

УДК 517.2:517.51:517.98

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ДАРБУ НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

М. В. Коробков

Аннотация: Исследуются вопросы строения образа $\text{Im } f'$ производной всюду дифференцируемого отображения $f : \Delta \rightarrow X$, где X — метризуемое локально выпуклое пространство и Δ — область пространства $\mathbb{R}^n$. Для этой цели вводится следующее понятие: множество $U \subset X$ называется *слабо связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup_{t \in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что $U_t \neq U$,

$U_t \cap \text{cl}(U \setminus U_t) = \emptyset$ для каждого $t \in T$ и $U_{t_1} \cap \text{cl } \text{co } U_{t_2} = \emptyset$, если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 \neq t_2$. Доказана теорема о том, что образ $\text{Im } f'$ производной вышеописанного отображения является слабо связным множеством в пространстве X^n . При наложении некоторых дополнительных условий установлена и обратная теорема, а именно: если G — непустой слабо связный компакт в пространстве Фреше X , который является к тому же локально слабо связным множеством, то тогда G есть образ производной некоторого дифференцируемого отображения $f : [0, 1] \rightarrow X$. Специфику многомерного случая подчеркивает построенный пример дифференцируемой функции $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, образ производной которой является вполне несвязным компактом. Библиогр. 2.

Работа посвящена изучению образа $\text{Im } f'$ производной всюду дифференцируемого отображения $f : \Delta \rightarrow X$, где X — метризуемое локально выпуклое пространство и Δ — область (открытое связное множество) пространства $\mathbb{R}^n$. Главная цель работы заключается в отыскании необходимых и достаточных условий на множество $U \subset X^n$, с тем чтобы оно являлось образом производной такого рода отображения. В случае, когда $X = \mathbb{R}$ и $n = 1$, ответ на поставленный вопрос дает классическая теорема Дарбу, согласно которой образы производных дифференцируемых отображений $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ суть в точности связные подмножества $\mathbb{R}$. Однако если размерность пространства X больше 1, то охарактеризовать образ производной вектор-функции в терминах понятий связности не представляется возможным (здесь и далее под связностью или обычной связностью мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии). Это подтверждает построенный в статье пример дифференцируемого отображения $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, образ производной которого является вполне несвязным компактом (теорема 4).

Удачным инструментом для исследования строения образа производной вектор-функции оказывается введенное в работе понятие слабой связности множеств в локально выпуклых метризуемых пространствах (см. определение 1), совпадающее для подмножеств $\mathbb{R}$ с понятием обычной связности. С помощью

Работа выполнена при содействии РФФИ–INTAS (код проекта IR–97–0170), РФФИ (код проекта 99–01–00517), государственной программы поддержки ведущих научных школ (код проекта 96–15–96291), а также программы «Соросовские студенты» (грант s98–1045).

понятия слабой связности в данной статье получено следующее обобщение теоремы Дарбу на многомерный случай: образ $\text{Im } f'$ производной дифференцируемого отображения $f : \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$ является слабо связным множеством в пространстве X^n (теорема 1).

Второй из основных результатов работы — теорема 2 — в определенном отношении представляет собой обращение теоремы 1 и состоит в утверждении о том, что если G — непустой слабо связный компакт в пространстве Фреше X , который является к тому же локально слабо связным множеством, то тогда G есть образ производной некоторого дифференцируемого отображения $f : [0, 1] \rightarrow X$.

Перейдем к точным определениям и формулировкам.

Всюду в дальнейшем d_X — метрика на пространстве X , $\|x\|$ — норма вектора x (для векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ будем также использовать обозначение $|x|$), $B(x, r)$ — открытый шар радиуса r с центром в x . Расстояние $d_X(A, B)$ между подмножествами A, B метрического пространства X будем определять по формуле

$$d_X(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d_X(a, b).$$

Для подмножества U топологического векторного пространства X $\text{cl } U$ означает замыкание U , $\text{int } U$ — внутренность U , ∂U — границу U , $\text{co } U$ — выпуклую оболочку множества U .

Если U — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, то символом $|U|$ будем обозначать меру Лебега множества U .

Отображение $f : \Delta \rightarrow X$ в топологическое векторное пространство X области Δ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемым в точке* $y_0 \in \Delta$, если f можно представить в виде

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + |y - y_0|\alpha(y),$$

где $f'(y_0)$ есть линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в X и $\alpha(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow y_0$. Отображение называется *дифференцируемым*, если оно дифференцируемо в каждой точке своей области определения. В дальнейшем пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в X отождествляется естественным образом с пространством X^n , так что для $y \in \Delta$ считаем

$$f'(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^n} \right) \in X^n.$$

Пространство X^n наделяем естественной топологией произведения.

Излагаемые ниже результаты справедливы как для вещественных, так и для комплексных линейных пространств. Определяющую роль в рассматриваемых вопросах играет вещественная структура пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство. Множество $U \subset X$ называется *слабо связным*, если его нельзя представить в виде объединения $U = \bigcup_{t \in T} U_t$ семейства множеств U_t таких, что $U_t \neq U$, $U_t \cap \text{cl}(U \setminus U_t) = \emptyset$ для каждого $t \in T$ и $U_{t_1} \cap \text{clco } U_{t_2} = \emptyset$, если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 \neq t_2$.

Множества U_1, U_2 , для которых $U_1 \cap \text{clco } U_2 = \emptyset$ и $U_2 \cap \text{clco } U_1 = \emptyset$, мы будем называть в дальнейшем *сильно отделимыми*.

Отметим некоторые свойства введенных понятий:

- 1) всякое связное множество слабо связно;
- 2) замыкание слабо связного множества слабо связно;
- 3) пусть $(U_t)_{t \in T}$ — семейство слабо связных множеств, причем существует такое $t_0 \in T$, что для любого $t \in T$ множества U_{t_0} и U_t не являются сильно отделимыми; тогда объединение $\bigcup_{t \in T} U_t$ слабо связно;
- 4) образ слабо связного множества при непрерывном линейном отображении является слабо связным множеством;
- 5) компактное множество K является слабо связным в том и только том случае, когда его нельзя представить в виде объединения конечного семейства попарно сильно отделимых не совпадающих со всем K множеств;
- 6) для подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$ понятия слабой связности и связности эквивалентны.

Свойства 1–5 вытекают непосредственно из определения 1. Докажем свойство 6. Ввиду 1 достаточно доказать, что всякое несвязное множество $U \subset \mathbb{R}$ не является слабо связным. Действительно, пусть $U \subset \mathbb{R}$ несвязно. Тогда U не является выпуклым, т. е. существует число $x \notin U$ такое, что множества $U_1 = U \cap (-\infty, x)$ и $U_2 = U \cap (x, \infty)$ не пусты. Очевидно, $U = U_1 \cup U_2$, $U_i \cap \text{cl co } U_j = \emptyset$ при $i \neq j$. В соответствии с определением 1 множество U не является слабо связным.

