(g^1), m)$ для каждого $g^1 \in G^1$ и $m \in M$. В этом случае будем писать $\mathfrak{S}^1 \cong_* \mathfrak{S}^2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Для каждой систематическая системы понятий $\mathfrak{S}$ над K, и для каждого S-сортного отношения p с носителем $\mathfrak{B}(K)$ верно*

- $Css(Rel(\mathfrak{S})) \cong_* \mathfrak{S}$;
- $Rel(Css(p)) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Первое утверждение. Рассмотрим систематическую систему понятий $\mathfrak{S} = \langle G, M, \{\mathfrak{B}_m | m \in M\}, \kappa\rangle$ над K и пусть $M = \{m_1, \ldots \ldots, m_n\}$. Тогда, по определению отображения Rel, $Rel(\mathfrak{S})$ — это M–сортное $|M|$–местное отношение, носитель которого это $\{\mathfrak{B}_m | m \in M\}$ и для каждого $(c_1, \ldots, c_k) \in \mathfrak{B}_{m_1} \times \ldots \times \mathfrak{B}_{m_n}$, мы имеем, что $(c_1, \ldots, c_n) \in Rel(\mathfrak{S}) \Leftrightarrow \exists g \in G \;\; \forall i \le n \;\; \kappa(g, m_i) = c_i$.

Из определения отображения Css, мы имеем, что

$$Css(Rel(\mathfrak{S})) = \langle G^{Rel(\mathfrak{S})},\ M^{Rel(\mathfrak{S})}, \{\mathfrak{B}(\mathbb{K}_m)|m \in M\}, \kappa^{Rel(\mathfrak{S})}\rangle,$$

где

- $M^{Rel(\mathfrak{S})} = M$,
- решетки понятий $\mathfrak{B}_m$ те же самые что и в $\mathfrak{S}$,
- $G^{Rel(\mathfrak{S})} = Rel(\mathfrak{S})$,
- $\kappa^{Rel(\mathfrak{S})}(g, m_i) = c \Leftrightarrow g = (c_1, \dots, c_n) \wedge c_i = c$.

Определим отображение $\varphi : Rel(\mathfrak{S}) \to G$ следующим образом: $\varphi(c_1, \dots, c_n) = g$ такой, что $\forall i \leq n\ \ \kappa(g, m_i) = c_i$.

Такой g для каждого кортежа $(c_1, \dots, c_n)$ существует из определения отношения $Rel(\mathfrak{S})$. Также, такой элемент g будет единственным, поскольку иначе систематическая система понятий $\mathfrak{S}$ не будет однозначной. Отображение φ биективно, так как для любого $g \in C$, существует ровно один кортеж $(c_1, \dots, c_n)$ такой, что $\forall i \leq n\ \ \kappa(g, m_i) = c_i$.

Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что $\kappa^{Rel(\mathfrak{S})}((c_1, \dots, c_n), m) = c_i = \kappa(\varphi(c_1, \dots, c_n), m)$ для любого кортежа $(c_1, \dots, c_n) \in Rel(\mathfrak{S})$ и $m \in M$.

Второе утверждение. Пусть p это S–сортное n–местное отношение на $\mathfrak{B}(K)$. Тогда $Css(p) = \langle G^p, M^p, \{\mathfrak{B}(\mathbb{K}_m)|m \in M\}, \kappa^p\rangle$ определяется следующим образом:

- $M^p = \{m_i | i \leq \nu(p)\}$ где $m_i = \mu(p, i)$,
- $G^p = p$,
- $\kappa^p(g, m_i) = c \Leftrightarrow g = (c_1, \dots, c_n) \wedge c_i = c$.