Теорема 1 (обобщенная теорема Дарбу). Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство, и пусть $f : \Delta \rightarrow X$ — дифференцируемое отображение в X области Δ пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда образ $\text{Im } f'$ производной отображения f является слабо связным множеством в пространстве X^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть утверждение теоремы 1 неверно. Тогда имеет место разложение $\text{Im } f' = \bigcup_{t \in T} U_t$, где $U_t \neq \text{Im } f'$, $U_t \cap \text{cl}(\text{Im } f' \setminus U_t) = \emptyset$ для каждого $t \in T$ и $U_{t_1} \cap \text{cl co } U_{t_2} = \emptyset$, если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 \neq t_2$. Положим $V_t = \text{int } f'^{-1}(U_t)$ и $J = \Delta \setminus (\bigcup_{t \in T} V_t)$. Так как Δ — связное множество и $V_t \neq \Delta$ ни для одного $t \in T$, то $J \neq \emptyset$. Функция f' является функцией 1-го класса Бэра. По теореме Бэра ввиду того, что J замкнуто в Δ , существует точка $y_0 \in J$, в которой сужение $f'|_J$ непрерывно (мы полагаем, как это и принято, что отображение непрерывно во всякой изолированной точке области определения). Из представления $\text{Im } f' = \bigcup_{t \in T} U_t$ вытекает, что $f'(y_0) \in U_{t_0}$ для некоторого $t_0 \in T$. Равенство $U_{t_0} \cap \text{cl}(\text{Im } f' \setminus U_{t_0}) = \emptyset$ эквивалентно открытости множества U_{t_0} относительно $\text{Im } f'$. В силу непрерывности $f'|_J$ в точке y_0 найдется число $\delta > 0$, удовлетворяющее следующему условию: $f'(y) \in U_{t_0}$, если $y \in J$ и $|y - y_0| < \delta$. Таким образом, имеем включение

$$f'(\tilde{J}) \subset U_{t_0}, \quad (1)$$

где $\tilde{J} = J \cap B(y_0, \delta)$. При этом мы полагаем δ столь малым, что $B(y_0, \delta) \subset \Delta$. Так как $y_0 \in J$, то $y_0 \notin V_{t_0}$. Поэтому существуют точка $y_1 \in B(y_0, \delta)$ и индекс $t_1 \in T$, $t_1 \neq t_0$, для которых имеет место соотношение $f'(y_1) \in U_{t_1}$. Ввиду (1) $y_1 \notin \tilde{J}$, поэтому $y_1 \in V_{t_1}$. Отсюда следует, что открытое множество $\tilde{V}_{t_1} = V_{t_1} \cap B(y_0, \delta)$ непусто. Тем самым в силу определения множества J и свойств семейства $(V_t)_{t \in T}$ нетрудно убедиться в том, что $\emptyset \neq B(y_0, \delta) \cap \partial \tilde{V}_{t_1} \subset \tilde{J}$. Выберем точку $w \in \tilde{V}_{t_1}$ такую, что расстояние от w до граничной сферы шара $B(y_0, \delta)$ больше расстояния от w до $\tilde{J}$. Рассмотрим шар $B(w, r)$ радиуса $r =$

$d_{\mathbb{R}^n}(w, \tilde{J})$. Из выбора w следуют соотношения $B(w, r) \subset \tilde{V}_{t_1}$, $\text{cl } B(w, r) \cap \tilde{J} \neq \emptyset$. Возьмем $z \in \text{cl } B(w, r) \cap \tilde{J}$. Очевидно, z лежит на граничной сфере шара $B(w, r)$. Из условия $U_{t_0} \cap \text{cl } \text{co } U_{t_1} = \emptyset$ и (1) получаем, что $f'(z) \notin \text{cl } \text{co } U_{t_1}$. По теореме Хана — Банаха существуют вещественно линейный непрерывный функционал $h \in (X_{\mathbb{R}}^n)'$ и число γ такие, что

$$h(f'(z)) < \gamma, \quad (2)$$

$$h(x) \geq \gamma$$

для всех $x \in U_{t_1}$. В частности,

$$h(f'(y)) \geq \gamma, \quad y \in B(w, r). \quad (3)$$

Функционал h можно представить в виде

$$h(x) = h(x^1, x^2, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n h_i(x^i),$$

где $h_i \in (X_{\mathbb{R}})^{'}$. Это позволяет нам придать неравенствам (2) и (3) следующую форму:

$$\sum_{i=1}^n h_i\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}(z)\right) < \gamma, \quad \sum_{i=1}^n h_i\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}(y)\right) \geq \gamma, \quad y \in B(w, r).$$

Рассматривая, наконец, всюду дифференцируемое отображение

$$g = (g^1, \dots, g^n) : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

определяемое формулами $g^i(y) = h_i(f(y))$ (очевидно, $\frac{\partial g^i}{\partial y^j}(y) = h_i\left(\frac{\partial f}{\partial y^j}(y)\right)$ для $y \in \Delta$), мы приходим к соотношениям

$$\text{div } g(z) < \gamma, \quad (2')$$

$$\text{div } g(y) \geq \gamma, \quad y \in B(w, r). \quad (3')$$

Из (3') вытекает, что для любого n -мерного куба $Q \subset B(w, r)$ выполняется неравенство

$$\int_{\partial Q} g(y) \cdot \mathbf{n} \, dS \geq \gamma |Q|. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{n}$ обозначает вектор внешней нормали к ∂Q . В том случае, когда производная g' является интегрируемой по Лебегу, неравенство (4) прямо следует из формулы Гаусса — Остроградского. Доказательство (4) в общем случае проводится достаточно стандартными приемами (предполагая, что (4) неверно для некоторого куба Q , лежащего в шаре $B(w, r)$, заключаем, что (4) не выполняется по крайней мере для одного из 2^n вложенных в Q кубов, возникающих в результате разбиения Q гиперплоскостями, проходящими через его центр параллельно координатным гиперплоскостям, и т. д.). Обозначим через $l(Q)$ длину ребра n -мерного куба Q . Рассмотрим последовательность кубов $Q_k \subset B(w, r) \cap B(z, \frac{1}{k})$, удовлетворяющих неравенству

$$l(Q_k) \geq \frac{c}{k}$$

с некоторой константой $c > 0$, не зависящей от k (возможность построения такой последовательности очевидна). Из свойств Q_k следует, что точки $y \in Q_k$ удовлетворяют условию

$$|y - z| < \frac{l(Q_k)}{c}. \quad (5)$$

Так как g дифференцируемо в точке z , то

$$g(y) = g(z) + g'(z)(y - z) + |y - z|\alpha(y),$$

где $\alpha(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow z$. Положим

$$\varepsilon_1 = \frac{c(\gamma - \operatorname{div} g(z))}{2n}. \quad (6)$$

Ввиду (2') ε_1 положительно. Возьмем достаточно большое число k_1 , для которого $|\alpha(y)| < \varepsilon_1$ при $|y - z| < \frac{1}{k_1}$. Тогда вследствие включения $Q_{k_1} \subset B(z, \frac{1}{k_1})$ справедливо неравенство

$$|\alpha(y)| < \varepsilon_1, \quad y \in Q_{k_1}. \quad (7)$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского, а также учитывая (5)–(7), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q_{k_1}} g(y) \cdot \mathbf{n} dS_y &= \int_{\partial Q_{k_1}} (g(z) + g'(z)(y - z)) \cdot \mathbf{n} dS_y + \int_{\partial Q_{k_1}} |y - z|\alpha(y) \cdot \mathbf{n} dS_y \\ &< \operatorname{div} g(z)|Q_{k_1}| + \int_{\partial Q_{k_1}} \frac{l(Q_{k_1})}{c} \varepsilon_1 dS_y = \operatorname{div} g(z)|Q_{k_1}| + \frac{2n\varepsilon_1|Q_{k_1}|}{c} = \gamma|Q_{k_1}|, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (4). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ввиду свойства 6 слабо связных множеств теорема 1 при $n = 1$ и $X = \mathbb{R}$ представляет собой упомянутую теорему Дарбу.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 1 легко следует, что график отображения $f' : \Delta \rightarrow X^n$ также является слабо связным множеством в пространстве $\mathbb{R}^n \times X^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство. Множество $U \subset X$ называется *локально слабо связным*, если для любых точки $x \in U$ и ее окрестности V существуют слабо связное множество W и окрестность V_1 этой точки такие, что

$$V_1 \cap U \subset W \subset V \cap U.$$

Следующая теорема показывает, что при наложении некоторых дополнительных условий теорема 1 допускает обращение.

Теорема 2. Если непустой слабо связный компакт G пространства Фреше X является к тому же локально слабо связным множеством, то существует такое дифференцируемое отображение $f : [0, 1] \rightarrow X$, что $\operatorname{Im} f' = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Рассмотрим сначала случай, когда пространство X банахово. Основными этапами доказательства теоремы 2 для этой ситуации являются нижеследующие леммы 1–5. При этом теорема 2 непосредственно следует из лемм 4 и 5, а леммы 1–3 используются для доказательства леммы 4.

Лемма 1. Пусть G — ограниченное слабо связное множество в X . Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для любой пары a, b элементов из G и произвольного набора числовых параметров α, β, δ таких, что $\alpha < \beta$ и $\delta > 0$, существуют множество $E \subset [\alpha, \beta]$ и функция $g : E \rightarrow X$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\alpha, \beta \in E$, E — совершенное множество; для множества $V = [\alpha, \beta] \setminus E$ имеет место $|V| < \delta$, в точках x второго рода множества E $\rho_V(x) = 0$, а в точках первого рода множества E соответствующая односторонняя плотность V равна 0;

2) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ и $\text{Im } g \subset G$; если (α_i, β_i) есть смежный интервал E , то $\|g(\alpha_i) - g(\beta_i)\| \leq \varepsilon$; наконец, g интегрируема, причем функция

$$h(x) = \int_{[\alpha, x] \cap E} g(y) dy$$

имеет во всех точках x второго рода множества E производную, равную $g(x)$, а в точках x первого рода множества E отображение h имеет соответствующую одностороннюю производную, совпадающую с $g(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В формулировке леммы 1 и далее в статье используется следующая общепринятая терминология. Символом $\rho_V(x)$ обозначается плотность (измеримого) множества $V \subset \mathbb{R}$ в точке x , т. е. величина

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|V \cap (x - r, x + r)|}{2r}.$$

Аналогично определяются правая и левая плотности, обозначаемые соответственно через $\rho_V^r(x)$ и $\rho_V^l(x)$. Интеграл от банаховозначных функций, а также их измеримость и интегрируемость понимаются в смысле Бохнера. Наконец, точка x совершенного множества E называется точкой первого рода, если она является концом некоторого интервала из $\mathbb{R} \setminus E$, остальные точки множества E называются точками второго рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Если для пары элементов a, b из G и фиксированного набора чисел $\varepsilon, \alpha, \beta, \delta$ таких, что $\varepsilon > 0$, $\alpha < \beta$ и $\delta > 0$, существуют множество E и функция g , удовлетворяющие условиям 1, 2 доказываемой леммы, то мы будем обозначать их символами $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}$ и $g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}$ соответственно.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Введем на G отношение $\sim_\varepsilon$, полагая $a \sim_\varepsilon b$ тогда и только тогда, когда для любого набора чисел α, β, δ , $\alpha < \beta$, $\delta > 0$ существуют множество $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}$ и функция $g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}$ (т. е. когда для пары a, b выполняются условия леммы 2 с данным ε). Легко видеть, что $\sim_\varepsilon$ есть отношение эквивалентности. Чтобы доказать рефлексивность, достаточно заметить, что для $a \in G$ множество $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon aa} = [\alpha, \beta]$ и функция $g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon aa}(x) \equiv a$ на $[\alpha, \beta]$ действительно удовлетворяют условиям 1, 2. Если $a \sim_\varepsilon b$, то полагаем $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ba} = -E_{-\beta-\alpha\delta}^{\varepsilon ab}$ и $g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ba}(x) = g_{-\beta-\alpha\delta}^{\varepsilon ab}(-x)$, тем самым устанавливая симметричность. Наконец, отношение $\sim_\varepsilon$ транзитивно, так как если $a \sim_\varepsilon b$ и $b \sim_\varepsilon c$, то, рассматривая произвольный набор параметров α, β, δ , $\alpha < \beta$, $\delta > 0$, и выбирая числа α_1, β_1 такие, что $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, $\beta - \beta_1 + \alpha_1 - \alpha < \delta$, в качестве искомого множества $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ac}$ и функции $g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ac}$ можно взять $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ac} = E_{\alpha\alpha_1}^{\varepsilon ab} \cup [\alpha_1, \beta_1] \cup E_{\beta_1\beta}^{\varepsilon bc}$ и

$$g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ac}(x) = \begin{cases} g_{\alpha\alpha_1}^{\varepsilon ab}(x), & x \in E_{\alpha\alpha_1}^{\varepsilon ab}, \\ g_{\beta_1\beta}^{\varepsilon bc}(x), & x \in E_{\beta_1\beta}^{\varepsilon bc}, \\ b, & x \in [\alpha_1, \beta_1]. \end{cases}$$

Обозначим семейство классов эквивалентностей по $\sim_\varepsilon$ через $(G_t)_{t \in T}$.

Пусть $a, b \in G$ и $\|a - b\| \leq \varepsilon$. Тогда $a \sim_\varepsilon b$. В самом деле, если α, β, δ таковы, что $\alpha < \beta$, $\delta > 0$, а числа α_1, β_1 удовлетворяют условиям $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, $\beta_1 - \alpha_1 < \delta$, то в качестве множества $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}$ и функции $g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}(x)$ возьмем $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab} = [\alpha, \alpha_1] \cup [\beta_1, \beta]$ и

$$g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}(x) = \begin{cases} a, & x \in [\alpha, \alpha_1]; \\ b, & x \in [\beta_1, \beta]. \end{cases}$$