Отношение $Rel(Css(p))$ — это M^p-сортное n-местное отношение на $\{\mathfrak{B}_m | m \in M^p\}$.Для каждого кортежа $(c_1, \dots, c_n) \in \in \mathfrak{B}m_1 \times \dots \times \mathfrak{B}m_n$, мы имеем следующую цепочку эквивалентностей: $(c_1, \dots, c_n) \in Rel(Css(p)) \Leftrightarrow \exists g \in G^p\ \forall i \leq n\ (\kappa^p(g, m_i) = = c_i) \Leftrightarrow \exists(c_1^{q'}, \dots, c_n') \in p\ \ \forall i \leq n\ \ (c_i' = c_i) \Leftrightarrow (c_1 \dots, c_n) \in p$. □

Для каждой S–сортной структуры $\mathcal{M}$ языка $L = \langle S, P\rangle$ с носителем $\mathfrak{B}(K)$, мы можем построить соответствующую понятийную структуру $\Sigma = \{Css(p^{\mathcal{M}})|p \in P\}$, и, по предложению 2, отображение i является биекцией с точностью до отношения эквивалентности $\cong_\star$ на понятийных структурах.

Структуру решеток понятий $\mathfrak{B}_S$, $s \in S$, также можно сохранить в S–сортной структуре $\mathcal{M}$ с носителем $\{\mathfrak{B}_S | s \in S\}$, обогащая язык L структуры $\mathcal{M}$ решеточными операциями $\wedge_S$, $\vee_S$ и отношением $\leq_S$ на каждой компоненте $\mathfrak{B}_S$.

4. Использование отображения i

В работе К.Э. Вольфа [5] вводятся понятия пространственно-временных семантических систем понятий таких, в которых в множестве многозначных атрибутов выделенно три специальных атрибута: P, T, L. Формальные понятия, соответствующие этим атрибутам называются обобщенными объектами, временными ячейками и пространственными ячейками соответственно. При помощи пространственно-временных семантических систем в работах [4–6] строятся математические модели движения объектов в пространстве и времени, объектов, распределенных в пространстве и времени, частиц и волн, а также соотношения неопределенности в квантовой механике.

Отображение $i : CSS(K) \to \bigcup\limits_{L=\langle S,P\rangle} Str(\mathfrak{B}(K), L)$, поскольку оно сохраняет структуру и является биективным, позволяет рассматривать семантические понятийные структуры (а также семантические понятийные системы как частный случай) как многосортные структуры первого порядка с носителем, состоящим из решеток понятий.

Таким образом, после подобного отождествления мы можем использовать многосортную логику первого порядка в приложениях к семантическим понятийным структурам, для описания их свойств и извлечения полезной информации, например в приложениях к пространственно–временным системам понятий.

ПРИМЕР.

Рассмотрим две пространственно–временные семантические системы понятий:

$\mathfrak{S}^1 = \langle G^1, \{P^1, T, L\}, \{\mathfrak{B}^1_P, \mathfrak{B}_T, \mathfrak{B}_L\}, \kappa^1\rangle$

и

$\mathfrak{S}^2 = \langle G^2, \{P^2, T, L\}, \{\mathfrak{B}^2_P, \mathfrak{B}_T, \mathfrak{B}_L\}, \kappa^2\rangle$.