Корректность построения, т. е. выполнение условий 1, 2 леммы 1, очевидна. Из доказанного свойства отношения $\sim_\varepsilon$ следует, что расстояние между различными классами эквивалентности не меньше ε , что означает выполнение для каждого класса эквивалентности G_t условия

$$G_t \cap \text{cl}(G \setminus G_t) = \emptyset. \quad (8)$$

Установим теперь, что для двух различных классов эквивалентности G_{t_1} и G_{t_2} справедливо соотношение

$$G_{t_1} \cap \text{cl} \text{so} G_{t_2} = \emptyset. \quad (9)$$

С целью упрощения изложения мы докажем более слабое равенство $G_{t_1} \cap \text{so} G_{t_2} = \emptyset$; полное доказательство соотношения (9) проводится аналогичными, хотя и более громоздкими рассуждениями. Пусть $b \in G \cap \text{so} G_{t_2}$. Это означает, что существуют $a_i \in G_{t_2}$, $i = 1, \dots, k$, и числа $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$

такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = b \in G$. Установим эквивалентность $a_1 \sim_\varepsilon b$. В самом деле, нетрудно показать, что для всякого набора параметров α, β, δ , $\alpha < \beta$, $\delta > 0$ существует система интервалов (w_j^i, z_j^i) , $i = 1, \dots, k$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\alpha = w_1^1 < z_1^1 < w_1^2 < z_1^2 < \dots < w_1^k < z_1^k < w_2^1 < z_2^1 < w_2^2 < z_2^2 < w_2^3 < \dots$,
 $\lim_{j \rightarrow \infty} w_j^i = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j^i = \beta_1 < \beta$, $\beta_1 - \alpha < \delta$;

2) для $A_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [w_j^i, z_j^i]$ имеет место равенство $\rho_{A_i}^l(\beta_1) = \lambda_i$.

Из эквивалентностей $a_i \sim_\varepsilon a_j$ вытекает существование множеств $E_{z_j^i w_j^{i+1} 1}^{\varepsilon a_i a_{i+1}}$ при $i < k$, $E_{z_j^k w_{j+1}^1 1}^{\varepsilon a_k a_1}$ и соответствующих функций $g_{z_j^i w_j^{i+1} 1}^{\varepsilon a_i a_{i+1}}$, $g_{z_j^k w_{j+1}^1 1}^{\varepsilon a_k a_1}$.

Положим

$$A = \bigcup_{i=1}^k A_i, \quad E = A \cup [\beta_1, \beta] \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}, i < k} E_{z_j^i w_j^{i+1} 1}^{\varepsilon a_i a_{i+1}} \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_{z_j^k w_{j+1}^1 1}^{\varepsilon a_k a_1} \right),$$

$$g(x) = \begin{cases} a_i, & x \in A_i; \\ g_{z_j^i w_j^{i+1} 1}^{\varepsilon a_i a_{i+1}}(x), & x \in E_{z_j^i w_j^{i+1} 1}^{\varepsilon a_i a_{i+1}}, \quad i < k; \\ g_{z_j^k w_{j+1}^1 1}^{\varepsilon a_k a_1}(x), & x \in E_{z_j^k w_{j+1}^1 1}^{\varepsilon a_k a_1}; \\ b, & x \in [\beta_1, \beta]. \end{cases}$$

Проверим, что E и g действительно удовлетворяют условиям 1, 2 леммы 1 для пары элементов a_1, b с введенными выше параметрами α, β, δ , т. е. что $E = E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon a_1 b}$ и $g = g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon a_1 b}$. Замкнутость множества E и отсутствие у него изолированных точек, интегрируемость g , выполнение условий $|V| < \delta$ ($V = [\alpha, \beta] \setminus E$), $g(\alpha) =$

a_1 , $g(\beta) = b$ и $\text{Im } g \subset G$ устанавливаются легко. Если (α_i, β_i) — смежный интервал E , то (α_i, β_i) — смежный интервал области определения одной из вспомогательных функций, использованных в построении g . Так как разность значений вспомогательной функции на концах такого интервала не превосходит ε , то и $\|g(\alpha_i) - g(\beta_i)\| \leq \varepsilon$. Пусть, далее, x — точка первого рода множества E . Тогда либо $x = \alpha$, либо $x = \beta$ (в этих точках проверка условий тривиальна), либо x есть точка первого рода области определения одной из вспомогательных функций. Выполнение условий на E и g в такой точке автоматически следует из выполнения условий леммы для данной функции. Проверка условий в точках второго рода, не равных β_1 , также проста. Осталось рассмотреть теперь точку β_1 . Так как $[\beta_1, \beta] \subset E$, $g|_{[\beta_1, \beta]}(x) \equiv b$, то $\rho_V^r(\beta_1) = 0$ и производная справа функции

$$h(x) = \int_{[\alpha, x] \cap E} g(y) dy$$

в точке β_1 равна b . Ввиду того, что множества A_i не пересекаются, для $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ имеем

$$\rho_A^l(\beta_1) = \sum_{i=1}^k \rho_{A_i}^l(\beta_1) = \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \rho_V^l(\beta_1) \leq \rho_{[\alpha, \beta] \setminus A}^l(\beta_1) = 1 - \rho_A^l(\beta_1) = 0,$$

т. е. $\rho_V^l(\beta_1) = 0$. При $\Delta x > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{h(\beta_1) - h(\beta_1 - \Delta x)}{\Delta x} &= \frac{\int_{A_1 \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1]} g(y) dy + \dots + \int_{A_k \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1]} g(y) dy}{\Delta x} \\ &+ \frac{\int_{E \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1] \setminus A} g(y) dy}{\Delta x} = \frac{a_1 |A_1 \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1]| + \dots + a_k |A_k \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1]|}{\Delta x} \\ &+ \frac{\gamma(\Delta x) |E \cap [\beta_1 - \Delta x, \beta_1] \setminus A|}{\Delta x} \rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = b \end{aligned}$$

($\gamma(\Delta x)$ — некоторый вектор из X , причем $\|\gamma(\Delta x)\| \leq \sup_{y \in G} \|y\| < \infty$ по условию леммы), откуда левая производная функции h в β_1 существует и равна b . Итак, $\rho_V(\beta_1) = 0$, $h'(\beta_1) = b = g(\beta_1)$. Таким образом, построенные множество E и функция g действительно удовлетворяют условиям 1, 2 леммы, можно записать это в виде $E = E_{\alpha/\beta\delta}^{\varepsilon a_1 b}$, $g = g_{\alpha/\beta\delta}^{\varepsilon a_1 b}$. Ввиду произвольности выбора параметров α, β, δ эквивалентность $a_1 \sim_\varepsilon b$ доказана. Но тогда b лежит в том же классе эквивалентности, что и a_1 , т. е. $b \in G_{t_2}$. Тем самым установлено включение $G \cap \text{co}G_{t_2} \subset G_{t_2}$. Отсюда сразу получаем требуемое равенство: $G_{t_1} \cap \text{co}G_{t_2} = G_{t_1} \cap G \cap \text{co}G_{t_2} \subset G_{t_1} \cap G_{t_2} = \emptyset$.

Таким образом, мы имеем представление G в виде $G = \bigcup_{t \in T} G_t$, причем в соответствии с (8) и (9) $G_t \cap \text{cl}(G \setminus G_t) = \emptyset$ и $G_{t_1} \cap \text{cl} \text{co}G_{t_2} = \emptyset$ при $t_1 \neq t_2$. Так как G слабо связанное множество, существует только один, совпадающий со всем G , класс эквивалентности. Другими словами, $a \sim_\varepsilon b$ для каждой пары a, b из G . Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ лемма 1 доказана.

Лемма 2. Предположим, что непустой слабо связный компакт $G \subset X$ является локально слабо связным множеством. Тогда существует неубывающая функция $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ такая, что

- 1) $\psi(\varkappa) \rightarrow 0$ при $\varkappa \rightarrow 0$;
- 2) для любой пары a, b элементов из G существует слабо связный компакт $G_1 \subset G$ такой, что $a, b \in G_1$ и $\text{diam } G_1 \leq \psi(\|a - b\|)$.

Лемма 2 сразу вытекает из определения 2 и общих свойств компактных множеств.

Прямым следствием лемм 1 и 2 является

Лемма 3. Пусть непустой слабо связный компакт $G \subset X$ является к тому же локально слабо связным множеством. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для любой пары a, b элементов из G и произвольного набора числовых параметров α, β, δ таких, что $\alpha < \beta$ и $\delta > 0$, существуют множество $E \subset [\alpha, \beta]$ и функция $g : E \rightarrow X$, удовлетворяющие условиям 1, 2 леммы 1 с рассмотренными сейчас параметрами, причем $\text{diam Im } g \leq \psi(\|a - b\|)$, где ψ — функция, определенная в лемме 2.

Сохраним обозначения $E_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}$ и $g_{\alpha\beta\delta}^{\varepsilon ab}$ для множества E и функции g , описанных в лемме 3.

Лемма 4. Если непустой слабо связный компакт $G \subset X$ локально слабо связан, то для любой пары a, b элементов из G существует такое дифференцируемое отображение $h : [0, 1] \rightarrow X$, что $h'(0) = a$, $h'(1) = b$ и $\text{Im } h' \subset G$ (через $h'(0)$ и $h'(1)$ мы обозначили соответствующие односторонние производные).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать требуемую функцию h в виде интеграла

$$h(x) = \int_0^x g(y) dy,$$

причем $h'(x) \equiv g(x)$. Функция $g : [0, 1] \rightarrow X$ будет по индукции определяться на некоторой последовательности расширяющихся множеств E_i , объединение которых E окажется множеством полной меры, а затем мы доопределим g на всем отрезке $[0, 1]$ по непрерывности.

Возьмем последовательность $\varepsilon_i > 0$, элементы которой удовлетворяют неравенству

$$\psi(\varepsilon_i) \leq \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^{i+1}}. \quad (10)$$

Построим по индукции множества E_i и функции $g_i : E_i \rightarrow X$ такие, что $E_i \subset E_{i+1}$ и $g_i = g_{i+1}|_{E_i}$, причем E_i и g_i удовлетворяют условиям 1, 2 леммы 1 для рассматриваемой пары элементов a, b с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_i$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и $\delta = \frac{1}{2^i}$; кроме того, для каждого смежного интервала (α_k^j, β_k^j) множества E_j при $j < i$ выполняется неравенство

$$\text{diam } g_i(E_i \cap (\alpha_k^j, \beta_k^j)) \leq \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^j} + \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^{j+1}} + \dots + \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^{i-1}}. \quad (11)$$

Сделаем первый шаг построения. Положим $E_1 = E_{01\frac{1}{2}}^{\varepsilon_1 ab}$, $g_1 = g_{01\frac{1}{2}}^{\varepsilon_1 ab}$.

Совершим шаг индукции. Пусть на i -м этапе мы определили множества $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_i$ и функции $g_j : E_j \rightarrow X$, $j = 1, \dots, i$, $g_j = g_{j+1}|_{E_j}$ для $j < i$, которые удовлетворяют условиям 1, 2 леммы 1 с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_j$,

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\delta = \frac{1}{2^j}$, и для любого смежного интервала (α_k^j, β_k^j) множества E_j при $j < i$ справедливо неравенство (11). Рассмотрим семейство смежных интервалов (α_k^i, β_k^i) множества E_i . Положим

$$\delta_k^i = \frac{\beta_k^i - \alpha_k^i}{2}, \quad a_k^i = g_i(\alpha_k^i), \quad b_k^i = g_i(\beta_k^i),$$

$$E_i^k = E_{\alpha_k^i, \beta_k^i, \delta_k^i}^{\varepsilon_{i+1} a_k^i b_k^i}, \quad E_{i+1} = E_i \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_i^k \right),$$

$$g_{i+1}(x) = \begin{cases} g_i(x), & x \in E_i; \\ g_{\alpha_k^i, \beta_k^i, \delta_k^i}^{\varepsilon_{i+1} a_k^i b_k^i}(x), & x \in E_i^k. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что $E_i \subset E_{i+1}$, $g_i = g_{i+1}|_{E_i}$, причем E_{i+1} и g_{i+1} также удовлетворяют условиям 1, 2 леммы 1 с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_{i+1}$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и $\delta = \frac{1}{2^{i+1}}$. Установим, например, что

$$|V_{i+1}| (= |[0, 1] \setminus E_{i+1}|) < \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Действительно, имеем

$$V_{i+1} \subset V_i, \quad V_{i+1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (V_{i+1} \cap (\alpha_k^i, \beta_k^i)),$$

$$|V_{i+1}| = \sum_{k=1}^{\infty} |V_{i+1} \cap (\alpha_k^i, \beta_k^i)| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^i - \alpha_k^i}{2} = \frac{|V_i|}{2} < \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Отметим также, что по индукционному предположению

$$\|a_k^i - b_k^i\| = \|g_i(\alpha_k^i) - g_i(\beta_k^i)\| \leq \varepsilon_i,$$

а значит, в соответствии с (10) и леммой 3

$$\text{diam } g_{i+1}(E_i^k) = \text{diam Im } g_{\alpha_k^i, \beta_k^i, \delta_k^i}^{\varepsilon_{i+1} a_k^i b_k^i} \leq \psi(\varepsilon_i) \leq \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^{i+1}}.$$

Поэтому, учитывая справедливость в силу индукционного предположения неравенства (11) для E_i и g_i , при $j < i + 1$ для любого смежного интервала (α_k^j, β_k^j) множества E_j получаем неравенство

$$\begin{aligned} \text{diam } g_{i+1}(E_{i+1} \cap (\alpha_k^j, \beta_k^j)) &\leq \text{diam } g_i(E_i \cap (\alpha_k^j, \beta_k^j)) + 2 \sup_{E_i^l \subset (\alpha_k^j, \beta_k^j)} \text{diam } g_{i+1}(E_i^l) \\ &\leq \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^j} + \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^{j+1}} + \dots + \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^i}, \end{aligned}$$

что означает выполнение (11) для построенных на данном шаге множества E_{i+1} и функции g_{i+1} . Построение завершено.

На множестве $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ определим функцию $\tilde{g} : E \rightarrow X$, приняв $\tilde{g}(x) = g_i(x)$ для $x \in E_i$. Очевидно, $\tilde{g}$ определена почти всюду на $[0, 1]$ и является интегрируемой.