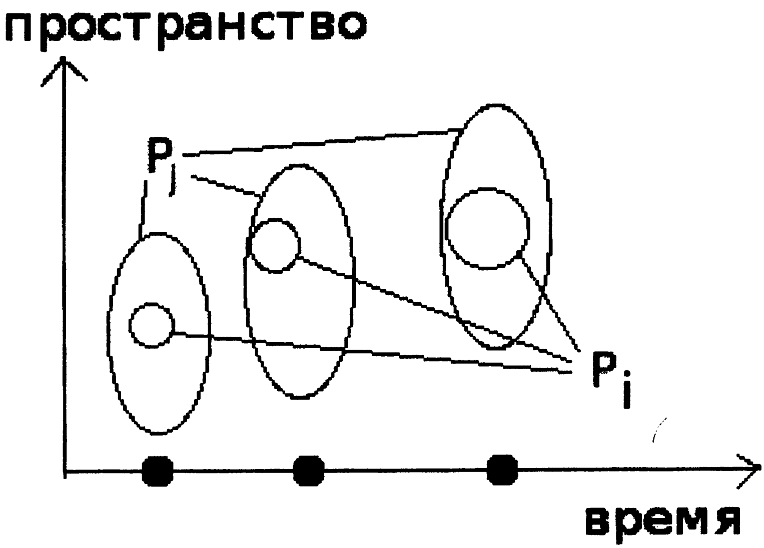
Тогда определена $\{P_1, P_2, T, L\}$–сортная структура $\mathcal{M} = i(\{\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^2\})$ языка $L = \{Pr_{\mathfrak{S}^1}(p_1, t, l), Pr_{\mathfrak{S}^2}(p_2, t, l), \leq_L, \perp_L\}$. Здесь строчные буквы обозначают переменные, соответстevющие заглавным буквам сортов этих переменных, $\leq_L$ — отношение частичного порядка в решетке $\mathfrak{B}_L$ и $\perp_L$ — наименьший элемент в той же решетке.

Определим следующие предложения языка L:

• $\Phi_i = \forall\ p_i \quad \exists\ p_j \quad \forall t \quad \forall\ l \quad (Pr_{\mathfrak{S}^i}(p_i, t, l) \rightarrow \exists\ l'((l \leq l') \wedge Pr_{\mathfrak{S}^j}(p_j, t, l')))$, где $i \neq j \in \{1, 2\}$

• $\Psi_i = \exists t \quad \forall\ p_i \quad Pr_{\mathfrak{S}^i}(p_i, t, \perp_L)$, $i \in \{1, 2\}$.

Смысл этих формул достаточно очевиден. Первое предложение говорит о том, что пространственно–временной пакет p_i может быть накрыт в пространстве некоторым пакетом p_j в каждый момент времени. Второе предложение говорит о том, что существует такой момент времени, что каждый пакет p_i расположен в точке "нигде" в пространстве.



Нетрудно видеть, что $\mathcal{M} \models \Phi_i \wedge \Psi_j$ логически влечет $\mathcal{M} \models \Psi_i$ для всех $i \neq j \in \{1, 2\}$, т.е. зная, что в паре систематических систем понятий $\mathfrak{S}^1$ и $\mathfrak{S}^2$ выполнены условия, соответствующие формулам Φ_i и Ψ_j, мы можем сделать логический вывод об истинности Ψ_i на систематической системе понятий $\mathfrak{S}^i$.

Л и т е р а т у р а

1. BARWISE J.,FEFERMAN S. Model-theoretic logics.– New-York: Springer-Verlag,1985.

2. GANTER B., WILLE R. Formal Concept Analysis: mathematical foundations.– Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.

3. WOLFF K.E. Basic notions in Temporal Conceptual Semantic Systems. The proceedengs of the international Conference on Formal Concept Analysis.– Clermont-Ferrland, 2007.

4. WOLFF K.E. States of Distributed Objects in Conceptual Semantic Systems. Lecture notes in Artificial Intelligence. Proceedings of the International Conference on Conceptual Strustures (ICCS).– Kassel, Germany, 2005.

5. WOLFF K.E. 'Particles' and 'Waves' as understood by Temporal Concept Analysis In: K.E. Wolff, HEather D. Pfeiffer, Harry Delugach (eds.): Conceptual Structures at Work, 12-th International Conference on Conceptual Strustures (ICCS 2004), University of Alabama in Huntsville, Huntsville, USA. Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence, LNAI 3127.– P. 126-141.

6. WOLFF K.E. Conceptual Representation of Particles, Waves and Heisenberg's Uncertainty Relation, International Journal of Computing Anticipatory Systems. - Liege, 2006.

Поступила в редакцию
24 апреля 2008 года