Пусть $x \in [0, 1] \setminus E$. Покажем, что существует $\lim_{E \ni y \rightarrow x} \tilde{g}(y)$. Для произвольного $\varkappa > 0$ возьмем $i_{\varkappa}$ такое, что

$$\sum_{j=i_{\varkappa}}^{\infty} \frac{\psi(\|a - b\|)}{2^j} < \varkappa.$$

Так как $x \notin E_{i_\varkappa}$, то $x \in (\alpha_k^{i_\varkappa}, \beta_k^{i_\varkappa})$ для некоторого смежного интервала $(\alpha_k^{i_\varkappa}, \beta_k^{i_\varkappa})$ множества $E_{i_\varkappa}$. Вследствие (11)

$$\text{diam } \tilde{g}(E \cap (\alpha_k^{i_\varkappa}, \beta_k^{i_\varkappa})) < \sum_{j=i_\varkappa}^{\infty} \frac{\psi(\|a-b\|)}{2^j} < \varkappa.$$

Ввиду произвольности $\varkappa > 0$ функция $\tilde{g}$ действительно имеет предел в x .

Определим новую функцию $g : [0, 1] \rightarrow X$ по правилу

$$g(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x), & x \in E; \\ \lim_{E \ni y \rightarrow x} \tilde{g}(y), & x \in [0, 1] \setminus E. \end{cases}$$

Так как функция g совпадает с $\tilde{g}$ почти всюду на $[0, 1]$, то g интегрируема. Обозначим

$$h_i(x) = \int_{E_i \cap [0, x]} g_i(y) dy, \quad h(x) = \int_0^x g(y) dy.$$

Докажем, что отображение h всюду дифференцируемо и для всех $x \in [0, 1]$

$$h'(x) = g(x). \quad (12)$$

При $x \in [0, 1] \setminus E$ это сразу же следует из непрерывности g в x . Пусть $x \in E$, т. е. $x \in E_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Справедливо разложение

$$h(z) = h_i(z) + \int_{V_i \cap [0, z]} g(y) dy.$$

Пусть x — точка второго рода множества E_i . Тогда в силу того, что функция g_i удовлетворяет условию 2 леммы 1 с соответствующими параметрами, первое слагаемое имеет в точке x производную $h'_i(x) = g_i(x) = g(x)$. Производная второго слагаемого в x существует и равна 0 вследствие ограниченности g и того факта, что $\rho_{V_i}(x) = 0$ (см. условие 1 леммы 1). Для $x = 0$ и $x = 1$ рассуждения аналогичны. Наконец, если $x \neq 0, 1$ и x — точка первого рода множества E_i , то из построения E_{i+1} вытекает, что x есть точка второго рода множества E_{i+1} , т. е. этот случай сводится к предыдущему. Тождество (12) доказано. Учитывая, что $g(0) = a$, $g(1) = b$ и $\text{Im } g \subset G$, мы приходим к заключению, что лемма 4 также доказана.

Завершающим этапом доказательства теоремы 2 для банаховых пространств является следующая лемма (которая представляет и самостоятельный интерес).

Лемма 5. Пусть компакт $G \subset X$ таков, что для любой пары a, b элементов из G существует дифференцируемое отображение $h : [0, 1] \rightarrow X$, удовлетворяющее условиям $h'(0) = a$, $h'(1) = b$ и $\text{Im } h' \subset G$. Тогда существует такое дифференцируемое отображение $f : [0, 1] \rightarrow X$, что $\text{Im } f' = G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть компакт G удовлетворяет предположениям леммы 5. Отсюда с очевидностью следует, что для любой пары a, b элементов из G и невырожденного отрезка $[\alpha, \beta]$ существует интегрируемое отображение $\tilde{g} : [\alpha, \beta] \rightarrow X$ со следующими свойствами: $\tilde{g}(\alpha) = a$, $\tilde{g}(\beta) = b$ и $\text{Im } \tilde{g} \subset G$, причем

$$\left(\int_{\alpha}^x \tilde{g}(y) dy \right)' \equiv \tilde{g}(x).$$

Описанное отображение обозначим через $g_{\alpha\beta}^{ab}$.

Возьмем совершенное канторово множество K на отрезке $[0, 1]$. По теореме Александрова, так как G есть метризуемый компакт, существует непрерывное (на своей области определения) отображение $g_1 : K \rightarrow X$, образ $\text{Im } g_1$ которого равен G . Пусть (μ_i, ν_i) — семейство смежных интервалов множества K . Обозначим $d_i = \frac{\nu_i - \mu_i}{3^i}$. Положим

$$E = K \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [\mu_i + d_i, \nu_i - d_i] \right).$$

Легко проверяется, что $0, 1 \in E$, E — совершенное множество, в точках x второго рода множества E имеет место равенство $\rho_V(x) = 0$, где $V = [0, 1] \setminus E$, а в точках первого рода множества E равна 0 соответствующая односторонняя плотность V . Определим отображение $g_2 : E \rightarrow X$ следующим образом:

$$g_2(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in K; \\ g_1(\mu_i), & x \in [\mu_i + d_i, \nu_i - d_i]. \end{cases}$$

Легко видеть, что g_2 непрерывно на E , $\text{Im } g_2 = G$. Пусть (α_i, β_i) — семейство смежных интервалов множества E , $a_i = g_2(\alpha_i)$, $b_i = g_2(\beta_i)$. Построим отображение $g : [0, 1] \rightarrow X$, принимая

$$g(x) = \begin{cases} g_2(x), & x \in E; \\ g_{\alpha_i\beta_i}^{a_i b_i}(x), & x \in (\alpha_i, \beta_i). \end{cases}$$

Очевидно, отображение g интегрируемо, $\text{Im } g = G$. Определим функции

$$f_1(x) = \int_{E \cap [0, x]} g(y) dy, \quad f_2(x) = \int_{V \cap [0, x]} g(y) dy,$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \int_0^x g(y) dy.$$

Докажем, что всюду на $[0, 1]$ производная $f'(x)$ существует и

$$f'(x) \equiv g(x). \quad (13)$$

Пусть x — точка второго рода множества E . Из непрерывности g_2 , совпадения $g_2 = g|_E$, условия $\rho_V(x) = 0$ и ограниченности g получаем, что f_1 и f_2 дифференцируемы в x , причем $f'_1(x) = g(x)$, $f'_2(x) = 0$. Если $x \in [0, 1] \setminus E$, то x лежит в некотором смежном интервале (α_i, β_i) множества E . Ввиду способа задания отображения g имеем $g|_{(\alpha_i, \beta_i)} = g_{\alpha_i\beta_i}^{a_i b_i}$. Используя свойства отображения $g_{\alpha_i\beta_i}^{a_i b_i}$ (см. начало доказательства леммы), приходим к равенствам $f'(x) = g_{\alpha_i\beta_i}^{a_i b_i}(x) = g(x)$. Доказательство (13) для точек первого рода сводится к комбинации изложенных выше рассуждений.

Окончательно получаем, что отображение $f : [0, 1] \rightarrow X$ всюду дифференцируемо и $\text{Im } f' = G$. Лемма 5 доказана.

Теорема 2 для случая банаховых пространств X прямо следует из лемм 4 и 5.

2. Рассмотрим общий случай, т. е. когда X — произвольное пространство Фреше. Мы сведем его к предыдущей ситуации.

Обозначим символом τ топологию пространства X . Как известно, τ задается счетным набором полунорм p_i , так что для обобщенной последовательности $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов из X имеем $x_\xi \rightarrow x \Leftrightarrow p_i(x_\xi - x) \rightarrow 0$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Ввиду компактности G для всякого $i \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in G} |p_i(x)| < \infty.$$

Домножая, если нужно, p_i на соответствующие константы, мы можем, не умаляя общности, считать, что $\sup_{x \in G} |p_i(x)| < \frac{1}{2^i}$. Рассмотрим отображение

$$p(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x).$$

Обозначим $X_0 = \text{dom } p$, $F = \text{cl so } G$. Очевидно, что $F \subset X_0$, X_0 есть подпространство X и p — норма в пространстве X_0 . Эта норма порождает топологию τ_p . Ясно, что топология $\tau|_{X_0}$, индуцированная топологией τ на подпространстве X_0 , слабее τ_p , но $\tau|_F = \tau_p|_F$. Не составляет труда проверить, что нормированное пространство (X_0, p) является банаховым, а G есть слабо связный и локально слабо связный компакт в (X_0, p) . Так как для случая банаховых пространств теорема 2 нами уже доказана, существует дифференцируемое (относительно топологии τ_p) отображение $f : [0, 1] \rightarrow X_0$ такое, что $\text{Im } f' = G$. Но $\tau|_{X_0}$ слабее τ_p , поэтому f , рассматриваемое как отображение из $[0, 1]$ в X , также является дифференцируемым (относительно исходной топологии τ). Теорема 2 полностью доказана.

Теорему 2 полезно сравнить с классическим результатом Мазуркевича, согласно которому метрический континуум K представим в виде непрерывного образа отрезка тогда и только тогда, когда K — локально связное множество (см. [1, § 50, II, теорема 2]). В этой связи заметим, что условие локальной слабой связности компакта не является необходимым для того, чтобы он был образом производной дифференцируемого отображения.

Отметим следующее полезное усиление теоремы 2.

Теорема 3. Пусть X — пространство Фреше, и пусть множество $G \subset X$ представимо в виде объединения $G = \bigcup_{t \in T} G_t$ семейства непустых слабо связных компактов G_t , являющихся локально слабо связными, причем существует такое $t_0 \in T$, что для любого $t \in T$ множества G_{t_0} и G_t не являются сильно отделимыми. Предположим, далее, что выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: множество G компактно или T не более чем счетно. Тогда существует такое дифференцируемое отображение $f : [0, 1] \rightarrow X$, что $\text{Im } f' = G$.

Доказательство теоремы 3 основывается на сведении общего случая к ситуации, когда пространство X банахово, и последующем применении теоремы 2 и леммы 5 (читателю не составит большого труда воспроизвести детали рассуждений, в силу чего мы их опускаем).

Заметим, что с позиций обычной связности образы производной вектор-функции могут быть устроены «очень плохо». Это вытекает из следующей теоремы (ср. [2, гл. 1, § 2, п. 4, упражнение 6]).

Теорема 4. Существует дифференцируемое отображение $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, образ $\text{Im } f'$ производной которого состоит более чем из одной точки и является

вполне несвязным компактом (т. е. все компоненты связности $\text{Im } f'$ одноточечны).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду теоремы 2 для доказательства теоремы 4 достаточно построить состоящий более чем из одной точки слабо связный компакт $G \subset \mathbb{R}^2$, являющийся к тому же локально слабо связным множеством и в то же время вполне несвязным компактом.

Опишем основную конструкцию, используемую при построении. Для пары различных точек $x, y \in \mathbb{R}^2$ возьмем полуокружность с центром в y , проходящую через точку x , причем диаметр, соединяющий концы полуокружности, перпендикулярен отрезку $[x, y]$. Разобьем эту полуокружность на 50 равных частей точками $x^1, \dots, x^{51}$, где x^1, x^{51} — концы полуокружности, причем точки x^i нумеруются в направлении обхода против часовой стрелки. Ясно, что точка x совпадает с x^{26} (средняя точка разбиения). Множество $\{x^1, \dots, x^{51}\}$ будем называть сеточной полуокружностью и обозначать $P(x, y)$.

Пусть $P = P((0, 0), (1, 0))$. Обозначим $I = \{1, \dots, 51\}$. Построим по индукции семейства сеточных полуокружностей

$$(P_{i_1})_{i_1 \in I}, (P_{i_1 i_2})_{i_1, i_2 \in I}, \dots, (P_{i_1 \dots i_k})_{i_1, \dots, i_k \in I}, \dots$$

На первом шаге построения определим

$$P_i = P(x^i, x^{i+1}), \quad i = 1, \dots, 50, \quad P_{51} = P(x^{51}, 2x^{51} - x^{50}),$$

где x^i — точки из P . Сделаем шаг индукции. Пусть на k -м шаге мы построили семейство сеточных полуокружностей $P_{i_1 \dots i_k}$, $i_1, \dots, i_k \in I$, состоящих из точек

$$P_{i_1 \dots i_k} = \{x_{i_1 \dots i_k}^1, \dots, x_{i_1 \dots i_k}^{51}\}.$$

Определим новое семейство сеточных полуокружностей

$$P_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}, \quad i_1, \dots, i_k, i_{k+1} \in I,$$

полагая

$$P_{i_1 \dots i_k i_{k+1}} = P(x_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1}}, x_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1}+1}) \quad \text{для } i_{k+1} \neq 51, \quad (14)$$

$$P_{i_1 \dots i_k 51} = P(x_{i_1 \dots i_k}^{51}, 2x_{i_1 \dots i_k}^{51} - x_{i_1 \dots i_k}^{50}). \quad (15)$$

Сеточные полуокружности $P_{i_1 \dots i_k}$ будем в дальнейшем называть сеточными полуокружностями порядка k (P — сеточная полуокружность порядка 0), их радиус обозначим через r_k . Легко убедиться, что

$$r_{k+1} < \frac{\pi}{50} r_k < \frac{r_k}{15}, \quad (16)$$

$$x_{i_1 \dots i_k}^{i_{k+1}} = x_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}^{26}. \quad (17)$$

Полуокружность, соответствующую сеточной полуокружности $P_{i_1 \dots i_k}$, будем обозначать через $\tilde{P}_{i_1 \dots i_k}$.

Положим

$$G = \text{cl } D, \quad \text{где } D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i_1, \dots, i_k \in I} P_{i_1 \dots i_k}.$$

Утверждается, что G есть искомый компакт. Чтобы доказать это, введем следующие объекты: для набора индексов $i_1, \dots, i_k$ из I положим

$$G_{i_1 \dots i_k} = \text{cl } D_{i_1 \dots i_k}, \quad \text{где } D_{i_1 \dots i_k} = \bigcup_{m=k+1}^{\infty} \bigcup_{i_{k+1}, \dots, i_m \in I} P_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_m}. \quad (18)$$

Очевидно, для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы разложения

$$D = \bigcup_{i_1, \dots, i_k \in I} D_{i_1 \dots i_k}, \quad G = \bigcup_{i_1, \dots, i_k \in I} G_{i_1 \dots i_k}. \quad (19)$$

Докажем, что если наборы индексов $i_1, \dots, i_k$ и $j_1, \dots, j_k$ не совпадают, то

$$G_{i_1 \dots i_k} \cap G_{j_1 \dots j_k} = \emptyset \quad (20)$$

(равенство (20) с учетом (18) и (19) означает, что компакты $G_{i_1 \dots i_k}$ являются открыто-замкнутыми множествами относительно G). Так как $G_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_m} \subset G_{i_1 \dots i_k}$, достаточно установить (20) для случая, когда $i_1 = j_1, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}$, $i_k < j_k$. Элементарные вычисления дают для расстояний между «соседними» полуокружностями $\tilde{P}_{i_1 \dots i_{k-1} i_k}$, $\tilde{P}_{i_1 \dots i_{k-1} (i_k+1)}$ следующие значения:

$$d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{P}_{i_1 \dots i_k}, \tilde{P}_{i_1 \dots (i_k+1)}) = \sqrt{2}r_k \sqrt{1 - \sin \frac{\pi}{50}} - r_k > \frac{r_k}{3} \quad \text{при } i_k \neq 50,$$

$$d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{P}_{i_1 \dots 50}, \tilde{P}_{i_1 \dots 51}) = \sqrt{2}r_k - r_k > \frac{r_k}{3}.$$

В общем случае, очевидно, имеем

$$d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{P}_{i_1 \dots i_k}, \tilde{P}_{i_1 \dots j_k}) \geq d_{\mathbb{R}^2}(\tilde{P}_{i_1 \dots i_k}, \tilde{P}_{i_1 \dots (i_k+1)}) > \frac{r_k}{3}. \quad (21)$$

Из построения (соотношения (14), (15), (18)) и неравенства (16) следует, что компакт $G_{i_1 \dots i_k}$ лежит в ε_k -оболочке полуокружности $\tilde{P}_{i_1 \dots i_k}$, где

$$\varepsilon_k = \sqrt{2}(r_{k+1} + r_{k+2} + \dots) < \frac{5}{3}r_{k+1} < \frac{r_k}{9}.$$

Отсюда, принимая во внимание аналогичное соображение для $G_{i_1 \dots j_k}$ и неравенство (21), получаем

$$d_{\mathbb{R}^2}(G_{i_1 \dots i_k}, G_{i_1 \dots j_k}) > \frac{r_k}{3} - \frac{2r_k}{9} > 0,$$

что влечет за собой требуемое (20).

Учитывая, что диаметр полуокружности $\tilde{P}_{i_1 \dots i_k}$ равен $2r_k$, а также соотношение на ε_k , имеем оценку диаметра $G_{i_1 \dots i_k}$:

$$\text{diam } G_{i_1 \dots i_k} < 2r_k + 2\varepsilon_k = 2r_k + 2\sqrt{2}(r_{k+1} + r_{k+2} + \dots) < 3r_k < \frac{1}{15^{k-1}}. \quad (22)$$

Из условия (20) и оценки (22) вытекает, что G есть вполне несвязный компакт.

Установим теперь, что компакт G слабо связан. Пусть это неверно, тогда по определению 1 множество G представимо в виде $G = \bigcup_{t \in T} U_t$, где $U_t \neq G$, $U_t \cap \text{cl}(G \setminus U_t) = \emptyset$ и $U_{t_1} \cap \text{cl } \text{co} U_{t_2} = \emptyset$ при $t_1 \neq t_2$. Из компактности G вытекает, что T конечно и все U_t являются компактными. Возьмем

$$\varepsilon = 1/2 \min_{t_1 \neq t_2} d_{\mathbb{R}^2}(U_{t_1}, U_{t_2}).$$

Ввиду общих свойств компактных множеств ε положительно. Введем естественное отношение эквивалентности $\sim$ на G , порожденное разбиением $(U_t)_{t \in T}$. Из выбора ε следует, что если $x, y \in G$ и $|x - y| \leq \varepsilon$, то $x \sim y$. Поэтому при достаточно больших k (когда $r_{k+1} \leq \varepsilon$), все точки каждой сеточной полуокружности

$P_{i_1 \dots i_k}$ порядка k попарно эквивалентны. Так как не все элементы G попарно эквивалентны, найдется такое неотрицательное целое число m , что сеточные полуокружности порядка выше m состоят из попарно эквивалентных элементов, но существует сеточная полуокружность $P_{i_1 \dots i_m}$ порядка m , содержащая неэквивалентные элементы. Пусть j — номер точки из $P_{i_1 \dots i_m}$, для которого верно

$$x_{i_1 \dots i_m}^1 \sim x_{i_1 \dots i_m}^2 \sim \dots \sim x_{i_1 \dots i_m}^j, \quad x_{i_1 \dots i_m}^{j+1} \not\sim x_{i_1 \dots i_m}^j.$$

По формуле (14) $P_{i_1 \dots i_m j} = P(x_{i_1 \dots i_m}^j, x_{i_1 \dots i_m}^{j+1})$, поэтому

$$x_{i_1 \dots i_m}^{j+1} = \frac{x_{i_1 \dots i_m j}^1 + x_{i_1 \dots i_m j}^{51}}{2} \in \text{co}P_{i_1 \dots i_m j}.$$

В соответствии с выбором m все точки $P_{i_1 \dots i_m j}$ попарно эквивалентны, т. е. все они лежат в некотором U_{t_0} . Но из свойства $U_t \cap \text{clco}U_{t_0} = \emptyset$ при $t \neq t_0$ вытекает, что $x_{i_1 \dots i_m}^{j+1} \in U_{t_0}$, т. е. точка $x_{i_1 \dots i_m}^{j+1}$ эквивалентна точкам из $P_{i_1 \dots i_m j}$, в частности, $x_{i_1 \dots i_m}^{j+1} \sim x_{i_1 \dots i_m j}^{26}$. Вследствие (17) получаем $x_{i_1 \dots i_m}^{j+1} \sim x_{i_1 \dots i_m}^j$, что противоречит выбору j . Слабая связность G доказана.

Для набора индексов $i_1, \dots, i_k$ из I возьмем сохраняющее ориентацию аффинное преобразование $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, переводящее сеточную полуокружность P в $P_{i_1 \dots i_k}$. Принимая во внимание способ построения множеств G и $G_{i_1 \dots i_k}$, нетрудно показать, что $h(G) = G_{i_1 \dots i_k}$. Это означает, что все множества $G_{i_1 \dots i_k}$ аффинно эквивалентны G . По свойству 4 слабо связанных множеств все $G_{i_1 \dots i_k}$ являются слабо связными компактными. Отсюда, в силу справедливости для любого фиксированного k соотношений (19), (20) и (22), следует локальная слабая связность G .

Итак, мы показали, что построенный компакт G является вполне несвязным, но в то же время слабо связным и локально слабо связным. Существование описанного в условии теоремы 4 отображения вытекает из уже доказанной теоремы 2. Доказательство теоремы 4 завершено.

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору А. П. Копылову за его участие и неоценимую поддержку в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куратовский К. Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
2. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.

Статья поступила 28 августа 1998 г.

г. Новосибирск